

双子素数の理論と実験

学習院大 理 田中 穰

$p, p+2$ がともに素数であるとき双子素数という。双子素数についてはなにも分かっていないといっても過言ではない。双子素数が無限にあるのかも未解決である。しかし素数 $p \leq x$ で $p+2$ も素数であるものの個数を $\pi_2(x)$ とすると次のことが成り立つであろうと予想されている。

$$\pi_2(x) \sim C \frac{x}{\log^2 x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

ここに

$$C = 2 \prod_{p>2} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\}.$$

p はすべての奇素数の上を動く。 C の値は詳しく計算されている。

$$C = 1.32032363169374$$

(Wrench, Math. Comp., 15(1961), 396-398)

近年, Bombieri の定理と工夫をこらした篩(ふるい)の方法によって概素数(almost-prime)に関する興味深い結果が

出ているが、双子素数そのものに対しては、めばしい進歩はなく、双子素数が無限にあるのかどうかさえも分かっていない。($\pi_2(x)$ の上からの評価は進んでいる。)

他方、素数全体の分布では、 $\pi(x)$ と

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

とは平行に取り扱うことができるが、 $\psi(x)$ の方がゼータ関数との結び付きが工合よく、理論的に自然な (natural) 関数である。(Hardy-Wright, The theory of numbers, p. 340 参照。) ここに $\Lambda(n)$ は Mangoldt の関数と呼ばれていて、その定義は

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & (n \text{ が素数 } p \text{ のとき}) \\ 0 & (n=1, \text{ または } n \text{ が相異なる 2 個以上の素因数をもつとき}) \end{cases}$$

さて双子素数にたいして $\psi(x)$ に対応する関数は

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \Lambda(n+2)$$

であろう。 $\psi_2(x)$ に対しては次のことが予想される。

$$\psi_2(x) \sim Cx \quad (x \rightarrow \infty).$$

問題を一般化し、 k を正の整数として

$$\psi_{2k}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \Lambda(n+2k)$$

となくと、予想は

$$\psi_{2k}(x) \sim C_{2k} x \quad (x \rightarrow \infty)$$

となる。ここに

$$C_{2k} = C \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

p は k の奇数の素因数の上を動く。 C は $\pi_2(x)$, $\psi_2(x)$ に対する予想のときの定数である。

田中は $\psi_{2k}(x) - C_{2k}x$, $k=1(1)50$, $x=10^4(10^4)10^8$ を計算した。学習院大学計算機センターを利用した。数表はその一部の抜き書きである。各表は第1列、第2列の順に縦に見ていただきたい。数値は指数部つき実数型で書いてある。たとえば

$$\psi_2(10^8) - C_2 \cdot 10^8 = .891E4 = 0.891 \times 10^4$$

$$\psi_4(10^8) - C_4 \cdot 10^8 = .160E5 = 0.160 \times 10^5$$

$$\psi_6(10^8) - C_6 \cdot 10^8 = -.148E6 = -0.148 \times 10^6$$

$$\psi_8(10^8) - C_8 \cdot 10^8 = -.110E6 = -0.110 \times 10^6$$

$$\psi_{10}(10^8) - C_{10} \cdot 10^8 = -.636E5 = -0.636 \times 10^5$$

計算機が LP 用紙に印字した結果は

.891694820404703D 04

.160604278120087D 05

-.148328431747647D 06

-.110507608195738D 06

-.636208271086248D 05

である。丸め誤差を抑えるため倍精度計算を行なった。しかし計算の順序を変えると末尾の数字は変動する。

$\psi_{2k}(x) - C_{2k}x$ の大きさについては、理論的な結果がないのはもちろんのこと、なんの予想もない。符号の変化は緩慢である。次の予想はどうだろうか。

