

一次元の流体方程式に対する差分法

京大 工学部 野木 達夫

§ 1. 序 粘性も熱伝導もない圧縮性流体の方程式は、一般に衝撃波（以下ではこれを S 波とよぶ）のような不連続解も有するので、それを数値計算で求めようとするとき、一層の工夫がいる。昔からよく考えられている方法は、滑らかな領域では特性曲線を用いて解き、 S 波面のところでは Rankine-Hugoniot の条件（ $R-H$ 条件）で両方からの解をつなぎ合わせるというものである。しかし S 波は空間に固定した縞に対して動いており、そして $R-H$ 条件が非線形、しかも S 波の位置は予め知られているというものではないなどのことから、この方法による計算のアルゴリズムは非常に複雑なものになる。とくに簡単な場合に応用した例は、A. Lax [8], P. C. Chou [9] などにみられる。

次の方法は、微分方程式を適当に差分化し、どこで S 波が生じるかとか、 $R-H$ 条件などを考慮せず、一挙に通し計算をやろうというものである。もちろん S 波の発生しているところでは、それを正しくとらえなければならぬので差分化に特別の工夫が必要である。 S 波のような不連続解を何の粗工もしない差分法で解くと、その不連続が解に振動を与える原因となり、続いて振動が *Overflow* にまで発展してしまふ。そこで、もとの方程式をそのまま取り扱うのではなく、いくぶん S 波を滑らかにするような散逸項を導入してできた方程式を解いてやろうというものである。この方法に沿ったのが、Von Neumann

and Richtmyer [6], Lax [2], Lax and Wendroff [3] などである。

もう一つの方法は、上述の両方法を総合したともいえるもので、各格子点ごとで不連続の崩壊を計算していく。それは Godunov [4] に代表される。(K. F. Kuropatenko [5] もみよ)

以下では、まず Lagrange 形式に表わした微分方程式に対する、113113 な差分法かという形の散逸項をもって113113 かをみておく。続いて Euler 形式の方程式に対する差分法をあげ、それらを用いて Riemann 問題を解いた数値実験を報告する。

§2. Von Neumann と Richtmyer の方法 粘性も熱伝導もない圧縮性流体の一次元モデルを Lagrange 形式に表現すれば、次のようになる。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_t &= -p_x \\ V_t &= u_x \\ E_t &= -(pu)_x \end{aligned}$$

ここに V は比体積 ($= \frac{1}{\rho}$, ρ : 密度), u は流速, p は圧力, E は単位質量あたりの全エネルギー ($= e + \frac{1}{2} u^2$, e : 単位質量あたりの内部エネルギー) である。そして状態方程式を $p = f(V, e)$ と表わす。とくにポリトロピックガスでは

$$(2.2) \quad p = (\gamma - 1) \frac{e}{V} \quad (\gamma: \text{断熱比}).$$

§1 で述べたように、(2.1), (2.2) を解くのに、直接差分化せず、まず適当な散逸項を導入する。そのために、物理的な粘性や熱伝導のある場合の性質をみておこう。この場合、方程式は (2.1) の代りに

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_t &= -\left(p - \frac{\mu}{V} u_x\right)_x \\ V_t &= u_x \\ E_t &= -\left[\left(p - \frac{\mu}{V} u_x\right) u\right]_x + \lambda \left(\frac{1}{V} T_x\right)_x \end{aligned}$$

となる。よく知られているように、熱伝導があるとき、温度はS波域にわたって滑らかに変化するが、圧力や密度については、もしS波の強さがある限界値より小さいときには滑らかだが、強いS波になると遷移は一部滑らかだが一部不連続な跳びになる。一方、粘性があるときにはどんな強さのS波でもすべての量はS波域を通じて滑らかに変化する。そして、いずれの場合にも遷移域の中は散逸項の係数に比例する。さらに遷移域の中はS波の強さとともに変化し、非常に強いS波では0に近づき、非常に弱いものでは無限大になる。ところが(2.1)の不連続解を求めようというとき、どんな強さのS波についても、その中でせいぜい(3~4) Δx になることが望ましい。だから(2.3)に現れているような散逸項では好ましくない。G. Ludford, H. Polachek and R. J. Seeger [13]は(2.3)の形の粘性項を用いて数値計算してみたが、望ましい解を得ようとすると、粘性項の係数として実際の値よりはるかに大きなものを用いなければならぬし、しかもそうすると不連続解も大きくなり、2つを報告している。非現実的な散逸項を導入するなら、人為的であってもうけしめたものを導入した方がよいであろう。熱伝導に似たものか、粘性に似たものか、どちらかを導入するとすれば、上述のことからすべての変数を滑らかにする粘性のようなものの方が良いだろう。そこで Von Neumann と Richtmyer は人為的な粘性として2次の項を導入した。これは弱いS波には小さい粘性係数を用い、強いものには大きな粘性係数を用いることにあたっている。すなわち(2.1)の代りに

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & u_t = -(p+q)x \\
 & V_t = u_x \\
 & E_t = -[(p+q)u]_x
 \end{aligned}$$

$$q = \begin{cases} \frac{l^2}{V} (u_x)^2 & \text{if } u_x < 0 \\ 0 & \text{if } u_x \geq 0 \end{cases}$$

を用いるのである。 l は長さの次元をもつ定数である。

定常なS波の形をみるために、S波の速度を s とし、境界条件を $V \rightarrow V_R$, $u \rightarrow u_R$, $p \rightarrow p_R$, $c \rightarrow c_R$ ($x \rightarrow +\infty$), $V \rightarrow V_L$, $u \rightarrow u_L$, $p \rightarrow p_L$, $c \rightarrow c_L$ ($x \rightarrow -\infty$) とすれば定常解のみたすべき常微分方程式は、例えば V について

$$(2.5) \quad l^2 \left(\frac{dV}{dw} \right)^2 = \frac{\delta+1}{2} (V_R - V)(V - V_L)$$

となる。ただし $w = x - st$ とおいた。この方程式の導出は省略するが、同様なことを Euler の方程式に対して行うので、それを参照されたい。(2.5) を解けば

$$(2.6) \quad V = \begin{cases} \frac{V_R + V_L}{2} + \frac{V_R - V_L}{2} \sin \sqrt{\frac{\delta+1}{2}} \frac{x-st}{l} & \text{for } |x-st| \leq \frac{\sqrt{2} \pi l}{\sqrt{\delta+1} \cdot 2} \\ V_L & \text{for } x-st \leq -\frac{\sqrt{2} \pi l}{\sqrt{\delta+1} \cdot 2} \\ V_R & \text{for } x-st \geq \frac{\sqrt{2} \pi l}{\sqrt{\delta+1} \cdot 2} \end{cases}$$

すなわち遷移域の中のS波の強さに関係なく $\sqrt{\frac{2}{\delta+1}} \pi l$ に等しくなる。いま $l = d \Delta x$ とおけば、遷移域の中が Δx のオーダーになり、望むところのものがある。

また、(2.8)の定常なS波は、上述の境界条件の下で Hugoniot の関係式をみたすことがわかる。実は、このことはもっと一般の方程式

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_t &= -(p+q)_x \\ V_t &= (u+v)_x \\ E_t &= -[(p+q)(u+v) + r]_x \end{aligned}$$

の解について示される。ただし、 q , v , r はそれぞれ人為的な粘性、速度、温度勾配である。そして境界条件 $q, v, r \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) をみたすものとする。

定常解のみたすべき方程式は

$$(2.8) \quad \begin{aligned} s \frac{du}{dw} &= \frac{d}{dw} (p+q) \\ -s \frac{dV}{dw} &= \frac{d}{dw} (u+v) \\ s \frac{dE}{dw} &= \frac{d}{dw} [(p+q)(u+v) + r] \end{aligned}$$

