

Semi-stable sheaves の有界性について.

京大 理

丸山正樹

Semi-stable (又は, stable) sheaves の moduli の構成に関して, 残っている問題で最も重要なものは Semi-stable sheaves の有界性であろう。この小論ではこの問題を説明し, どこまで解決しているかを述べる。

Y を代数的閉体 k 上の非特異, 射影的代数多様体, $\mathcal{O}_Y(1)$ をその上の ample 可逆層とする。

定義 1. Y 上の連接層 E が stable (又は, semi-stable) であるとは, 次の (i), (ii) が成立する時に言う。

(i) E は torsion free ($\neq 0$),

(ii) 任意の連接部分層 $F (\neq 0, \subsetneq E)$ について,

$$\chi(F(m))/r(F) = P_F(m) < P_E(m) = \chi(E(m))/r(E), \forall m \gg 0,$$

(又は, $\leq$)

ここで, Y 上の連接層 G について, $\chi(G(m)) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, G \otimes \mathcal{O}_Y(m))$, $r(G) = Y$ の generic point での G の rank.

S を universally Japanese (= pseudo-geometric) ring Λ 上有限生成な scheme とする. $f: X \rightarrow S$ を smooth, projective, geometrically integral な morphism, $\mathcal{O}_X(1)$ を f -ample な可逆層とする. (Sch/S) を locally noetherian S -schemes の category とする. numerical polynomial $H(x)$ と, $T \in (Sch/S)$ に対して,

$$\Sigma_{X/S}^H(T) = \{E \mid T\text{-flat な } X_S/T \text{ 上の連接層で, } T \text{ の任意の geometric point } t \text{ に対して, } E_t = E \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \text{ は } \mathcal{O}_{X_t}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(t) \text{ に関して stable かつ } \chi(E_t(m)) = H(m) \} / \sim$$

$$\overline{\Sigma}_{X/S}^H(T) = \{E \mid \text{上の条件の内 stable と semi-stable に変えられたもの} \} / \sim.$$

ここで, $E_1 \sim E_2 \iff \exists L: T \text{ 上の可逆層 s.t. } E_1 \cong E_2 \otimes_{\mathcal{O}_T} L.$

明らかに, $\Sigma_{X/S}^H, \overline{\Sigma}_{X/S}^H$ は (Sch/S) から $(Sets)$ への contravariant functor となる。

定理 1. $\Sigma_{X/S}^H$ は $(S \text{ 上})$ locally of finite type かつ separated な coarse moduli $M_{X/S}(H)$ を持つ。 $M_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\iff M_{X/S}(H): \text{quasi-projective} / S$.

次に, 射影多様体 Y 上の semi-stable sheaf E を考える。

命題 1. E を Y 上の semi-stable sheaf とする。

(i) E には次の性質 (a), (b) を持つ filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha = E$ が入る; (a) $P_{E_i/E_{i-1}}(m) = P_E(m)$, $1 \leq i \leq \alpha$, (b) 各 E_i/E_{i-1} は stable.

(ii) (i) の性質 (a), (b) を持つ filtration $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_\beta = E$ がもう 1 つあるとすると, $\alpha = \beta$ で $(1, 2, \dots, \alpha)$ の置換 σ が存在して, $E'_i/E'_{i-1} \cong E_{\sigma(i)}/E_{\sigma(i)-1}$.

上の命題により, $gr(E) = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} E_i/E_{i-1}$ は (同型を除いて) 一意に決まる。

定義 2. semi-stable sheaves E_1 と E_2 が S-equivalent $\Leftrightarrow gr(E_1) \cong gr(E_2)$. これを $E_1 \sim E_2$ で表わす。

注意 E_1 と E_2 のうち一方が stable ならば,

$$E_1 \sim E_2 \Leftrightarrow E_1 \cong E_2.$$

定理 2. 次の性質を持つ S-scheme $\bar{M}_{X/S}(H)$ が存在する。

- (i) $\bar{M}_{X/S}(H)$ は S 上 locally of finite type かつ separated.
 (ii) functor の射 $\varphi: \bar{\Sigma}_{X/S}^H \rightarrow h_{\bar{M}_{X/S}(H)} = \text{Hom}_S(*, \bar{M}_{X/S}(H))$ があって, S-scheme N に対して, functor の射 $\psi:$

$\Sigma_{X/S}^H \rightarrow P_N$ があれば, 射 $\gamma: \bar{M}_{X/S}(H) \rightarrow N$ で, $h(\gamma)\varphi = \varphi$ となるものが一意的に存在する.

