

トポロジーと流体力学

東京農工大学 高木隆司 (Ryuji Takaki)

1. はしがき

トポロジーと流体力学とは深い関係にあると思われるが、いままでその関係を深く追求してはいなかった。流体力学という学問の将来は、1つは実際の問題への応用へ進み、1つはより基礎的な問題の追求へ進むと思われる。トポロジーとの関連を議論することは、この第2の道に当たるであろう。以下では、流体力学より一般的には連続体の力学という観点から、トポロジーの代表的な話題を取り上げ、続いて筆者が最近試みたトポロジーの測定に関する1つの試みを紹介する。

トポロジーという数学の分野は、オイラーによる多面体の研究から始まったといってもよい。多面体の面の数を F 、辺の数を E 、頂点の数を V とすると、よく知られたオイラーの公式

$$F - E + V = \chi = 2(1 - n) \quad (1)$$

が成り立つ。 n は、多面体の連結の程度を表し、単連結なら $n = 0$ 、ドーナツのような2重連結なら $n = 1$ である。すなわち、 n は多面体を貫通する穴の数といってもよい。 χ は、オイラー数と呼ばれ、多面体の面の数等には依らず、連結性のみによって決まる数である。

ここで、多面体の辺を滑らかに丸めたとすると、面や辺や頂点の数は減少する。面のトポロジー的な性質を変えずに(単連結であるという性質を変えず)、これらの数をできるだけ減らしていくと、例えば $n = 1$ の立体は、図1のような $F = 1$ 、 $E = 2$ 、 $V = 1$ という立体になる。これらの数は、ベッチ数と呼ばれる。このような立体でも、式(1)はやはり成り立つことを注意しておこう。

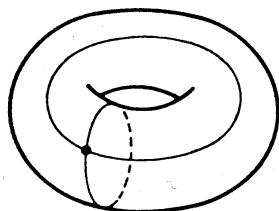


図1. ベッチ数の例
 $F = 1$, $E = 2$, $V = 1$.

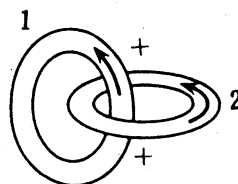


図2. 絡み合いと絡み数
絡み数 $v = 1$.

ところで、分離した複数個の立体については、オイラー数 χ だけでは記述できない性質がある。たとえば、図2のように、2個のドーナツからなる立体では、それらが絡んでいる場合といない場合とでは、オイラー数は共通である。これらは、絡み数と呼ばれる数によって区別される。一般に、2個の閉じた曲線を添え字1、2で区別し、パラメーター t_1 、 t_2 を用いて $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$ で表すと、

$$v = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\{x_1(t_1) - x_2(t_2)\} \cdot \left(\frac{dx_1}{dt_1} \times \frac{dx_2}{dt_2} \right)}{|x_1(t_1) - x_2(t_2)|^3} dt_1 dt_2 \quad (2)$$

で定義される v は、閉曲線の絡み方を与え、絡み数と呼ばれる。式(2)は、ガウスの公式とよばれる。図2(a),(b)の立体は、それぞれ $v=0$ 、 $v=1$ である（パラメーターの向きの定義によっては $v=-1$ となる）。

孤立した多数の要素、あるいは孤立した孔を多数含む乱雑な図形は、渦度分布や温度分布等の解析に関して、流体力学でもしばしば現れる。2次元図形の場合に限って、乱雑図形の連結性に関するある指標を紹介しよう。これは、平面の領域が白（空白部分）と黒（実質部分）に分かれているとき、空白部分の中に、実質部分が分散しているのか、逆に実質部分の中に空白部分が分散しているのかという区別を与えるものである。