である。はじめの2式より

$$(2.9) \quad \frac{d}{dw} (p+q) + s \frac{dV}{dw} + s^2 \frac{dV}{dw} = 0$$

また, (2.8) の3式と $E = e + \frac{1}{2} u^2$ より

$$\frac{de}{dw} + (p+q) \frac{dV}{dw} - v \frac{du}{dw} = \frac{1}{s} \frac{dr}{dw}$$

(2.9) 式に V をかけると, この式に加えると

$$(2.10) \quad \frac{de}{dw} + \frac{d}{dw} (p+q) V + s^2 V \frac{dV}{dw} - \frac{d}{dw} u v + (sV + u + v) \frac{dv}{dw} - v \frac{dv}{dw} - \frac{1}{s} \frac{dr}{dw} = 0$$

(2.8) の第2式, (2.9) 式, (2.10) 式を積分すれば

$$sV + u + v = C_1$$

$$(2.11) \quad p + q + sV + s^2 V = C_2$$

$$e + (p+q)V + \frac{1}{2} s^2 V^2 - uv - \frac{1}{2} v^2 + C_1 v - \frac{1}{s} r = C_3$$

C_1, C_2, C_3 は積分定数である。境界条件を用いると, (2.11) の第2式より

$$(2.12) \quad s^2 (V_R - V_L) = p_L - p_R$$

(2.11) の第3式と (2.12) 式より

$$(2.13) \quad e_L - e_R = \frac{1}{2} (p_R + p_L) (V_R - V_L)$$

をうる。(2.12) と (2.13) が Hugoniot の関係式であって, 大域的な保存則を示している。特に (2.12) をみればわかるように, S波の速度 s が境界条件だけから決まり, しかも散逸項を入れたない系のS波の速度と正に一致する結局, 散逸項を (2.7) の形に入れると都合よいことがわかった。

特に, (2.4) を安定性の考慮の下に, 適当に差分化すれば計算用の差分法が得られる。([1], [6] をみよ)

§3. Friedrichs と Lax の方三法 Von Neumann と Richtmyer は粘性項は非線形でなければならぬと考えたが、それに抗して、線形の散逸項でもいけるとして提案されたのが、Friedrichs - Lax の差分法である。それは、時間微分を、例えば

$$u_t \rightarrow \frac{u(t+\Delta t, x) - \frac{1}{2}[u(t, x+\Delta x) + u(t, x-\Delta x)]}{\Delta t}$$

$$\equiv \frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

と置き、空間微分を普通の中心差分で置き換えるものである。この差分法は、散逸的な微分方程式

$$u_t = -(p - \mu u_x)_x$$

$$V_t = (u + \mu V_x)_x$$

$$E_t = -\left[(p - \mu u_x)(u + \mu V_x) + \frac{a^2}{p_v} e_x - \frac{p}{p_v} p_x\right]_x$$

$$\mu = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$$

を考へることに相当してゐる。二二二 $a = \sqrt{p p_e - p_v}$ は Lagrange の音速である。この系も (2.7) の形をしてゐるから、前節の考察から定常な S 波に対して Hugoniot の関係式が成り立ち、したがって S 波の速度も正しくとらえられるものと考えられる。この差分法の時間微分のとり方によつて、どんな滑らかな初期値も直線に変えてしまうという傾向があり、解をきわめてなだらかにものにしてみよう。だから、非常に強い S 波の場合に S 波域の中が狭くなつて不連続に近づき計算が耐えられなくなるといふ前述の懸念は取り去られる。しかし、非常に弱い S 波では中が広かつてくることが避けられない。

§4. Lax と Wendroff の方三法 これは、Friedrichs と Lax の方三法では比較的ゆるやかな変化の領域をなまりすぎる欠点をなくするために、精度のオーダーを 2 としたものである。すなわち、系 (2.1) をベクトル表示

$$(4.1) \quad w_t = f_x = A w_x \quad (A = \text{grad } f)$$

にしたとき、これに対する差分方程式を

$$(4.2) \quad w^j = w_j + \frac{\lambda}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{\lambda^2}{2} (A_{j+\frac{1}{2}}^2 (w_{j+1} - w_j) - A_{j-\frac{1}{2}}^2 (w_j - w_{j-1}))$$

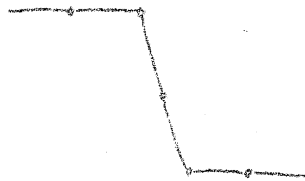
と置くものである。ただし $\lambda = \Delta t / \Delta x$, $w_j = w(t, j\Delta x)$, $w^t = w(t + t\Delta t, j\Delta x)$ などとする。あるいは、さらに高次の散逸項を導入したもの

$$(4.3) \quad w^j = w_j + \frac{\lambda}{2} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{\lambda^2}{2} (A_{j+\frac{1}{2}}^2 (w_{j+1} - w_j) - A_{j-\frac{1}{2}}^2 (w_j - w_{j-1})) \\ + \frac{\lambda}{2} (Q_{j+\frac{1}{2}} (w_{j+1} - w_j) - Q_{j-\frac{1}{2}} (w_j - w_{j-1}))$$

を考へる。ここで Q は

$$(4.4) \quad Q_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} B_{j+\frac{1}{2}} \frac{|a_{j+1} - a_j|}{a_{j+\frac{1}{2}}^2} A_{j+\frac{1}{2}}^2$$

B は無次元量である。 Q をこのようにおくと、 $B \approx 1.0$ のとき (4.3) は 近似的に



の形の静止した S 波を解にもつことがわかる。([3] をみよ)

(4.3) に対応する散逸的な方程式は、やはり (2.7) の形をしており、丁度

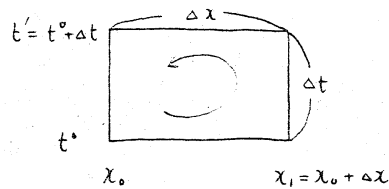
$$(4.5) \quad q = -\mu a^2 u_x, \quad v = -\mu p_x, \quad r = 0, \quad \mu = \frac{\Delta t}{2} + \frac{B \Delta x^2}{4 a^2} |a_x|$$

とみたものになっている。

§.5 Godunov の方法 方程式 (2.1) の一般化された解は、任意の積分路について関係式

$$(5.1) \quad \oint u dx - p dt = 0 \\ \oint V dx + u dt = 0 \\ \oint E dx - p u dt = 0$$

をみたすものとして定義される。一つの網の目を考へる：



この網の目の周囲に沿って (5.1) の第1式の積分を行えば

$$(5.2) \quad \int_{x_0}^{x_1} u'(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} u^0(x) dx + \int_{t_0}^{t_1} p_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} p_0(t) dt = 0$$

ここで $u'(x) = u(t', x)$, $u^0(x) = u(t^0, x)$, $p_1(t) = p(t, x_1)$, $p_0(t) = p(t, x_0)$. (5.2) 式に積分の平均値の定理を用いて全体を $\Delta x \Delta t$ で割れば

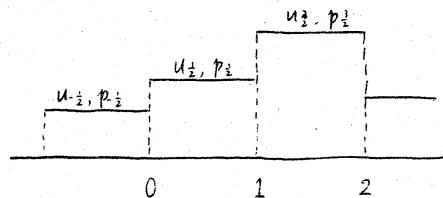
$$(5.3) \quad \frac{u'_{\frac{1}{2}} - u^0_{\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{p_1 - p_0}{\Delta x} = 0$$

ただし, $u'_{\frac{1}{2}}$, $u^0_{\frac{1}{2}}$ はそれぞれ $u'(x)$ と $u^0(x)$ の区間 $[x_0, x_1]$ における中間値である. p_1 と p_0 はそれぞれ, $p_1(t)$ と $p_0(t)$ の区間 $[t^0, t']$ における中間値である. (5.1) のあとの2式についても同様な考察をすれば次の方程式をうる.