$x \rightarrow \infty$ のとき $\psi_{2k}(x) - C_{2k}x$ は符号の変化を限りなく繰り返す。

参考書を挙げておく。

内山三郎：素数の分布，室文館，1970。

三井孝美：整数論，至文堂，1970。

H. Halberstam and H.E. Richert: Sieve methods, Acad. Press, 1974.

$$\psi_2(x) - C_2 x, \quad x = 10^6 (10^6) 10^8$$

-.747E4	.659E5	.696E5	-.157E5	-.554E5
.245 5	.523 5	.449 5	-.174 5	-.280 5
.191 5	.552 5	.315 5	-.491 5	-.317 5
.451 5	.655 5	.200 5	-.353 5	-.308 5
.400 5	.749 5	.177 5	-.414 5	-.344 5
.344 5	.748 5	.215 5	-.570 5	-.338 5
.290 5	.624 5	.212 5	-.408 5	-.211 5
.522 5	.487 5	.114 5	-.233 5	-.185 5
.683 5	.476 5	.554 4	-.465 4	-.184 5
.684 5	.403 5	.153 5	.185 5	-.242 5
.708 5	.458 5	-.343 5	-.463 3	-.186 5
.648 5	.541 5	-.408 5	-.445 5	-.814 4
.494 5	.348 5	-.293 5	-.216 5	-.788 4
.470 5	.416 5	-.237 5	-.560 4	-.102 5
.529 5	.373 5	-.222 5	-.198 5	-.626 4
.690 5	.205 5	-.277 5	-.888 4	-.110 5
.661 5	.562 5	-.213 5	-.880 4	-.187 5
.825 5	.549 5	-.117 5	-.699 4	-.213 5
.792 5	.598 5	-.141 5	-.213 5	-.855 3
.551 5	.693 5	-.189 5	-.366 5	.891 4

$$\psi_4(x) - C_4 x, \quad x = 10^6 (10^6) 10^8$$

-.123E5	-.235E5	-.103E6	-.992E5	-.293E5
-.241 4	-.371 5	-.110 6	-.124 6	-.332 5
-.253 4	-.461 5	-.934 5	-.111 6	-.241 5
-.564 4	-.193 5	-.104 6	-.107 6	-.289 5
.673 4	-.747 4	-.114 6	-.111 6	-.603 5
.608 4	-.140 5	-.127 6	-.117 6	-.500 5
-.401 3	-.239 5	-.117 6	-.101 6	-.201 5
-.266 5	-.945 4	-.121 6	-.836 5	-.394 5
-.274 5	-.138 5	-.142 6	-.594 5	-.353 5
-.173 5	-.361 5	-.114 6	-.411 5	-.190 5
-.213 5	-.389 5	-.106 6	-.414 5	-.151 5
-.114 4	-.448 5	-.965 5	-.309 5	-.124 5
-.494 4	-.341 5	-.120 6	-.435 5	-.883 4
.338 4	-.519 5	-.110 6	-.453 5	-.140 5
.126 5	-.513 5	-.942 5	-.675 5	-.114 5
.109 5	-.617 5	-.919 5	-.646 5	.157 5
.212 5	-.882 5	-.829 5	-.851 5	.471 3
.898 4	-.864 5	-.860 5	-.696 5	.250 5
-.187 4	-.670 5	-.980 5	-.585 5	.798 4
-.242 5	-.695 5	-.105 6	-.437 5	.160 5

