

漸近展開と有限要素モデル

東大 宇航研 菊地文雄

1. はじめに アークとは曲線状の構造要素(部材)であり, 以下では円弧アークの(円弧を含む)面内での変形について考察する。構造物の解析に有限要素法が盛んに用いられており, アークにも応用されているが, その際に変位に対する近似関数の選び方が近似解の精度に極端なほどの影響を与えることが経験的に知られている。この現象は特にアークの断面寸法が全長や半径に比較して微小な場合に顕著である(菊地他[1], Yamada-Ezawa[2] 参照)。

以下ではアークに対する有限要素モデルとして最も単純なものを考え, その数値解の挙動を調べ, 近似スキームとして適切でないことを明らかにすると共に, その修正モデルを2つ考察し, それらの方が数値的に良好な挙動を示すことを理論的に明らかにする。さらに数値実験による検証も与える。

2. 問題の定式化 単位区間 $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ 上の関数空間として $H^m(I), H_0^m(I)$ (m は非負整数) 等を用いる。ノル

μ は $\|\cdot\|_\mu$ と書く。 $L_2(I)$ の内積, ノルムを順に $(\cdot, \cdot), \|\cdot\|$ で表わす。次に V を $V = V_1 \times V_2$; $V_1 = H_0^1(I), V_2 = H_0^2(I)$ で定義する。また V^{-1} は V の共役空間とする。なお $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\{L_2(I)\}^2$ の内積, もしくはその $V^{-1} \times V$ での duality pairing としての拡張を表わす記号として用いる。

$V \times V$ で次の対称双1次形式を考える。

$$a^0(u, v) = (Du_1 + u_2, Dv_1 + v_2) \quad (1)$$

$$a^1(u, v) = (D^2u_2 - Du_1, D^2v_2 - Dv_1) \quad (2)$$

ただし $u = \{u_1, u_2\} \in V, v = \{v_1, v_2\} \in V$ とする。また D は d/dx (x は独立変数) を意味する。なお D^{-1} を次式で定義される積分作用素とする。

$$(D^{-1}y)(x) = \int_{-1/2}^x y(t) dt; \quad x \in [0, 1], y \in L_1(I) \quad (3)$$

定性的には円弧アーチの変形問題は次のように与えられる。ただし ε は正のハローメータであって, かなり小さい場合に実用上の意味がある (しかし無限小ではない)。

(P_ε) $f \in V^{-1}$ を任意に1つ与えたとき, 次式を満たす $u_\varepsilon \in V$ を見出せ。

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle; \quad \forall v \in V \quad (4)$$

上記で $a_\varepsilon(u, v); u, v \in V$ は次式で定義される対称な双1次形式である。

$$a_\varepsilon(u, v) = \varepsilon a^0(u, v) + \varepsilon^2 a^1(u, v) \quad (5)$$

このようにして $\varepsilon > 0$ をパラメータとする問題の族が与えられた。

3. 解の性質: 漸近展開による結果

(4) の解の存在と一意性を調べるため、まず次の性質に注意する。

$$a_1(u, v) \equiv a_{\varepsilon=1}(u, v) \text{ は } V\text{-elliptic,} \quad (6-1)$$

$$\min\{\varepsilon, \varepsilon^2\} a_1(u, u) \leq a_\varepsilon(u, u) \leq \max\{\varepsilon, \varepsilon^2\} a_1(u, u); \forall u \in V \quad (6-2)$$

(6-1) については Ciarlet [3] を参照。このことから各 $\varepsilon > 0$ と各 $f \in V^{-1}$ に対して解 $u_\varepsilon \in V$ の一意存在が従う。特に、正定数 ε_0, C が存在して、 $\forall f \in V, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して、

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq C \varepsilon^{-2} \|f\|_{V^{-1}} \quad (7)$$

ただし $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{V^{-1}}$ は V と V^{-1} のノルムであって、ここでは (特に後での数値実験で使う際には) $\|\cdot\|_V$ を次のように定めておく。

$$\|u\|_V = (\|Du_1\|^2 + \|D^2u_2\|^2)^{1/2}; \quad u = \{u_1, u_2\} \in V \quad (8)$$