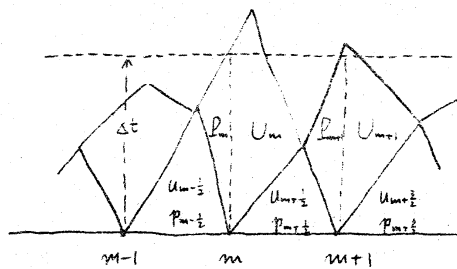
$$(5.3) \quad \frac{V'_{\frac{1}{2}} - V^0_{\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{U_1 - U_0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{E'_{\frac{1}{2}} - E^0_{\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{(PU)_1 - (PU)_0}{\Delta x} = 0$$

ここに得られた3式は任意の網目について (5.1) 式を正しく表現しているものである. (5.3) 式を真似て差分方程式を作るには次のように考える. 初期値が網目ごとの階段状



であると考えれば整数点で不連続の崩壊があるが, それと網の目とを下図のように対応させる.



(5.3) 式に現れている中間値 u^0, v^0, E^0 はそれぞれ初期値の u, v, E であり、 P と U は不連続の崩壊で生じたものを用いると、それらはある時間 Δt の間一定ながら厳密に中間値になっている。こうして (5.3) により計算される u', v', E' を網の上底の値とする。 Δt 時間経たあとでは整数点と整数点の間にある気体はもはや一定の状態ではない。いま求めた計算値は層内での平均の値というだけであり、ある精度をもって真の分布値を近似するものである。この計算過程は次の差分法にまとめられる。

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad u^{j+1/2} &= u_{j+1/2} - \lambda (P_{j+1} - P_j) \\
 v^{j+1/2} &= v_{j+1/2} + \lambda (U_{j+1} - U_j) \\
 E^{j+1/2} &= E_{j+1/2} + \frac{1}{2} (u_{j+1/2}^2) - \frac{1}{2} (u_{j-1/2}^2) - \lambda (P_{j+1} U_{j+1} - P_j U_j)
 \end{aligned}$$

問題は不連続の崩壊により、 P と U の求め方である。これは流体力学の方でよく知られていることだが、初期状態により、 S 波が発生したり、脂腫波が発生したりする、そして波の伝搬速度と P, U は非線形の関係式と結びついて、それを用いて解くには、逐次計算を含んだ複雑な計算を行わなければならない。ここでは波が弱不連続として伝わるもの、すなわち音波として伝わるものとする。このとき不連続の崩壊の公式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad a_j &= \sqrt{\gamma \frac{P_{j-1/2} + P_{j+1/2}}{2} \frac{P_{j-1/2} + P_{j+1/2}}{2}} \\
 P_j &= \frac{P_{j+1/2} + P_{j-1/2}}{2} - a_j \frac{U_{j+1/2} - U_{j-1/2}}{2} \\
 U_j &= \frac{U_{j+1/2} + U_{j-1/2}}{2} - \frac{P_{j+1/2} - P_{j-1/2}}{2a_j}
 \end{aligned}$$

系(5.5)に対応する散逸的な微分方程式も同じく(2.7)の形をしていて、散逸項

$$(5.6) \quad q = -\mu a^2 u_x, \quad v = -\mu p_x, \quad r = 0, \quad \mu = \frac{\Delta x}{2a}$$

をもっている。これは Lax と Wendroff の方法のものと非常によく似ていて μ の値だけ間違っていることがわかる。

上の差分法のもう一つの意味をみるために、上の議論を線形化すると、線形化微分方程式 ($p_x = -a^2 v_x$ と(2))

$$(5.7) \quad \begin{aligned} u_t &= -a^2 v_x \\ v_t &= u_x \end{aligned}$$

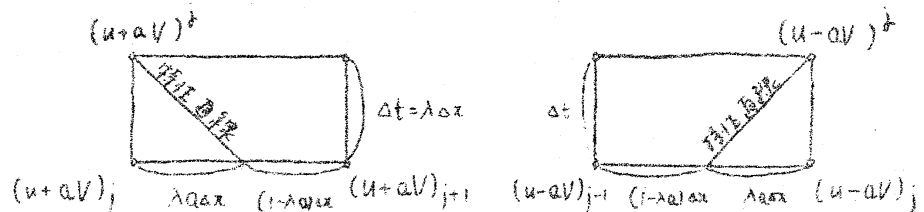
に差分方程式

$$\begin{aligned} u^j &= u_j - \lambda \left[\left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} - a \frac{u_{j+1} - u_j}{2} \right) - \left(\frac{p_j + p_{j-1}}{2} - a \frac{u_j - u_{j-1}}{2} \right) \right] \\ v^j &= v_j + \lambda \left[\left(\frac{u_{j+1} + u_j}{2} - \frac{p_{j+1} - p_j}{2a} \right) - \left(\frac{u_j + u_{j-1}}{2} - \frac{p_j - p_{j-1}}{2a} \right) \right] \end{aligned}$$

に対応させることにあたっている。この系は書き直せば

$$(5.8) \quad \begin{aligned} (u + aV)^j &= \lambda a (u + aV)_{j+1} + (1 - \lambda a) (u + aV)_j \\ (u - aV)^j &= (1 - \lambda a) (u - aV)_j + \lambda a (u - aV)_{j-1} \end{aligned}$$

となる。この式の意味するところは下図より明らかであろう ($\lambda a < 1$ のとき)



しかも $\lambda a < 1$ のとき (5.8) 式 はそれぞれ $u + aV$, $u - aV$ について単調な初期値を単調な解にうつす方程式である。実際、一般の定数係数の方程式

$$u^j = \sum_n a_{n-j} u_n$$

がどのような単調な初期値も同じ向きに単調な解にうつちための必要十分条件は、すべての係数 a_n が非負であることである (Godunov [47])。もとの微分方程式 (5.7) の解も上のような単調性をもつことは明らかだから、その意味でも上の差分法が自然なものであることがわかる。実は Godunov は逆に、系 (5.7) に対し単調性をもつ一般化する点差分法を構成することからはじめ、そうしてできた差分法の物理的意味づけとして不連続の崩壊という考えを入れそれを非線形の問題にも適用したのである。

線形化方程式では、不連続は音速 a を伝って λ の時間 Δt の後でも U , P の値が一定であるためには $\Delta t < \frac{\Delta x}{a}$ であることが必要である。これは Courant, Friedrichs と Lewy の条件 (C.F.L. 条件) とおなじみのもので外ならない。

比較のために、系 (5.7) に対する Lax-Wendroff の差分法を書いておくと

$$\begin{aligned} u^k &= u_j - \lambda \left[\left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} - \lambda a^2 \frac{u_{j+1} - u_j}{2} \right) - \left(\frac{p_j + p_{j-1}}{2} - \lambda a^2 \frac{u_j - u_{j-1}}{2} \right) \right] \\ V^k &= V_j + \lambda \left[\left(\frac{u_{j+1} + u_j}{2} - \lambda \frac{p_{j+1} - p_j}{2} \right) - \left(\frac{u_j + u_{j-1}}{2} - \lambda \frac{p_j - p_{j-1}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。これは $\lambda a = 1$ のとき Godunov の差分法と一致することからわかる。

§ 6. Euler の方程式に対する差分法 Euler 形式に表わした流体方程式

$$p_t + (pu)_x = 0$$

$$(6.1) \quad (pu)_t + (p + pu^2)_x = 0$$

$$\left[p \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right]_t + \left[pu \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{p} \right) \right]_x = 0$$

に対し差分法をあけておこう

(i) Von Neumann と Richtmyer の差分法 やはり、散逸的な微分方程式

$$f_t + (fu)_x = 0$$

$$(fu)_t + (p+q+fu^2)_x = 0$$

$$(6.2) \quad \left[f \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right]_t + \left[fu \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + (p+q)u \right]_x = 0$$

$$q = \begin{cases} \ell^2 f u_x^2 & \text{for } u_x < 0 \\ 0 & \text{for } u_x \geq 0 \end{cases}$$