(iii) S の任意の geometrical point s について, $\varphi(k(s)): \Sigma_{X/S}^H(\text{Spec}(k(s))) \rightarrow \bar{M}_{X/S}(k(s))$ は surjective で, $\varphi(k(s))(E_1) = \varphi(k(s))(E_2) \Leftrightarrow E_1 \sim_S E_2$.

(iv) 自然な射 $M_{X/S}(H) \rightarrow \bar{M}_{X/S}(H)$ は open immersion.

(v) $\bar{M}_{X/S}(H)$ は specialization で閉じている. しかも, $\bar{M}_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\Leftrightarrow \bar{M}_{X/S}(H)$: projective/ S .

さて, 問題は上の (v) に関して,

問題 $\bar{M}_{X/S}(H)$ は S 上 projective か? すなわち, $M_{X/S}(H)$ は S 上有限生成か?

この問題を追求するために 2, 3 の概念を導入しよう

定義 3 $f: X \rightarrow S$ を noetherian scheme の間の projective morphism とする. K_1, K_2 を体として, S の K_i -valued point が与えられたいとする. X_{K_i} 上の連接層 E_i について, E_1 と E_2 が equivalent ($E_1 \sim E_2$) $\Leftrightarrow$ 体 K と S 上の injection $K_i \subset K$ が与えられて, $E_1 \otimes_{K_1} K \cong E_2 \otimes_{K_2} K$ (X_K 上の層として). $f: X \rightarrow S$ の fibres 上の連接層

の equivalence classes のある 集合 を, "a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S " と 言う.

定義 4. $f: X \rightarrow S$ を 定義 3 と 同 じ と する.

$\mathcal{F}$: a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S .

こ の 時, $\mathcal{F}$ が 有 界 (bounded, limitée) $\iff \exists T$; S -scheme of finite type, $\exists F$: coherent sheaf on $X \times_S T$ s.t. $\mathcal{F} \subseteq \{F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \mid t \in T\} / \sim$.

注意 "flattening stratification" を 使 之 ば, 上 の 定 義 で " F が T -flat" と 仮 定 し て よ い こ と が わ かる.

前 に も ど の と, $f: X \rightarrow S$ を smooth, projective, geometrically integral, S が Λ 上 有 限 生 成 と する. $\overline{G}_{X/S}(H) = \{E \mid E \text{ は } X \text{ の geometric fibre } / S \text{ 上 の semi-stable sheaf で, } X(E(m)) = H(m)\} / \sim$ と お く. $\overline{G}_{X/S}(H)$ が 有 界 と する と, T と F が ある. F は T -flat と し て お く. こ の 時, T の 開 集 合 T_0 が 存 在 し て, 任 意 の 代 的 開 体 k へ 対 し て, $T_0(k) = \{t \in T(k) \mid F_t = F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \text{ は semi-stable}\}$ と なる. T を T_0 で, F を $F|_{X \times_S T_0}$ と お き か え て よ い と する と, $F \in \overline{\Sigma}_{X/S}^H(T)$. 定 理 2 の (ii) へ よ り, $\exists g: T \rightarrow \overline{M}_{X/S}(H)$, (iii) へ よ り g は surjective. T は quasi-compact 故 に, $\overline{M}_{X/S}(H)$ も quasi-compact. 従 っ て, (iv) へ よ り,

$M_{X/S}(H)$ は projective/S. 故に, 我々の問題は次の問題に帰着した (実は同値)。

問題 $\overline{G}_{X/S}(H)$ は有界か?