$$\psi_6(x) - C_6 x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

-,944E4	-,134E6	-,245E6	-,234E6	-,246E6
-,221 5	-,124 6	-,294 6	-,251 6	-,227 6
-,294 5	-,146 6	-,300 6	-,223 6	-,246 6
-,223 5	-,171 6	-,301 6	-,234 6	-,215 6
-,202 5	-,154 6	-,302 6	-,281 6	-,214 6
-,260 5	-,175 6	-,256 6	-,284 6	-,162 6
-,216 5	-,173 6	-,267 6	-,259 6	-,194 6
-,200 5	-,154 6	-,268 6	-,265 6	-,131 6
-,287 5	-,142 6	-,289 6	-,311 6	-,141 6
-,444 5	-,143 6	-,275 6	-,305 6	-,164 6
-,975 5	-,172 6	-,265 6	-,315 6	-,153 6
-,125 6	-,188 6	-,247 6	-,289 6	-,122 6
-,139 6	-,188 6	-,271 6	-,228 6	-,899 5
-,155 6	-,196 6	-,278 6	-,215 6	-,108 6
-,146 6	-,207 6	-,320 6	-,211 6	-,604 5
-,136 6	-,226 6	-,345 6	-,206 6	-,693 5
-,166 6	-,244 6	-,297 6	-,194 6	-,750 5
-,155 6	-,271 6	-,318 6	-,238 6	-,940 5
-,149 6	-,246 6	-,282 6	-,239 6	-,143 6
-,136 6	-,240 6	-,268 6	-,236 6	-,148 6

$$\psi_8(x) - C_8 x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

,231E4	,920E4	-,491E5	-,207E5	-,522E5
,136 5	,209 5	-,628 5	-,197 5	-,303 5
,219 5	,236 5	-,489 5	-,310 5	-,176 5
-,199 4	,376 5	-,472 5	-,332 4	,637 4
-,742 4	,521 5	-,629 5	-,244 5	-,281 5
-,937 4	,346 5	-,307 5	-,157 5	-,323 5
-,879 4	,349 5	-,587 5	-,195 5	-,273 5
-,563 4	,209 5	-,734 5	-,165 5	-,219 5
-,161 5	,186 5	-,853 5	,171 4	-,144 5
-,302 5	,325 5	-,766 5	,118 5	-,584 5
-,254 4	,310 5	-,892 5	,853 4	-,823 5
,739 4	,375 5	-,694 5	-,214 5	-,932 5
,155 4	,152 5	-,860 5	-,149 5	-,106 6
,116 5	,134 4	-,791 5	-,400 5	-,131 6
,245 5	-,468 5	-,930 5	-,476 5	-,956 5
,939 4	-,490 5	-,781 5	-,209 5	-,879 5
,755 4	-,720 5	-,682 5	-,408 5	-,854 5
,251 5	-,916 5	-,671 5	-,897 5	-,980 5
,528 3	-,873 5	-,605 5	-,933 5	-,105 6
,279 4	-,531 5	-,336 5	-,853 5	-,110 6

$$\psi_{10}(x) - c_{10}x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

-.404E4	.259E3	-.235E5	-.483E5	-.804E5
-.395 4	.881 4	-.358 5	-.551 5	-.818 5
-.191 5	-.490 4	-.842 5	-.525 5	-.573 5
-.329 4	-.176 5	-.778 5	-.380 5	-.739 5
.755 4	-.284 5	-.848 5	-.810 5	-.909 5
-.730 4	-.181 5	-.669 5	-.821 5	-.967 5
-.149 5	-.839 4	-.617 5	-.736 5	-.854 5
-.261 5	-.697 4	-.984 5	-.581 5	-.103 6
.124 4	-.145 5	-.838 5	-.514 5	-.905 5
-.117 5	-.425 4	-.732 5	-.652 5	-.622 5
-.968 4	.179 5	-.620 5	-.428 5	-.333 5
.191 5	.224 5	-.535 5	-.504 5	-.232 5
.298 5	.185 5	-.733 5	-.362 5	-.364 5
-.937 3	.290 4	-.100 6	-.529 5	-.520 5
.151 5	.193 5	-.983 5	-.494 5	-.422 5
.908 4	.247 5	-.107 6	-.276 5	-.394 5
.216 5	-.263 5	-.921 5	-.356 5	-.304 5
.141 5	-.134 5	-.900 5	-.485 5	-.403 5
.260 5	-.144 5	-.741 5	-.522 5	-.656 5
.135 5	-.270 5	-.683 5	-.492 5	-.636 5