を考へる。このときも定常なS波の形は方程式(2.5)で与えられることを示そう。

定常なS波の速度を s とし、 $u-s=v$ とみれば(6.2)から

$$fv = f$$

$$(6.3) \quad p + q + fv^2 = \alpha$$

$$fv e + \frac{1}{2} fu^2 v + (p+q)u = \beta$$

ここで、 f, α, β は定数である。(6.3)の第1式は $v = fV$ と置き換へるから、

これを第2式に用いれば

$$(6.4) \quad p + q + f^2 V = \alpha$$

同じく第3式に用いれば

$$(6.5) \quad e + \frac{1}{2} f^2 V^2 + (p+q)V = \beta' \quad (\text{定数})$$

である。(6.4)式に V をかけたものを(6.5)から差し引くと

$$e - \frac{1}{2} f^2 V^2 = \beta' - \alpha V$$

$$(6.6) \quad e = \frac{pV}{\gamma-1} \quad \text{を用いると}$$

$$pV = \frac{1}{2} (\gamma-1) f^2 V^2 + (\gamma-1) (\beta' - \alpha V)$$

これを(6.4)に用いると

$$qV = -\frac{1}{2} (\gamma+1) f^2 V^2 + \alpha \gamma V - (\gamma-1) \beta'$$

$$q \rightarrow 0 \quad (\gamma \rightarrow \pm \infty \quad \text{i.e.} \quad V \rightarrow \left\{ \begin{matrix} V_R \\ V_L \end{matrix} \right\} \text{より})$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma+1) f^2 (V_R - V)(V - V_L)$$

であることがわかる。これより定常なS波について $q = \frac{\ell^2}{V} f^2 \left(\frac{dV}{dx} \right)^2$ となる

方程式 (2.5) をうる。

(6.2) に対して次のような差分法を用いる。(W. F. Noh [10] 参照)

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}^n &= p_{j+\frac{1}{2}}^n + q_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
 m_j^{n+\frac{1}{2}} &= m_j^{n-\frac{1}{2}} - \lambda (m_j^{n-\frac{1}{2}} u_j^{n-\frac{1}{2}} - m_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{p}_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
 p_j^{n+\frac{1}{2}} &= p_j^{n-\frac{1}{2}} - \lambda (p_j^{n-\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) \\
 u_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{m_j^{n+\frac{1}{2}}}{p_j^{n+\frac{1}{2}}} \\
 p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= p_{j+\frac{1}{2}}^n - \lambda (p_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}^n u_j^{n+\frac{1}{2}}) \\
 (6.6) \quad q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= a^2 \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \cdot \begin{cases} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}})^2 & \text{if } u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}} < 0 \\ 0 & \text{if } u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}} \geq 0 \end{cases} \\
 E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= E_{j+\frac{1}{2}}^n - \lambda \left\{ E_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_{j-\frac{1}{2}}^n u_j^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\bar{p}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\bar{p}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{p}_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} u_j^{n+\frac{1}{2}} \right\} \\
 e_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \left[E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{4} [(u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^2 + (u_j^{n+\frac{1}{2}})^2] \cdot p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right] / p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \\
 p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= (\gamma - 1) p_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \cdot e_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}
 \end{aligned}$$

第7式に現れ2いる量 $\bar{p}^{n+\frac{1}{2}}$ は、それに続く式について1回逐次計算を行、てきめるものとする。ただし、はじめの $\bar{p}^{n+\frac{1}{2}}$ として $\bar{p}^n = p^n + q^{n-\frac{1}{2}}$ を用いる。1回の逐次計算で得た結果を $\tilde{p}^{n+1}$ とすれば、結局 $\bar{p}^{n+\frac{1}{2}}$ として

$$\frac{\tilde{p}^{n+1} + q^{n+\frac{1}{2}} + p^n + q^{n-\frac{1}{2}}}{2}$$

をとる。

上式で $m = \rho u$ であり、 E は Lagrange 形式のとる32便、たものとは異なり、単位体積あたりの全エネルギーとみる ($= \rho(e + \frac{1}{2}u^2)$)

線形化理論によると、この差分法の Von Neumann の安定性条件は

$$(6.7) \quad \lambda(|u| + c) \leq \frac{\sqrt{\delta}}{2a}, \quad (c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \text{ 音速})$$

(ii) Friedrichs - Lax の差分法

$$\begin{aligned}
 \rho^j &= \frac{1}{2} (\rho_{j+1} + \rho_{j-1}) - \frac{\Delta}{2} (\rho_{j+1} u_{j+1} - \rho_{j-1} u_{j-1}) \\
 m^j &= \frac{1}{2} (m_{j+1} + m_{j-1}) - \frac{\Delta}{2} (\rho_{j+1} + m_{j+1} u_{j+1} - \rho_{j-1} - m_{j-1} u_{j-1}) \\
 E^j &= \frac{1}{2} (E_{j+1} + E_{j-1}) - \frac{\Delta}{2} (E_{j+1} u_{j+1} + \rho_{j+1} u_{j+1} - E_{j-1} u_{j-1} - \rho_{j-1} u_{j-1}) \\
 u^j &= m^j / \rho^j, \quad p^j = (\delta - 1) (E^j - \frac{1}{2} m^j u^j)
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

この場合, Von Neumann の安定性条件は C.F.L 条件と一致し

$$\lambda (|u| + c) \leq 1 \tag{6.9}$$

と与えられる。

(iii) Lax - Wendroff の差分法 方程式は (4.3) と同じ形で与えられるがベクトル w , f および行列 A , Q とした次のものを用いる。

$$\begin{aligned}
 w &= \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} -m \\ -(\delta-1)E + \frac{\delta-3}{2} m u \\ -\delta E u + \frac{\delta-1}{2} m u^2 \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\delta-3}{2} u^2 & (\delta-3)u & -(\delta-1) \\ \delta u T - (\delta-1)u^3 & \frac{3}{2}(\delta-1)u^2 - \delta T & -\delta u \end{bmatrix}, \quad T = \frac{E}{\rho} \\
 A^2 &= \begin{bmatrix} \frac{\delta-3}{2} u^2 & -(\delta-3)u & \delta-1 \\ \frac{\delta^2+2\delta-7}{2} u^3 - \delta(\delta-1)uT & -\frac{\delta^2+5\delta-12}{2} u^2 + \delta(\delta-1)T & 3(\delta-1)u \\ \frac{\delta^2+8\delta-9}{4} u^4 - \frac{\delta^2+3\delta}{2} u^2 T & -\frac{7}{2}(\delta-1)u^3 + 2\delta u T & -\frac{\delta^2-\delta\gamma+3}{2} u^2 + \delta(\delta-1)T \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

$$Q_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{2} \left[g_0(w_{j+1}, w_j) + g_1(w_{j+1}, w_j) \frac{A_{j+1} + A_j}{2} + g_2(w_{j+1}, w_j) \frac{A_{j+1}^2 + A_j^2}{2} \right]$$

== 2 ==

$$g_0(w_{j+1}, w_j) = \left[1 - \left(\frac{M_{j+1} + M_j}{2} \right)^2 \right] \alpha + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_{j+1} + M_j}{2} \right)^2 + \frac{M_{j+1} + M_j}{2} \right] \beta + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_{j+1} + M_j}{2} \right)^2 - \frac{M_{j+1} + M_j}{2} \right] \gamma$$

$$g_1(w_{j+1}, w_j) = -2 \frac{M_{j+1} + M_j}{C_{j+1} + C_j} \alpha + \frac{M_{j+1} + M_j + 1}{C_{j+1} + C_j} \beta + \frac{M_{j+1} + M_j - 1}{C_{j+1} + C_j} \gamma$$

$$g_2(w_{j+1}, w_j) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{C_{j+1} + C_j}{2} \right)^2} (\beta + \gamma - 2\alpha)$$

$$M_j = \frac{u_j}{c_j} \quad (\text{マッハ数}) \quad , \quad c_j = \sqrt{\frac{\gamma p_j}{\rho_j}} \quad (\text{音速})$$

$$\alpha = |u_{j+1} - u_j|, \quad \beta = |u_{j+1} - c_{j+1} - u_j + c_j|, \quad \gamma = |u_{j+1} + c_{j+1} - u_j - c_j|$$