注意 $\overline{G}_{X/S}(H)$ の定義の semi-stable という条件を, 例えば indecomposable 置きかえると, 有界でなくなる。我々の問題は自明ではない。

上の問題を考えるのには, (semi-)stable よりも次に定義する μ -(semi-)stable の方が扱いやすい。

Y , $\mathcal{O}_Y(1)$ を定義 1 と同じとし, E を Y 上の torsion free ($\neq 0$) な連接層とする。 $d(E, \mathcal{O}_Y(1))$ を E の first Chern class $c_1(E)$ の $\mathcal{O}_Y(1)$ に関する degree とし,

$$\mu(E) = d(E, \mathcal{O}_Y(1)) / r(E)$$

と定義する。

定義 5 Y 上の連接層 E が μ -stable (又は, μ -semi-stable) であるとは, 次の条件を満足するときを言う。

- (i) E は torsion free ($\neq 0$),
- (ii) 任意の連接部分層 $F (\neq 0, \subsetneq E)$ について,

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{又は, } \mu(F) \leq \mu(E)).$$

E が semi-stable ならば μ -stable なので, $\overline{\mathcal{G}}_{X/S}(H) \subseteq \mathcal{G}_{X/S}''(H) = \{E \mid E \text{ は } X \text{ の geometric fibre } /s \text{ 上の } \mu\text{-semi-stable sheaf で, } \chi(E(m)) = H(m)\} / \sim$. 従って, $\mathcal{G}_{X/S}''(H)$ の有界性が言えれば充分である.

以下, Λ は noether 環, S は noetherian Λ -scheme とする. $f: X \rightarrow S$ は, smooth, projective, geometrically integral とし, f -ample な可逆層 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定する.

$f: X \rightarrow S$ の geometric fibre X_s 上の連接層 E について, 整数 $a_0(E), \dots, a_n(E)$ が存在して,

$$\chi(E(m)) = \sum_i \dim H^i(X_s, E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X(m)) = \sum_{i=0}^n a_i(E) \binom{m+n-i}{n-i}.$$

E について, 次の条件を考える.

- (1) E は $\mathcal{O}_{X_s}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ について μ -semi-stable.
- (2) $a_0(E) = nd$, $a_1(E) = a_1$, $a_i(E) \geq a_i$ ($2 \leq i \leq n$), ここで, d は X_s の $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ に関する次数.
- (3) E は Serre の条件 (S_2) を満足する.
- (4) $a_0(E) = nd$, $a_1(E) = a_1$, $a_2(E) \geq a_2$, ここで, d は (2) と同じ.
- (5) 次数 n の numerical polynomial $H(x)$ について, $\chi(E(m)) = H(m)$ かつ, $r(E) = r$.

上の条件のいくつかを満足する E の family

を定義しよう。

$$\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \dots, a_n) = \{E \mid E \text{ は条件 (1), (2) を満たす}\} / \sim$$

$$\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2) = \{E \mid E \text{ は条件 (1), (3), (4) を満たす}\} / \sim$$

$$\Sigma''_{X/S}(n, r, H) = \{E \mid E \text{ は条件 (1), (5) を満たす}\} / \sim$$

有界性について，例えば次の命題が考えられる。

$B_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \dots, a_n)$ が有界。

$B'_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2)$ が有界。

$B''_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ が有界。

$\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ は $(\Lambda$ についての条件が少し違うが) 前の $\mathcal{G}''_{X/S}(H)$ と同じものだから，我々問題は $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n, r, Λ について成立するか？ ということになる。 $B''_{n,r}(\Lambda)$ が成立する時，

「semi-stable sheaves の有界性が，次元 n ，階数 r について，(Λ -scheme の category 上) 成立する。」

とすることにする。

命題 2 $B_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$ 。 $B'_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$ 。

従って, *semi-stable sheaves* の有界性を示すには, $B'_{n,2}(\Lambda)$ を証明すれば良いことになる。大切なことは, 次元についての帰納法を使う場合, $B''_{n,2}(\Lambda)$ を直接証明するよりも, $B'_{n,2}(\Lambda)$ を証明する方が容易に思われることである。

今までにわかってゐる結果をまとめると,

定理 3 (i) $n=1,2$ の時, $B_{n,2}(\Lambda)$, $B'_{n,2}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,2}(\Lambda)$ が, すべての n, Λ について成立する。

(ii) $B_{2,2}(\Lambda)$, $B'_{2,2}(\Lambda)$ 従って $B''_{2,2}(\Lambda)$ が, すべての n, Λ について成立する。

(iii) $n=3,4$ かつ Λ が標数 0 の体の時, $B_{n,2}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,2}(\Lambda)$ が, すべての n について成立する。