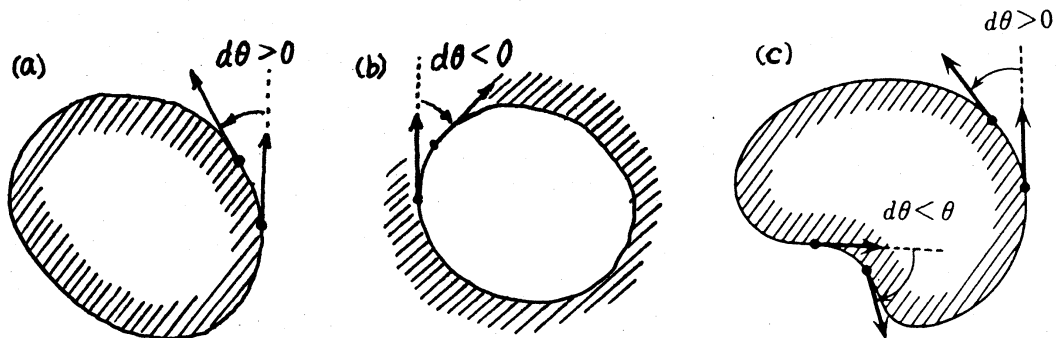


図3. $d\theta$ の定義。(a)空白の中の実質、(b)実質の中の空白
(c)凸と凹の部分の混在。

図3のように、境界に沿って実質部分を右にみながら点を動かしたとき、接線方向の角度を $d\theta$ 一周にわたって積分すると、孤立した実質については 2π になる。逆に、孤立した空白では -2π である。多数の要素にわたって $d\theta$ を積分したものを θ_{net} と呼ぶ。すなわち、

$$\theta_{net} = \sum \int d\theta \quad (3)$$

一方、 $|d\theta|$ を一周にわたって積分すると、 2π に等しいか（完全に凸、ある

いは凹の図形)、あるいは大きくなる(凸と凹が混ざっている場合)。 $|d\theta|$ を一周にわたって積分したものを θ_{total} と呼ぶ。すなわち、

$$\theta_{total} = \sum \int |d\theta| \quad (4)$$

これらの比

$$\rho = \theta_{net} / \theta_{total} \quad (5)$$

は、 -1 と 1 の間の値を持ち、実質部分の連結性を示すパラメーターである。図4に、肝臓の組織について測定された、 ρ の値の例を示す。ここでは、 ρ は結節分離度と呼ばれている。

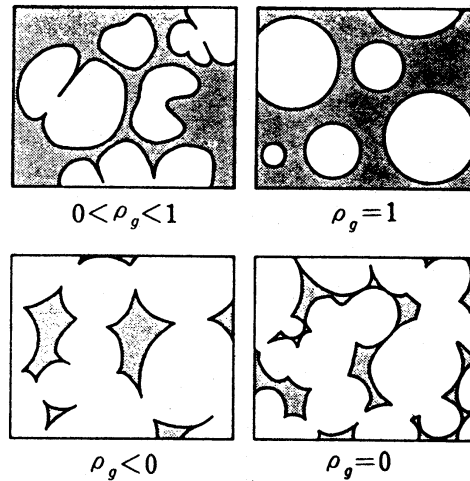


図4. 肝臓組織についての ρ の測定例[1]

以上、オイラー数、絡み数、連結性のパラメーターのみに触れたが、もちろんトポロジーの話題は、これだけではない。ただし、これらは基本的なものである、流体力学に応用される可能性も高いと思われる。詳しくは、文献[2],[3]を参照されたい。

3. 連続分布の連結性パラメーター

連続分布をもつ場について、 θ_{net} や θ_{total} に相当する量を定義してみよう。図5のように、2次元の場合 $u = f(x, y)$ によって実質部分が表されとしよう。実質部分は $f=1$ 、空白は $f=0$ とする。等高線の法線ベクトル $\mathbf{n}$ 、接線ベクトルを $\mathbf{t}$ とすると、

$$\nabla f = |\nabla f| \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\mathbf{t} = (\nabla f \times \mathbf{k}) / |\nabla f| \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。

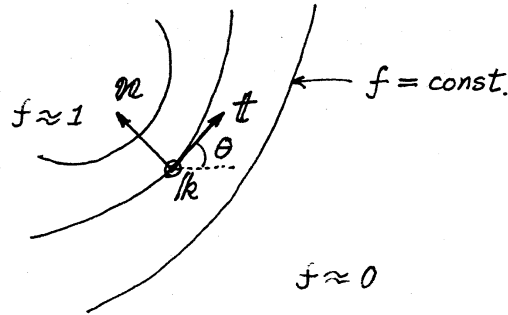


図5. $f(x, y)$ の等高線と、 t , n の定義。

ここで、 $d\theta$ に対応する量を求めるために、 ∇f を t の方向に微分してみる。

$$\begin{aligned} (t \nabla) \nabla f &= (t \nabla) |\nabla f| n \\ &= (t \nabla) |\nabla f| \cdot n + |\nabla f| \cdot (t \nabla) n \\ &= (t \nabla) |\nabla f| \cdot n - |\nabla f| t / R \end{aligned}$$

となる。ただし、 R は曲率半径であり、曲率中心が f の大きな値の側にあるとき正の値になる。この式と t の内積を作ると、

$$t (t \nabla) \nabla f = t_i t_j \nabla_i \nabla_j f = - |\nabla f| / R \quad (8)$$