この差分法では, Von Neumann の条件は

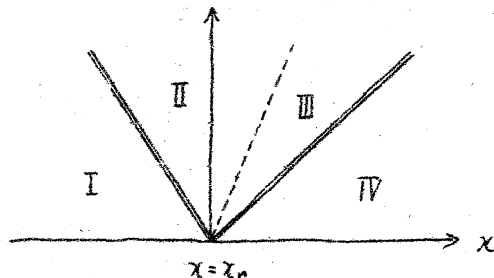
$$(6.11) \quad \lambda(|u| + c) \leq \left(1 + \frac{1}{16} B^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} B$$

と与えられるが, これは C.F.L 条件より少し厳しい条件である。

(iv) Godunov の差分法 Lagrange 座標 x_L と Euler 座標 x_E の間の関係が $dx_E = u dx + \frac{1}{\rho} dx_L$ であることに注意すれば, 3つの波は次のような速さをもつて伝わる。

$$D_L = u - \frac{a}{\rho}, \quad u, \quad D_R = u + \frac{a}{\rho}$$

a は Lagrange の音速である。波は (x, t) 平面を4つの領域に分ける。



領域 I では, すべての値は $x - \frac{1}{2}$ 点におけるはじめの値に等しい。領域 IV では $x + \frac{1}{2}$ 点におけるはじめの値と等しい。領域 II と III における圧力は接触不連続

線における圧力 P に等しく、速度 u は接触不連続の速度 U に等しい。領域 II と III では異った密度をもち、その計算には次のような近似公式を用いる。

$$p_{II} = \frac{(\gamma+1)P + (\gamma-1)p_{n-\frac{1}{2}}}{(\gamma-1)P + (\gamma+1)p_{n-\frac{1}{2}}} \cdot p_{n-\frac{1}{2}}$$

$$p_{III} = \frac{(\gamma+1)P + (\gamma-1)p_{n+\frac{1}{2}}}{(\gamma-1)P + (\gamma+1)p_{n+\frac{1}{2}}} \cdot p_{n+\frac{1}{2}}$$

膨脹波のときは、Poisson の断熱曲線を用いなければならぬが、その代りに Hugoniot の関係を用いた。これは弱不連続のときには許される。不連続の崩壊を近似計算で求めたあと、直線 $x=x_n$ が領域 I, II, III, IV のどの領域に現れるかをみて次の差分方程式に現れた大文字の量 U, P, R, E として対応する領域のものを用いる。

$$p^{j+\frac{1}{2}} = p_{j+\frac{1}{2}} - \lambda \{ (RU)_{j+1} - (RU)_j \}$$

$$(pu)^{j+\frac{1}{2}} = (pu)_{j+\frac{1}{2}} - \lambda \{ (P+RU^2)_{j+1} - (P+RU^2)_j \}$$

$$\left[p \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right]^{j+\frac{1}{2}} = \left[p \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{j+\frac{1}{2}} - \lambda \left\{ \left[RU \left(e + \frac{P}{R} + \frac{U^2}{2} \right) \right]_{j+1} - \left[RU \left(e + \frac{P}{R} + \frac{U^2}{2} \right) \right]_j \right\}$$

不連続の崩壊の計算式を列挙しておく。

$$a_j = \sqrt{\gamma \frac{p_{j+\frac{1}{2}} + p_{j-\frac{1}{2}}}{2} \frac{p_{j+\frac{1}{2}} + p_{j-\frac{1}{2}}}{2}}$$

$$p_j = \frac{p_{j+\frac{1}{2}} + p_{j-\frac{1}{2}}}{2} - a_j \frac{u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$u_j = \frac{u_{j+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}}{2a_j}$$

$$p_j^L = \frac{(\gamma+1)p_j + (\gamma-1)p_{j-\frac{1}{2}}}{(\gamma-1)p_j + (\gamma+1)p_{j-\frac{1}{2}}} \cdot p_{j-\frac{1}{2}}$$

$$p_j^R = \frac{(\gamma+1)p_j + (\gamma-1)p_{j+\frac{1}{2}}}{(\gamma-1)p_j + (\gamma+1)p_{j+\frac{1}{2}}} p_{j+\frac{1}{2}}$$

$$D_j^L = u_{j-\frac{1}{2}} - \frac{a_j}{p_{j-\frac{1}{2}}}$$

$$D_j^R = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{a_j}{p_{j+\frac{1}{2}}}$$

大文字の量 U, P, R のきめ方をまとめたところ。4つの場合が考えられる。

1) $D_j^L, D_j^R > 0$ このとき境界 $x = x_n$ は領域 I に入る。したがって

$$U_j = u_{j-\frac{1}{2}}, \quad P_j = p_{j-\frac{1}{2}}, \quad R_j = p_{j-\frac{1}{2}}$$

2) $D_j^L, D_j^R < 0$ $x = x_n$ は領域 IV にある

$$U_j = u_{j+\frac{1}{2}}, \quad P_j = p_{j+\frac{1}{2}}, \quad R_j = p_{j+\frac{1}{2}}$$

3) $D_j^L < 0, D_j^R > 0, u_j > 0$ $x = x_n$ は領域 II にある

$$U_j = u_j, \quad P_j = p_j, \quad R_j = p_j^L$$

4) $D_j^L < 0, D_j^R > 0, u_j < 0$ $x = x_n$ は領域 III にある

$$U_j = u_j, \quad P_j = p_j, \quad R_j = p_j^R$$

E_j は11つの場合にも状態方程式から決まる

この差分法では、安定性条件は C.F.L. 条件と一致 (6.9) を与えられる。

$$(C = \frac{a}{f})$$

§7 数値実験 Euler形式の方程式を用いて、Riemann 問題、すなわち階段状の初期条件

$$u = u^L, \quad p = p^L, \quad f = f^L \quad (x < 0)$$

$$u = u^R, \quad p = p^R, \quad f = f^R \quad (x > 0)$$

をもつコーシー問題を考える。例題として

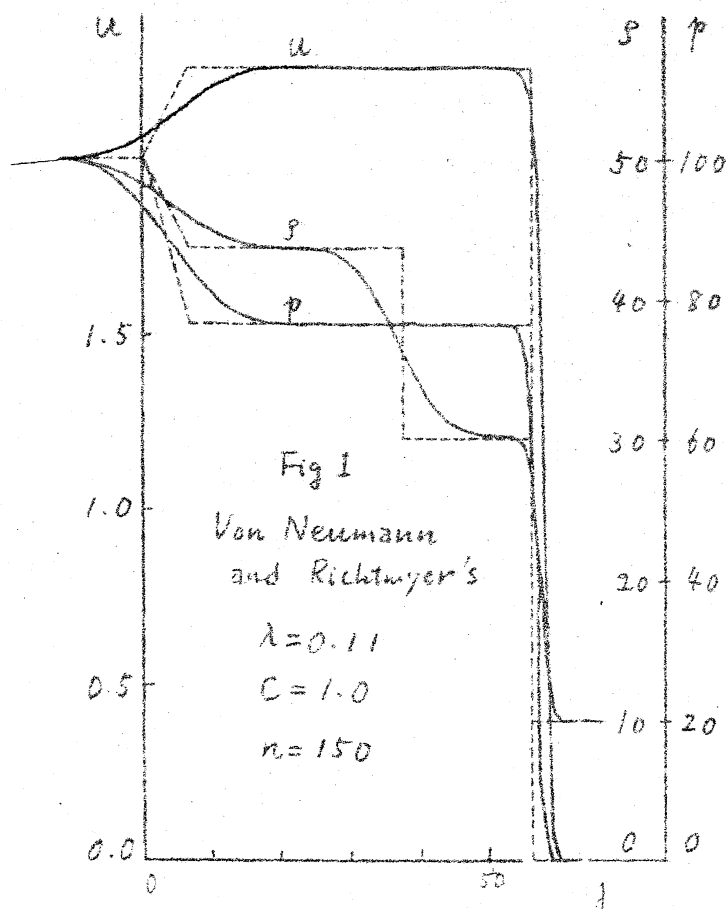
$$u^L = 2.0 \quad p^L = 100.0 \quad f^L = 50.0$$