また

$$\|f\|_{V^{-1}} = \sup_{v \in V} \{ | \langle f, v \rangle | / \|v\|_V \} \quad (9)$$

ε に対する依存性を明らかにするため、漸近展開を利用する (Lions [4] 参照)。すなわち、 u_ε は

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-2} u^{-2} + \varepsilon^{-1} u^{-1} + \dots \quad (u^{-2}, u^{-1}, \dots \in V) \quad (10)$$

の形に漸近展開でき, $u^{-2}, u^{-1}, \dots$ は順次次のようにして定まる (さらに有限項で打ち切ったときの誤差評価も与えられる):

1) $u^{-2} \in Y$ (Y は下記で説明),

$$a^1(u^{-2}, v) = \langle f, v \rangle \quad ; \quad \forall v \in Y$$

2) $a^0(u^{-1}, v) = \langle f, v \rangle - a^1(u^{-2}, v) \quad ; \quad \forall v \in V$

$$a^1(u^{-1}, v) = 0 \quad ; \quad \forall v \in Y$$

3) $a^0(u^0, v) = -a^1(u^{-1}, v) \quad ; \quad \forall v \in V$

$$a^1(u^0, v) = 0 \quad ; \quad \forall v \in Y$$

4) 以下同様

ただし,

$$Y = \{ v \in V \mid a^0(v, v) = 0 \} \quad (11)$$

ここで,

$$V_{20} = \{ v_2 \in V_2 \mid (D^{-1}v_2)(1/2) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} v_2(x) dx = 0 \} \quad (12)$$

を用いると, Y は次のようにも表わせる。

$$Y = \{ v = \{v_1, v_2\} \in V \mid v_2 \in V_{20}, v_1 = -D^{-1}v_2 \} \quad (13)$$

次に $f \in Z \equiv L_2(I) \times H^{-1}(I) \subset V^{-1}$ ($H^{-1}(I) = \text{dual of } H_0^1(I)$) のときには, $u^i \in V$ ($i \geq 2$) のみならず,

$$u^i \in W \equiv H^2(I) \times H^3(I) \quad (i \geq -2) \quad (14)$$

$$\|u^i\|_W \leq C_i \|f\|_Z \quad (15)$$

等が成立する。また, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (ε_0 はある正定数) ならば,

$$u_\varepsilon \in W, \quad \|\varepsilon^2 u_\varepsilon - u^{-2}\|_W \leq C \varepsilon \|f\|_Z \quad (16)$$

注意 問題によっては (10) のような単純な展開は不可能なことがある。しかし $Y \neq \{0\}$ であれば u^{-2} は少なくとも確定し、ある意味で u_ε の支配項であることが次のようにしてわかる。

(7) より $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ において $\{\varepsilon^2 u_\varepsilon\}_\varepsilon$ は V で一様に有界。

よって部分列が選べて $\varepsilon \downarrow 0$ のとき、

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ in } V \quad (u^* \text{ は } V \text{ のある元})$$

$$\text{そこで} \quad \varepsilon a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \varepsilon \langle f, v \rangle \quad ; \quad \forall v \in V$$

において $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、 $\varepsilon^3 a^1(u_\varepsilon, v) = \varepsilon a^1(\varepsilon^2 u_\varepsilon, v)$ 等より

$$a^0(u^*, v) = 0 \quad ; \quad \text{i.e., } u^* \in Y$$

次に

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad ; \quad \forall v \in Y$$

で $\varepsilon \downarrow 0$ とすると、 $a^0(u_\varepsilon, v) = 0$ for $\forall v \in Y$ より、

$$a^1(u^*, v) = \langle f, v \rangle \quad ; \quad \forall v \in Y$$

u^* の一意性より $u^* = u^{-2}$ がわかる。そして $f|_Y \neq 0$ であれば $u^* \neq 0$ であるから、 u^{-2} は $\varepsilon^2 u_\varepsilon$ の (弱極限の意味ではあるが) 支配項であるといえる。