$$\psi_{12}(x) - c_{12}x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

-.662E4	-.465E3	.905E5	.459E5	-.158E4
.546 4	.331 5	.530 5	.524 5	.123 5
.633 4	.928 4	.241 5	.355 5	.367 5
.185 4	-.534 3	-.151 5	.132 5	.697 5
.752 4	.244 5	-.285 5	.725 4	.584 5
.454 5	.624 5	.367 5	.390 4	.166 5
.549 5	.697 5	.277 5	-.101 5	.346 5
.327 5	.632 5	.339 5	-.163 5	.327 5
.570 5	.428 5	.142 5	.213 3	.132 5
.315 5	.487 5	.354 5	-.406 5	-.600 5
.243 5	.763 5	.425 5	-.645 5	-.449 5
.470 5	.667 5	.528 5	-.822 5	-.500 5
.615 5	.630 5	.312 5	-.818 5	-.813 5
.362 5	.684 5	.812 4	-.703 5	-.954 5
.204 5	.886 5	.501 3	-.474 5	-.993 5
.381 5	.821 5	.327 5	-.208 5	-.492 5
.348 5	.665 5	-.109 5	-.761 5	-.319 5
.549 4	.530 5	-.208 5	-.693 5	-.476 5
-.148 4	.892 5	.301 4	-.840 5	-.635 5
-.887 4	.862 5	.345 4	-.484 5	-.889 5

$$\psi_{14}(x) - C_{14}x, \quad x = 10^6(10^b)10^8$$

-.814E3	.192E5	-.680E5	-.150E6	-.283E5
-.201 5	.118 5	-.563 5	-.142 6	-.220 5
-.158 5	-.113 4	-.865 5	-.147 6	-.431 5
.570 4	-.520 4	-.809 5	-.136 6	-.735 5
-.715 4	-.282 5	-.100 6	-.126 6	-.675 5
-.200 5	-.261 4	-.119 6	-.113 6	-.744 5
-.844 4	-.979 4	-.949 5	-.111 6	-.534 5
-.969 4	.954 4	-.110 6	-.122 6	-.988 5
.817 4	-.157 5	-.115 6	-.157 6	-.110 6
.235 4	-.105 5	-.120 6	-.136 6	-.133 6
-.547 4	-.218 5	-.128 6	-.133 6	-.128 6
.126 4	-.564 5	-.113 6	-.129 6	-.111 6
.690 4	-.305 5	-.992 5	-.117 6	-.110 6
.281 4	-.421 5	-.113 6	-.869 5	-.657 5
.961 4	-.543 5	-.127 6	-.103 6	-.577 5
.173 5	-.407 5	-.145 6	-.610 5	-.388 5
.172 5	-.626 5	-.131 6	-.505 5	-.386 5
.200 5	-.732 5	-.147 6	-.479 5	-.265 5
.190 5	-.663 5	-.155 6	-.497 5	-.461 5
.224 5	-.708 5	-.160 6	-.447 5	-.705 5

$$\psi_{16}(x) - C_{16}x, \quad x = 10^6(10^b)10^8$$

-.160E4	-.291E5	.101E6	.144E6	.214E6
-.102 5	-.153 5	.927 5	.120 6	.254 6
-.675 4	-.168 5	.111 6	.122 6	.259 6
.221 4	.209 4	.133 6	.122 6	.279 6
.843 4	.207 4	.122 6	.117 6	.285 6
-.187 4	.573 4	.156 6	.117 6	.304 6
-.788 4	.175 5	.175 6	.134 6	.292 6
-.126 5	.208 5	.161 6	.146 6	.271 6
-.220 5	.434 5	.143 6	.144 6	.292 6
-.246 5	.580 5	.163 6	.144 6	.282 6
-.679 4	.500 5	.163 6	.150 6	.282 6
-.176 5	.518 5	.139 6	.139 6	.262 6
-.219 5	.638 5	.162 6	.153 6	.248 6
-.324 5	.732 5	.158 6	.140 6	.256 6
-.295 5	.675 5	.148 6	.158 6	.248 6
-.470 5	.542 5	.152 6	.168 6	.260 6
-.485 5	.417 5	.159 6	.182 6	.270 6
-.441 5	.586 5	.172 6	.164 6	.259 6
-.460 5	.594 5	.156 6	.169 6	.267 6
-.108 5	.957 5	.147 6	.187 6	.250 6