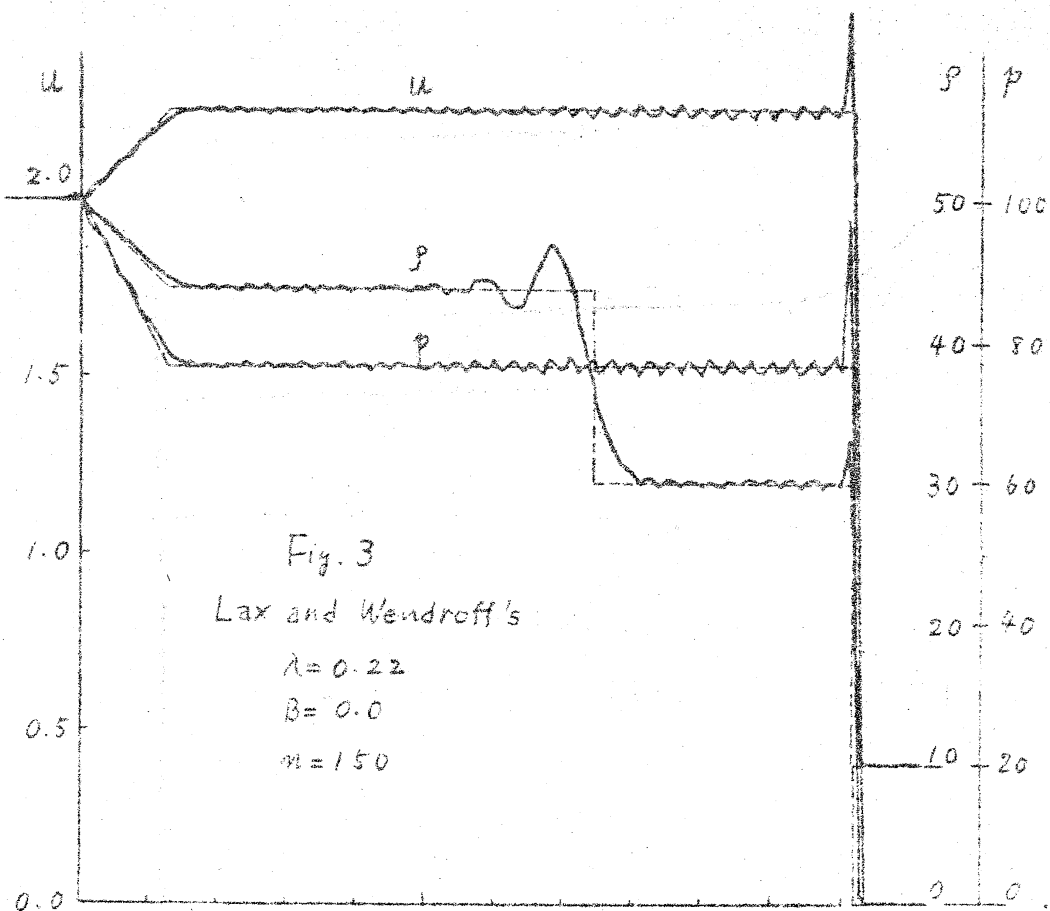
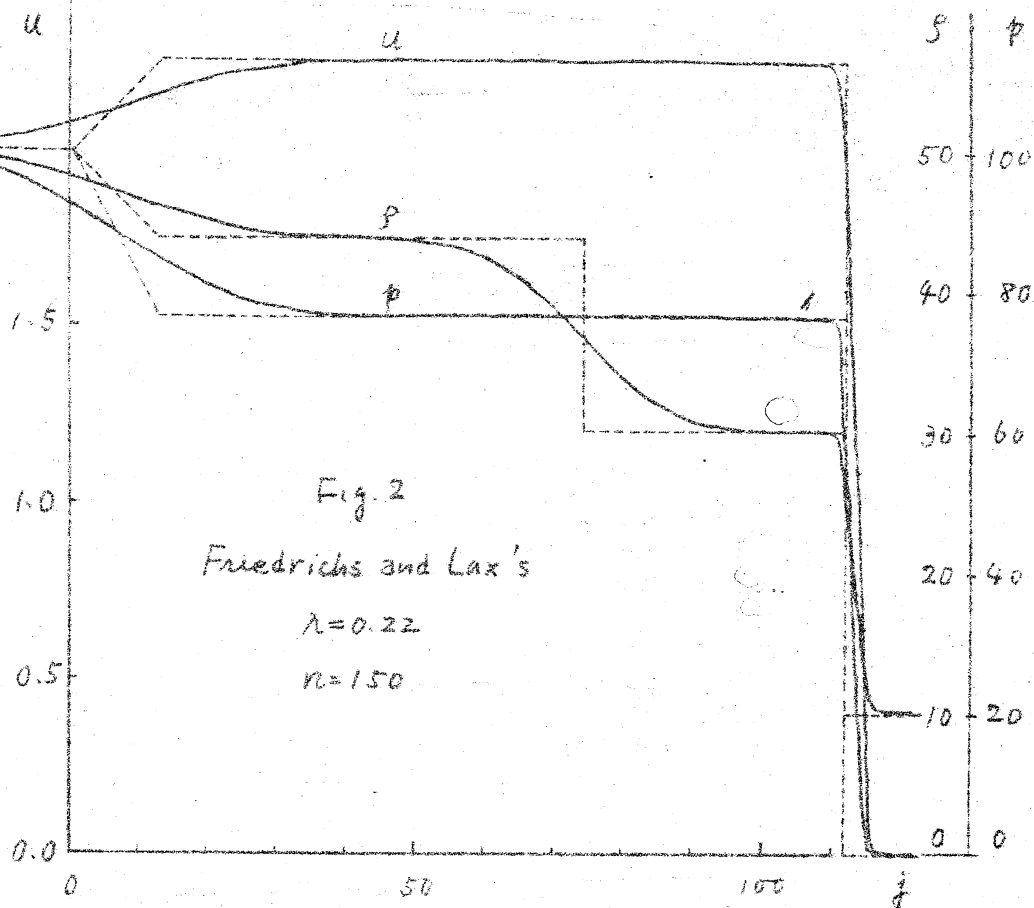
$$u^R = 0.0 \quad p^R = 0.0 \quad f^R = 10.0$$