4. 有限要素近似 (P_ε) を有限要素法で解くため、区間 I を線分要素に分割する。最大要素長さを h で記す。この分割に対し、 V の近似として最も簡単な次のものを考える。

$$V_1^h = \text{連続な区間 1 次多項式で } x = \pm 1/2 \text{ で 0 になるもの} \\ \text{の全体, } V_1^h \subset V_1$$

$$V_2^h = C^1 \text{ 級の区間 3 次多項式で } x = \pm 1/2 \text{ で関数値と 1 階}$$

導関数値が 0 になるものの全体

$$V^h = V_1^h \times V_2^h \subset V \quad (17)$$

高次の近似は可能であるが、実用上はこの近似が最も使いやすい。

4.1 適合近似 $V^h \subset V$ であるので、Galerkin法の原理に基づく適合近似が可能である。すなわち、

(P_ε^{h1}) $f \in V^{-1}$ を任意に与えたとき、次式を満たす $u_{h\varepsilon} \in V^h$ を見出せ。

$$a_\varepsilon(u_{h\varepsilon}, v_h) = \langle f, v_h \rangle; \quad \forall v_h \in V^h \quad (18)$$

V^h は V の部分空間ゆえ、各 $\varepsilon > 0$, $f \in V^{-1}$ に対する (P_ε^{h1}) の解の存在一意性は明らかであって、さらに (7) に対対応する次式も成立する。

$$\|u_{h\varepsilon}\|_V \leq C \varepsilon^{-2} \|f\|_{V^{-1}} \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0) \quad (19)$$

V^h を固定して ε を 0 の近くで考えたとき、(P_ε^{h1}) の解の ε に対する依存性は極めて悪いことが次のようにしてわかる。すなわち、3節の注意と同様に考えると、 $\{\varepsilon^2 u_{h\varepsilon}\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ から $\varepsilon \downarrow 0$ なる部分列が選べて、その弱極限（実は有限次元空間なので強極限） $u_h^* \in V^h \subset V$ は次の条件を満たさねばならない。

$$\begin{aligned} u_h^* \in Y_1^h &\equiv \{v_h \in V^h \mid a^0(v_h, v_h) = 0\} \\ &= V^h \cap Y \end{aligned} \quad (20)$$

$\gamma = 3$ が (13) を考慮すると, $u_{h1}^* = -D^{-1}u_{h2}^*$ ($u_{h2}^* \in \nabla_{20} \cap \nabla_2^h$) であり, u_{h2}^* は C^1 級の区分 3 次多項式ゆえ, u_{h1}^* は C^2 級の区分 4 次多項式となる。しかし u_{h1}^* は連続な区分 1 次多項式に過ぎないから, 両立するのは u_{h1}^* が 1 次多項式の場合だけであるが, $u_{h1}^*(\pm 1/2) = 0$ ゆえ, $u_{h1}^* = 0$, さらに $u_{h2}^* = 0$. 要するに $\gamma_1^h = \{0\}$ となる。 $f|_{\gamma} = 0$ でないかぎり u^{-2} キ 0 ゆえ, $\varepsilon \neq 0$ に対しては u_{he} が u_ε を近似することはほとんど期待できない。

4.2 部分近似 そこで部分近似を用いた修正を導入する。そのため, $L_h: \nabla_2^h \rightarrow L_2(I)$ として, 次のいずれか 1 つの作用素を考える。

(i) 各 $v_{h2} \in \nabla_2^h$ に対し, 各要素内での値をその要素の両端の節点での関数値の平均値とするような, 区分配数関数を対応させる。(Kikuchi [5])

(ii) 各 $v_{h2} \in \nabla_2^h$ に対し, 要素平均値を各要素での値とする区分配数関数を対応させる。(Yamada-Ezawa [2])

(i), (ii) いずれについても次式が成立する。 ($v_{h2} \in \nabla_2^h$)

$$\|L_h v_{h2}\| \leq C_1 \|v_{h2}\|, \quad \|L_h v_{h2} - v_{h2}\| \leq C_2 h \|v_{h2}\|_1 \quad (21)$$