$$\psi_{18}(x) - C_{18}x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

.378E4	.758E5	-.203E5	.947E5	-.624E5
.476 4	.546 5	-.682 5	.462 5	-.435 5
-.713 3	.650 5	-.646 5	.497 5	-.339 5
.307 5	.398 5	-.448 5	.900 5	-.282 5
.332 5	.685 5	-.434 5	.768 5	-.652 5
.385 5	.746 5	-.432 5	.637 5	-.709 5
.459 5	.641 5	-.236 5	.723 5	-.680 5
.364 5	.883 5	-.183 5	.990 5	-.634 5
.282 5	.497 5	-.173 5	.107 6	-.812 5
.187 5	.250 5	.246 5	.134 6	-.710 5
.275 5	.133 5	.242 5	.110 6	-.698 5
.235 5	.214 4	.410 5	.129 6	-.428 5
.245 5	-.294 5	.717 5	.123 6	-.156 5
.278 5	-.307 5	.960 5	.962 5	-.438 5
.265 5	-.496 5	.953 5	.444 5	-.256 5
.439 5	-.337 5	.108 6	.585 5	.960 3
.218 5	-.276 5	.114 6	.276 5	-.151 5
.391 5	-.301 5	.102 6	-.100 5	.238 5
.463 5	-.310 5	.102 6	-.560 5	.844 3
.787 5	-.213 5	.804 5	-.927 5	-.101 5

$$\psi_{20}(x) - C_{20}x, \quad x = 10^6(10^6)10^8$$

.384E4	-.531E5	-.537E5	-.840E5	-.167E6
.136 5	-.583 5	-.899 5	-.141 6	-.132 6
.959 4	-.401 5	-.594 5	-.150 6	-.136 6
.142 5	-.261 5	-.676 5	-.136 6	-.165 6
.106 4	-.412 5	-.614 5	-.152 6	-.204 6
-.996 4	-.480 5	-.641 5	-.184 6	-.216 6
.828 3	-.192 5	-.710 5	-.171 6	-.203 6
-.294 4	-.357 5	-.894 5	-.175 6	-.183 6
-.835 4	-.526 5	-.743 5	-.172 6	-.170 6
-.134 5	-.232 5	-.676 5	-.206 6	-.194 6
-.207 4	-.256 5	-.885 5	-.194 6	-.198 6
.551 4	-.598 5	-.862 5	-.180 6	-.236 6
-.606 4	-.669 5	-.105 6	-.186 6	-.250 6
-.254 5	-.395 5	-.944 5	-.198 6	-.232 6
-.201 5	-.597 5	-.108 6	-.209 6	-.222 6
-.588 5	-.774 5	-.119 6	-.182 6	-.212 6
-.411 5	-.675 5	-.132 6	-.176 6	-.212 6
-.430 5	-.782 5	-.125 6	-.187 6	-.209 6
-.434 5	-.487 5	-.131 6	-.178 6	-.203 6
-.465 5	-.549 5	-.100 6	-.147 6	-.221 6

編集者注： 内山三郎より，素数に順に $p_1, p_2, \dots$ と番号をつけると， p_i 番目の素数が双子素数であることがきわめて多く， x までの双子素数の組数は $\pi(\pi(x))$ で非常によく近似される，という注意があった。Lehmer の素数表などで検証できるはずである。生田利治（静岡大理）は，さっそく計算機による実験を開始し，8百万くらいまで上記の事実を検証している。その報告は時間的に本講究録には間に合わなかったが，興味ある方は直接同氏に連絡するとよい。