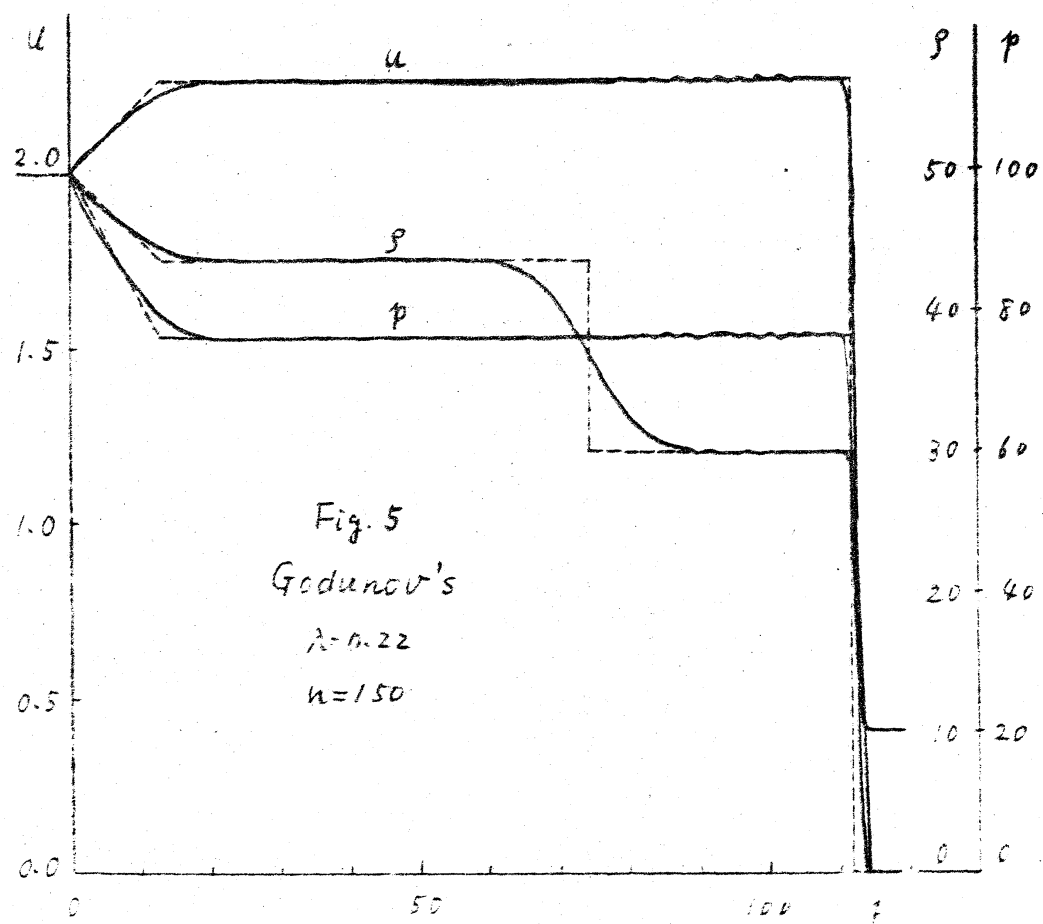
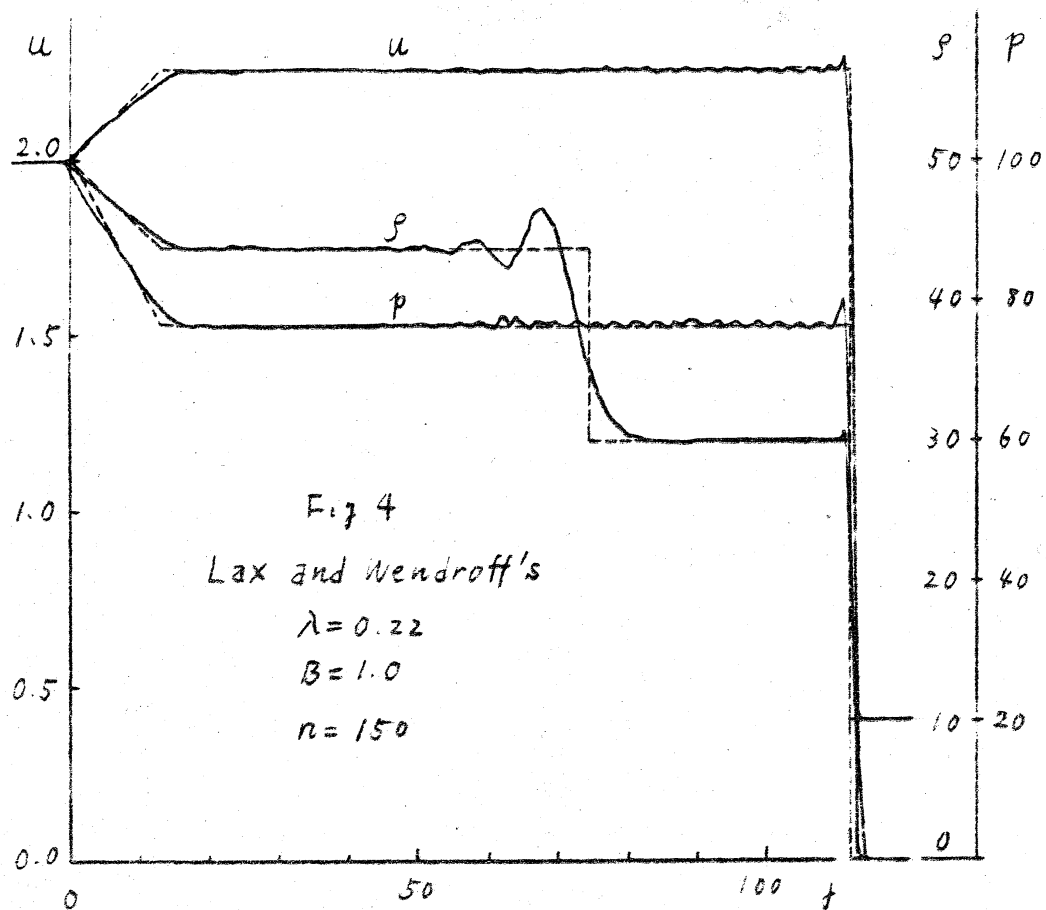
$$\delta = 2.0$$

とと、た。これに対しては解析解が求まる。その解を用いて C.F.L. 条件をゆると、 $\lambda \leq 0.22$ である。以下では Von Neumann と Richtmyer の差分法以外ではいつも $\lambda = 0.22$ として計算に成功した。Von Neumann と Richtmyer の方法では $\lambda = 0.22$ とすると不安定性が生じる。

以下の図では横軸は空間方向の格子点番号 j を示し、縦軸は u, p, ρ を表わす。実線は計算結果であり、破線は解析解を表わす。パラメータ n は時間方向の繰り返し回数を示す。