C_i ($i=1, 2$) は h, v_{h2} に依存しない正定数である。

$\nabla^h \times \nabla^h$ 上で $a^0(u_h, v_h)$ のかわりに次の双 1 次形式を考える。

$$a_h^0(u_h, v_h) = (Du_{h1} + L_h u_{h2}, Dv_{h1} + L_h v_{h2}) \quad (22)$$

u_{h2}, v_{h2} の部分に部分近似が使われている。 $a_h^0(u_h, v_h)$ を用いて $a_\varepsilon(u_h, v_h)$ の代用として次の双1次形式を定義する。

$$a_{h\varepsilon}(u_h, v_h) = \varepsilon a_h^0(u_h, v_h) + \varepsilon^2 a_h^1(u_h, v_h) \quad (23)$$

この双1次形式を用いると, (P_ε^{h1}) の代りに次の近似問題を考えることができる。

(P_ε^{h2}) $f \in V^{-1}$ を任意に1つ与えたとき, 次式を満たす

$u_{h\varepsilon} \in V^h$ を見出せ。

$$a_{h\varepsilon}(u_{h\varepsilon}, v_h) = \langle f, v_h \rangle; \forall v_h \in V^h \quad (24)$$

この近似問題の一意的可解性を示すため, (21) から得られる次の関係に注意する: $0 < \forall h \leq h_0$. (h_0 はある正定数) に対し,

$$c_1 \|u_h\|_V^2 \leq a_{h\varepsilon=1}(u_h, u_h) \leq c_2 \|u_h\|_V^2; \forall u_h \in V^h \quad (25)$$

ただし c_1, c_2 は h, u_h に依存しない正定数。この関係を用いれば (P_ε^{h2}) の解 $u_{h\varepsilon}$ の存在・一意性は容易に証明でき, しかも次の評価式を得る (ただし $0 < \forall h \leq h_0$)。

$$\|u_{h\varepsilon}\|_V \leq C \varepsilon^{-2} \|f\|_{V^{-1}} \quad (26)$$

次の集合を定義する。

$$V_{20}^h = \{v_{h2} \in V_2^h \mid (D^{-1}L_h v_{h2})(1/2) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} L_h v_{h2} dx = 0\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Y_2^h &= \{v_h \in V^h \mid a_h^0(v_h, v_h) = 0\} \\ &= \{v_h \in V^h \mid v_{h2} \in V_{20}^h, v_{h1} = -D^{-1}L_h v_{h2}\} \end{aligned} \quad (28)$$

3 節と同様の考察により, ε が 0 に近いときの $\varepsilon^2 u_{h\varepsilon}$ の支

配項 u_n^* は次の条件で与えられる。

$$u_n^* \in Y_2^h \text{ であり, } a^1(u_n^*, v_n) = \langle f, v_n \rangle; \forall v_n \in Y_2^h \quad (29)$$

近似解の精度については次節で論じるが、今度は $Y_2^h \neq \{0\}$ であって、適合近似の場合とかなり様子が異なることが見当つくであろう。

(参考) 適合近似で $Y_1^h = \{0\}$ となったのは、要するに

$v_{n1} = -D^{-1}v_{n2}$ の関係式を満たすためには区分子項式の次数が合わないことによる。よって V_1^h の次数を上げる (例えば区分子4次) か、 V_2^h の次数を下げるしかないが、前者は効率的ではない (static condensation を用いれば別)。しかし適合近似の範囲で V_2^h の次数を下げることは難しいので、部分近似を導入したのである。 Dv_{n1} も v_{n2} も区分子定数であるから、 Y_2^h には "十分な質と量の" 元が存在する。

5. 誤差解析 $f|_Y \neq 0$ であれば $u^* = u^{-2} \neq 0$ であるから、 ε が小さいときには u_ε はほぼ ε^{-2} に比例すると考えてよい。よって誤差解析においては相対誤差的な意味合いも含めて、

$$w_{n\varepsilon} - w_\varepsilon; \quad w_{n\varepsilon} = \varepsilon^2 u_{n\varepsilon}, \quad w_\varepsilon = \varepsilon^2 u_\varepsilon \quad (29)$$

を評価するのが一つの適切な方法であろう。また誤差のノルムとしては、 $\|\cdot\|_V$ のような ε に依存しないものを用いるのが客観性の点から好ましいと思われる。なお見に関する誤差

のオーダー評価を求めるため, $f \in Z = L_2(I) \times H^{-1}(I)$ とする.