となる。

さて、(8) 式の符号を変えたものを、2次元平面にわたって積分してみよう。ここで、 $f(x, y)$ について次のような仮定を置く。 f は、高さが1の台地じょうの分布をしていて、下側は高さが0、すなわち $f=0$ とする。すると、斜面の勾配は台地のふちに限定されているので、(8) 式もこのふちの近傍でのみ値を持つ。したがって、面積積分も、ふち近傍のみで寄与するので、面積要素 dS は、等高線に沿った専用祖 dt と、最大傾斜方向の線要素 dn の積になる。すなわち、

$$-\iint t_i t_j \nabla_i \nabla_j f dS = \iint |\nabla f| / R dt dn \quad (9)$$

この式の右辺の積分のうち、 n による積分を先に行う。これは、最大傾斜の勾配 $|\nabla f|$ をその方向 (n 方向) に積分することになり、傾斜の両側の高さの差になる。この差は、仮定により1である。したがって、積分(8)は $1/R$ を t について積分したものになる。ところで、 $dt/R = d\theta$ であることに注意すると、この積分は θ_{net} に等しい。すなわち、

$$\theta_{net} = -\iint t_i t_j \nabla_i \nabla_j f dS \quad (10)$$

同様に、 θ_{total} も、絶対値を積分することにより、

$$\theta_{total} = \iint |t_i t_j \nabla_i \nabla_j f| dS \quad (11)$$

となる。

連続分布 f を人為的にいくつか作って、それらについて求めた θ_{net} 、 θ_{total} 、 $\rho = \theta_{net} / \theta_{total}$ の値の例を、図6に示す。(a)は、縁が少し滑らかにした台地状の分布であり、上の仮定によく当てはまっているはずであるが、得られた結果の θ_{net} は 2π から少しずれている。上下を逆転させた分布（実質と空白を取り替えた分布）では(b)、予想どおり θ_{net} の符号が逆転している。縁がシャープな分布(c)では、 2π からのずれが大きくなる。ガウス分布(d)では、 $\theta_{net} = 2\pi$ が台地状分布よりさらによく成り立っている。山が2つある分布(e)、山と谷がある分布(f)、乱雑な分布(g),(h)についてもそれぞれ求められるが、それらの結果は予想どおりである。

4. おわりに

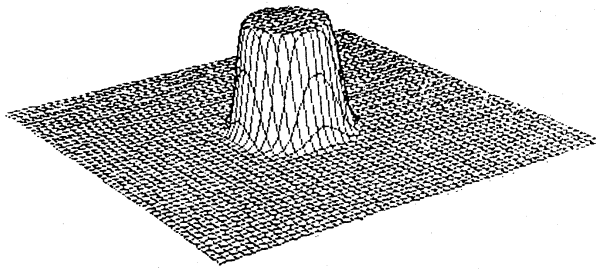
本論で議論した、2次元の分布の連結性を表すパラメーターは、乱流において渦度、エネルギー散逸、圧力等のスカラー量の分布の解析に適用できると考えられる。また、3次元にも拡張できるはずであるが、これらはまだ試みていない。

シャープな台地の場合に誤差が生じたのは、有限なメッシュサイズのためと思われる。たの例も考えると、ここで紹介した方法は滑らかな分布に対して有効であるといえる。

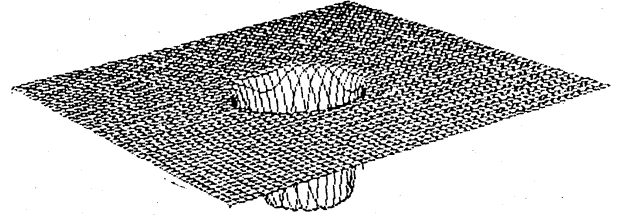
一般に、トポロジーは普遍的な性質を持つので、古くて新しいテーマである。今後も、引続き追求する価値があると思われる。

参考文献

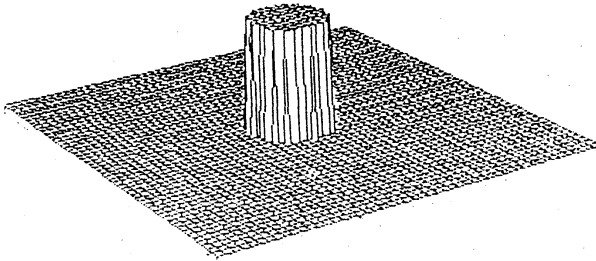
- [1] 松本 純, 高橋 徹:「構造の連結性による慢性肝病変の像解析」, 肝臓, 18 (1977) 739-748.
- [2] 高木隆司:「形の数理」(朝倉書店,1992) .
- [3] H.K. Moffatt and A. Tsinober, ed.: Topological Fluid Mechanics, Proceedings of the IUTAM Symposium, Cambridge, UK, (Cambridge University Press, 1990).