この定理の証明は容易ではない。証明の途中で使われる結果で, それ自身興味のあるものを 2,3 あげよう。

定理 4. Y を代数的閉体上の非特異, 射影的代数多様体, $\mathcal{O}_Y(1)$ を Y 上の *very ample* 可逆層とする。 L を $|\mathcal{O}_Y(1)|$ の *very ample* 部分一次系とする。

Y 上の $(\mathcal{O}_Y(1))$ に関して μ -semi-stable sheaf E について,
 $r(E) < \dim Y$ とする. この時, L の空でない開
 集合 $U(E)$ が存在して, $\forall Z \in U(E)$, $E \otimes \mathcal{O}_Z$ は $\mathcal{O}_Z(1) =$
 $\mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Z$ に関して μ -semi-stable.

注意 上の定理で $r(E) < \dim Y$ という条件は
 除けない. 例えば, $\mathbb{P}^n$ と普通の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ をとった
 とき, 接バンドル $T_{\mathbb{P}^n}$ を考える. 勝手な $\mathbb{P}^m \cong H \in$
 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$ について, 完全列

$$0 \longrightarrow T_H \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}|_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(1) \longrightarrow 0$$

を得る. $c_1(T_H) = n \cdot H^2$, $c_1(T_{\mathbb{P}^n}|_H) = (n+1)H^2$. 故に,

$$\mu(T_H) = n/(n-1) > (n+1)/n = \mu(T_{\mathbb{P}^n}|_H).$$

となり, $T_{\mathbb{P}^n}|_H$ は μ -semi-stable でない.

定理 3 の (i) は定理 4 の直接の系である.

Y を非特異, 射影曲面とし, $\mathcal{O}_Y(1)$ を very ample
 可逆層, $L \subseteq |\mathcal{O}_Y(1)|$ を very ample 部分一次系とする.
 E が Y 上の torsion free, 階数 r の連接層とする.
 L の空でない開集合 $W(E)$ が存在して, $W(E)$ の
 勝手な元 C について, C は非特異, $E|_C$ は locally
 free となる. さて, $C \in W(E)$ について,

$d(E, C) = \min \{d(E, \mathcal{O}_Y(1)) - 2 \deg D \mid D: \text{line subbundle of } E|_C\}$
 とおくと, $d(E, C)$ は整数である.

$$d(E) = \max \{d(E, C) \mid C \in W(E)\}$$

は有限であり, $W(E)$ の空でない開集合 $W'(E)$ があって, $d(E) = d(E, C), \forall C \in W'(E)$.

定理 5 $Y, \mathcal{O}_Y(1), L, E$ は上と同様とする。さらに, 基礎体の標数は 0 とし, E は μ -semi-stable とする。この時,

$$d(E) \geq -C^2, \quad C \in L.$$

注意 上の定理で“標数 0”という条件は除けない。例えば $Y = \mathbb{P}_2, \mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1), L = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|, E = T_{\mathbb{P}_2}^{(p^n)}$ ($p = \text{標数}$) とすれば, $d(E) = -p^n$ となる。

定理 5 の証明は, W. Barth が $\mathbb{P}_n$ 上の階数 2 の stable bundle を調べるのに使った方法 (Math. Ann. 226 (1977) 125-150) と真似ればよい。この定理は, この場合定理 4 の様なことは成立しないが, 一般の C について, $E|_C$ が μ -semi-stable からあまり離れないことを意味する。定理 3 の (iii) の $n=3$ の場合は, 定理 4, 5 を使って証明される。 $n=4$

の場合は、定理5の高い階数の場合への、3よ、とした一般化から出る。

定理5の様なことが一般の階数で成立すれば、 $B'_{n,n}(\Lambda)$ が、 Λ が標数0の体という仮定の下で証明できると思われる。

最後に文献であるが、定理1,2に述べたmoduliについては次のものがある。

M. Maruyama: Stable vector bundles on an algebraic surface,
Nagoya Math. J., 58, 1975.

D. Gieseker: On moduli of vector bundles on an algebraic surface,
Ann. of Math., 106, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ.,
17, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ.,
18, 1978.

有界性について基本的なものは、

S. Kleiman: Les théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard, Sem.
de Géométrie Algébrique de Bois Marie, 1966/67, Exposé XIII, Lect.
Note in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.

この小論の詳しい内容は次の論文にある。

H. Maruyama: Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks,
submitted to Nagoya Math. J..