5.1 適合要素 補間作用素を $I_h: V \rightarrow V^h$ で記すことにする. このとき良く知られているように (cf [3]),

$$\|I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_V \leq c h \|u_\varepsilon\|_W \leq c' h \varepsilon^{-2} \|f\|_Z \quad (30)$$

ただし (15), (16) 等を用いた. Ritz 法の最良近似の性質により, ε が小さいときには,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon, u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon) &\leq a_\varepsilon(I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon, I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon \|I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_V^2 \\ ((30) \text{ より}) \quad &\leq c h^2 \varepsilon^{-3} \|f\|_Z^2 \end{aligned} \quad (31)$$

(6.2) より, ε が小さいときには,

$$a_\varepsilon(u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon, u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon) \geq c' \varepsilon^2 \|u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon\|_V^2 \quad (32)$$

(31), (32) より,

$$\|u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon\|_V \leq c h \varepsilon^{-2.5} \|f\|_Z \quad (33)$$

$$\text{よって,} \quad \|w_{h\varepsilon} - w_\varepsilon\|_V \leq c h \varepsilon^{-0.5} \|f\|_Z \quad (34)$$

なお Nitsche の方法を用いれば, $X = \{L_2(I)\}^2$ として,

$$\|w_{h\varepsilon} - w_\varepsilon\|_X \leq c h^2 \varepsilon^{-1} \|f\|_Z \quad (35)$$

(34) は h について 1 次, (35) は h について 2 次オーダーであるが, ε について一様でなく, しかも $\varepsilon \downarrow 0$ のとき ∞ になる係数を含んでいる. したがって ε が 0 に近いときには, 誤差の上界はかなり大きくなる可能性があり, 実用上は好ましくない評価が得られることになる.

5.2 部分近似

まず (29) で定まる $u_h^* = \{u_{h1}^*, u_{h2}^*\} \in Y_h^*$ と, 3 節で述べた $u^* = u^2 = \{u_1^*, u_2^*\} \in Y$ の間の誤差を評価する。 u_{h2}^* の決定方程式は, $f = \{f_1, f_2\} \in Z$ として,

$$\begin{aligned} & (D^2 u_{h2}^* + L_h u_{h2}, D^2 v_{h2} + L_h v_{h2}) \\ &= -(f_1, D^{-1} L_h v_{h2}) + (f_2, v_{h2}) \\ &= (D^{-1} f_1, L_h v_{h2}) + (f_2, v_{h2}) \quad ; \quad \forall v_{h2} \in Y_{h2}^h \quad (36) \end{aligned}$$

ある v は $u_{h2}^* \in V_{h2}^h$ として,

$$\begin{aligned} & (D^2 u_{h2}^* + L_h u_{h2}, D^2 v_{h2} + L_h v_{h2}) \quad ; \quad \forall v_{h2} \in V_{h2}^h \\ &= (D^{-1} f_1, L_h v_{h2}) + (f_2, v_{h2}) + c_1(1, L_h v_{h2}) \quad (37) \end{aligned}$$

c_1 は $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L_h u_{h2}^* dx = 0$ なる条件から決定すべき未定の定数である。同様に u_2^* は,

$$\begin{aligned} & (D^2 u_2^* + u_2^*, D^2 v_2 + v_2) \\ &= (D^{-1} f_1, v_2) + (f_2, v_2) + c_2(1, v_2) \quad ; \quad \forall v_2 \in V_2 \quad (38) \end{aligned}$$

部分近似の理論を使って $u_{h2}^* - u_2^*$ を評価し, さらに $u_h^* - u^*$ の評価を求めるというように進むと,

$$\|u_h^* - u^*\|_Y \leq C_h \|f\|_Z \quad (39)$$

次に

$$v_{h\varepsilon} = w_{h\varepsilon} - u_h^*, \quad v_\varepsilon = w_\varepsilon - u^* \quad (40)$$