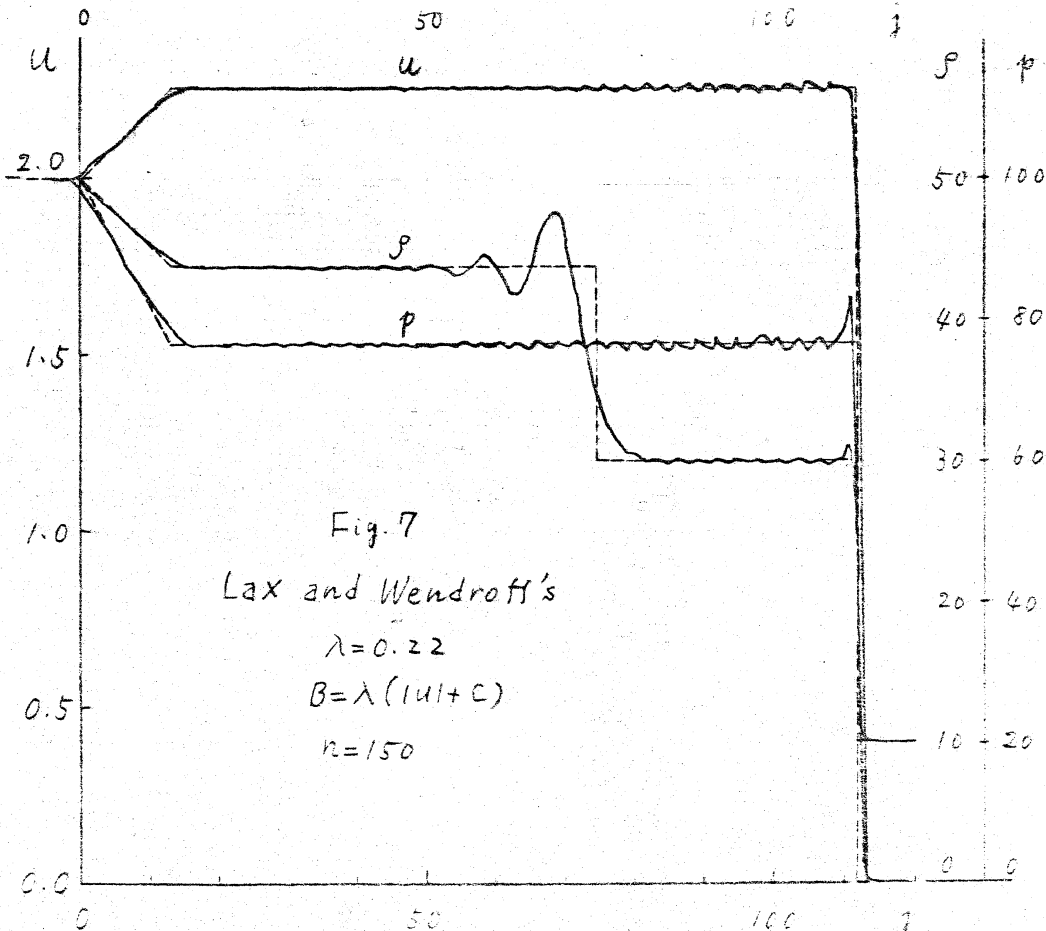
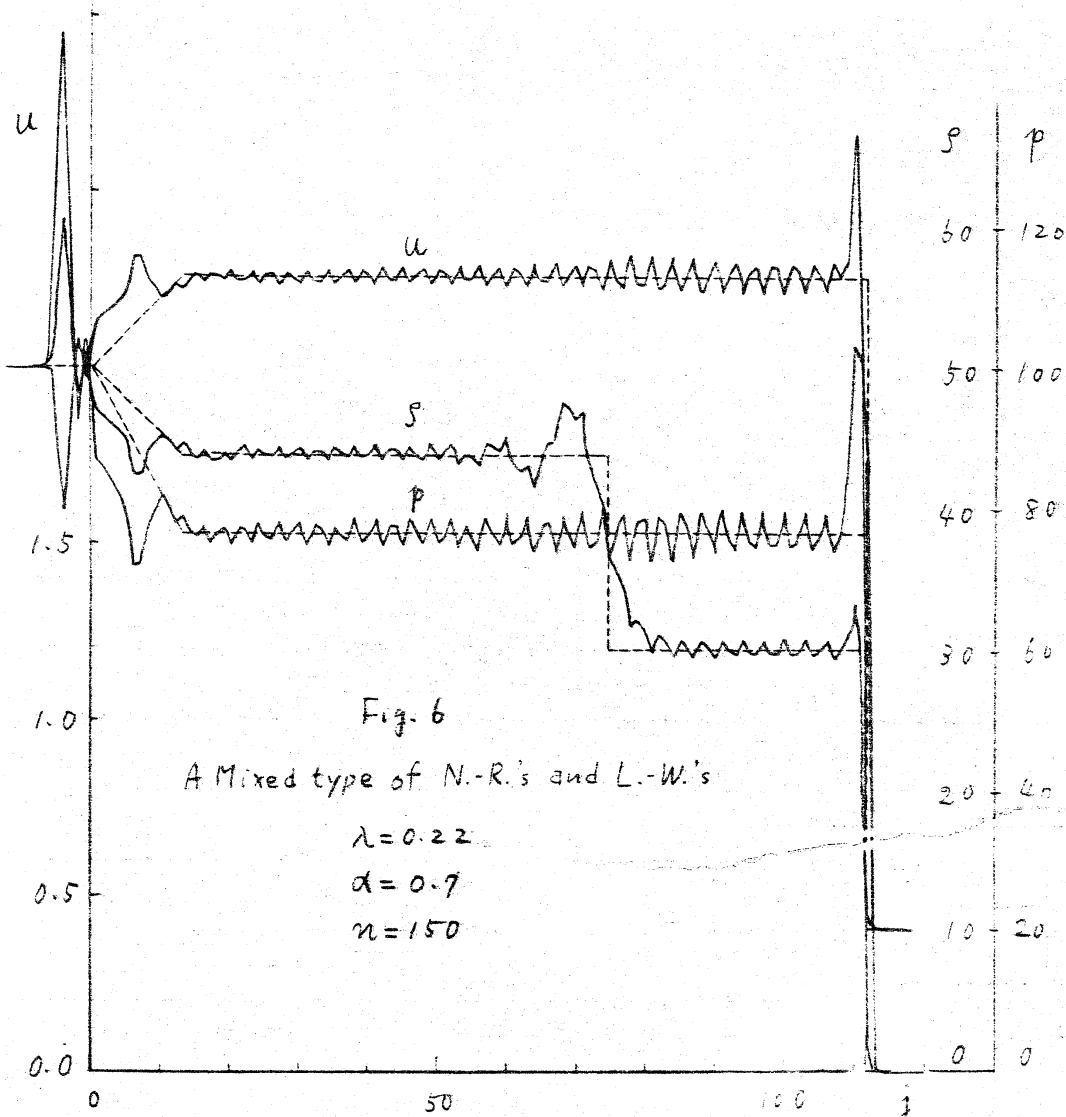


Fig. 6 は Lax-Wendroff の差分法で Q の入った項の代り, Von Neumann と Richtmyer の導入した散逸項 $\frac{\epsilon}{2} = \alpha^2 \rho u_x^2$ ($u_x < 0$), $= 0$ ($u_x \geq 0$) を用いたものである。Fig. 7 は Lax-Wendroff の差分法で Q の入った項の係数 B とし $\lambda(|u|+C)$ を用いたものである。

5つの差分法によって得た $n=150$ における ρ と p について、各格子点における厳密解との差の絶対値の和をとったもの (L_1 -誤差) を表にしておく。

	F.-L.	L.-W. $B=0$	L.-W. $B=1.0$	L.-W. $B=\lambda(u +C)$	G
ρ	205	59	74	76	97
p	320	131	116	124	111

参考のため、1格子点あたりに必要とした平均計算時間をあげておく。(単位は msec. である。)

N.-R.	F.-L.	L.-W.	G.
3.5	2.7	10.7	4.9

参考文献

- [1] Von Neumann, J. and Richtmyer, R. D. A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks, J. Appl. Phys. Vol. 21. (1950)
- [2] Lax, P. D. Weak solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their numerical computation C.P.A.M Vol 7 (1954)
- [3] Lax, P. D. and Wendroff, B. Systems of Conservation Laws C.P.A.M Vol 13 (1960)
- [4] Godunov, S. K. Difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of equations of hydrodynamics. Mat. Sbornik, N.S. Vol. 47 (89) No. 3 (1959)
- [5] Kuropatenko, B. F. About difference method for equations of hydrodynamics. Trudi, M.I. Vol. 74 (1966)
- [6] Richtmyer, R. D. Difference method for initial value problems. Interscience publishers (1957)
- [7] Fox, L. Numerical solution of ordinary and partial differential equations. Pergamon Press (1962)
- [8] Lax, A. Decaying shocks - A comparison of an approximate analysis solution with a finite difference method C.P.A.M. vol. 5. (1952)
- [9] Chou, P. C., Karpp, R. R. and Huang, S. L. Numerical calculation of Blast waves by the method of characteristics. AIAA JOURNAL vol. 5, no. 4. (1966)
- [10] Noh, W. F. A general theory for the numerical solution of the

- equations of hydrodynamics. Numerical solutions of nonlinear differential equations. edited by D. Greenspan. J. Wiley. (1966)
- [1] Yanenko, H.H. and Nenbuzaev, B.E. A numerical method of gasdynamic equations with nonlinear heat conduction. Trudi Math. Inst. vol. 24 (1966)
- [2] Godunov, S.K. Zabrodin, A.V. and Prokopov, G.P. Difference scheme for 2-dimensional nonstationary problem of gas-dynamics and computation of blow with shock waves. Comp. Math. and Math. physics. vol. 1. no. 6. (1961)
- [3] Ludford, G., Polachek, H. and Seeger, R.J. On unstationary flow of compressible viscous fluids. J. Appl. Phys. 24. (1953)