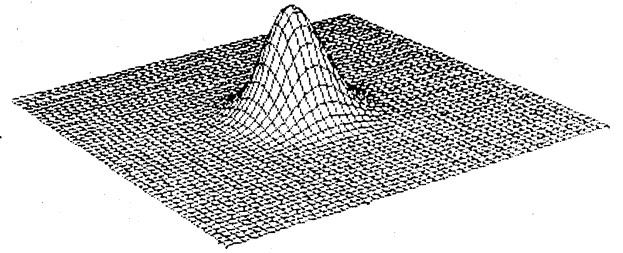
(a) $\theta_{\text{net}} = 6.610, \theta_{\text{total}} = 6.613,$
 $\rho = 0.999$



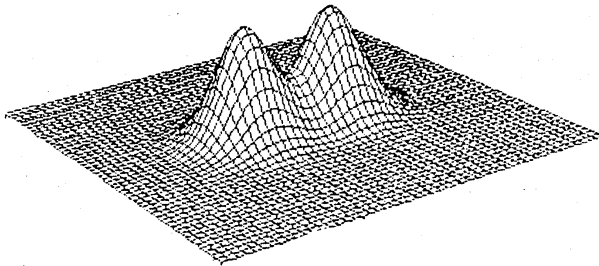
(b) $\theta_{\text{net}} = -6.610, \theta_{\text{total}} = 6.613,$
 $\rho = 0.999$



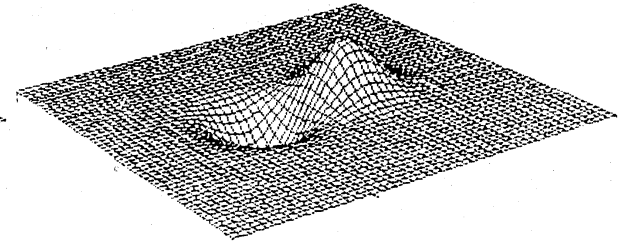
(c) $\theta_{\text{net}} = 5.00, \theta_{\text{total}} = 41,$
 $\rho = 0.122$



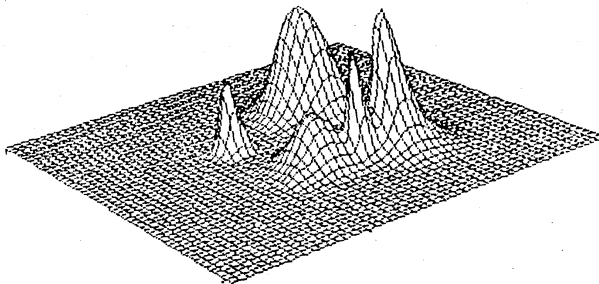
(d) $\theta_{\text{net}} = 6.231, \theta_{\text{total}} = 6.231,$
 $\rho = 1.000$



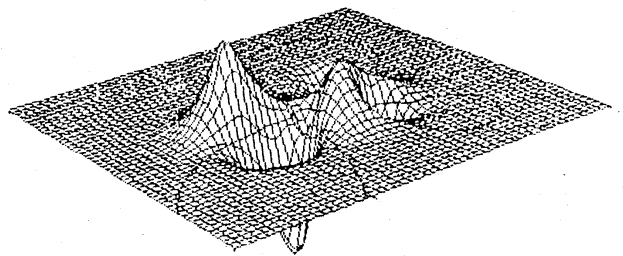
(e) $\theta_{\text{net}} = 6.610, \theta_{\text{total}} = 6.613,$
 $\rho = 0.999$



(f) $\theta_{\text{net}} = -8.2 \times 10^{-7},$
 $\theta_{\text{total}} = 6.613, \rho = -1.3 \times 10^{-7}$



(g) $\theta_{\text{net}} = 19.00, \theta_{\text{total}} = 21.74,$
 $\rho = 0.874$



(h) $\theta_{\text{net}} = -2.93, \theta_{\text{total}} = 12.60,$
 $\rho = -0.233$

図6. 人為的な分布についての、連結性パラメーターの値, (a): 滑らかな台地、
(b): (a)の上下逆転、(c)シャープな台地、(d): ガウス型の分布、(e): 2つの
山を持つ分布、(f): 山と谷を持つ分布、(g), (h): 乱雑な分布