として, $v_{h\varepsilon} - v_\varepsilon$ を評価する。

$$e_h = v_{h\varepsilon} - I_h v_\varepsilon \quad (\in V^h) \quad (41)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
E_h(v_h) &= a_h^0(e_h, v_h) + \varepsilon a^1(e_h, v_h) \\
&= \varepsilon \langle f, v_h \rangle - a_h^0(u_h^* + I_h v_\varepsilon, v_h) \\
&\quad - \varepsilon a^1(u_h^* + I_h v_\varepsilon, v_h); \quad \forall v_h \in V^h \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\text{また } \varepsilon \langle f, v_h \rangle = a^0(u^* + v_\varepsilon, v_h) + \varepsilon a^1(u^* + v_\varepsilon, v_h); \quad \forall v_h \in V^h \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } E_h(v_h) &= a^0(v_\varepsilon - I_h v_\varepsilon, v_h) + a^0(I_h v_\varepsilon, v_h) - a_h^0(I_h v_\varepsilon, v_h) \\
&\quad + \varepsilon a^1(u^* - u_h^* + v_\varepsilon - I_h v_\varepsilon, v_h) \quad (44)
\end{aligned}$$

部合近似項の評価と

$$\|v_\varepsilon - I_h v_\varepsilon\|_V \leq C_h \varepsilon \|f\|_Z \quad (45)$$

を用いれば,

$$|E_h(v_h)| \leq C_h \varepsilon \|f\|_Z \|v_h\|_V \quad (46)$$

よって (6-2) を用いて

$$\|e_h\|_V \leq C_h \|f\|_Z \quad (47)$$

(39) と (40) より

$$\|u_{h\varepsilon} - w_\varepsilon\|_V \leq C_h \|f\|_Z \quad (48)$$

この評価は (ε が小さいとき) ε に依存しない評価であって (34) よりも望ましい性質を持っていると考えられる。

5.3 その他の評価

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon (D u_{\varepsilon 1} + u_{\varepsilon 2}) \quad (49)$$

なる関数を考えると, $w_\varepsilon = \varepsilon^2 u_\varepsilon$ に対して, (4) は次のように書き直すこともできる。

$$(\lambda_\varepsilon, Dv_1 + v_2) + a^1(w_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle; \quad \forall v \in V \quad (50)$$

$$(\varepsilon \lambda_\varepsilon - (D w_{\varepsilon 1} + w_{\varepsilon 2}), \mu) = 0; \quad \forall \mu \in L_2(I) \quad (51)$$

すなわち, $\lambda_\varepsilon, w_\varepsilon$ は (50), (51) で示されるような, 混合形^[6]の式を満たす。このことを利用して Berconier の方法を用いると, 我々の部分近似モデルについて次の評価を得られる。

$$\|w_{h\varepsilon} - w_\varepsilon\|_X \leq c h^2 \|f\|_Z \quad (52)$$

$$\|\lambda_{h\varepsilon} - \lambda_\varepsilon\| \leq c h \|f\|_Z \quad (53)$$

$$\text{ただし} \quad \lambda_{h\varepsilon} = \varepsilon^{-1} (D w_{h\varepsilon 1} + L_h w_{h\varepsilon 2}) \quad (54)$$

また我々が考えている問題は, ε をペナルティ・パラメータとする問題と見なすこともできる。

6. 関連問題 同様な問題として, 非圧縮性 Stokes 方程式の問題,^[6] Timoshenko はりの問題^[7]などがある。後者では,

$$V \rightarrow H_0^1(I) \times H_0^1(I)$$

$$a^0(u, v) \rightarrow (D u_1 - u_2, D v_1 - v_2)$$

$$a^1(u, v) \rightarrow (D u_2, D v_2)$$

とし, u を区分1次式近似した場合に, 前章までと同様の性質を示すことができる。すなわち, u_1, u_2 を区分1次式近似し, $a^0(u, v)$ の部分で u_2, v_2 の部分を区分定数に部分近似する。

他にも同様な性質を有する問題は存在するが, 著者が負付いたもので有意なのは以上のような例であった。

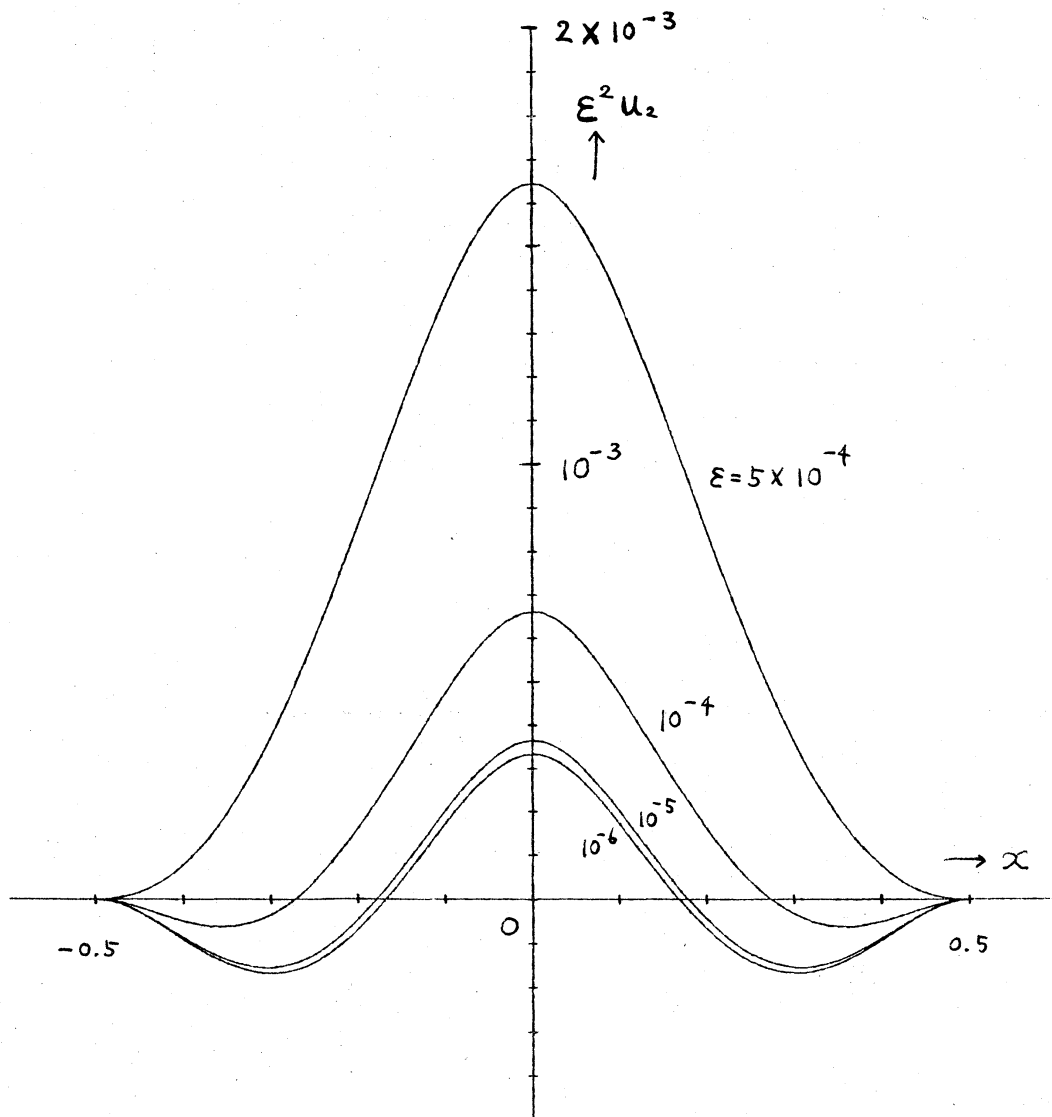
7. 数値実験 例題として $f \in L_2(I) \times H^{-1}(I) \subset V^{-1}$ を次のように選んだ。($f|_Y \neq 0$ に注意)

$$f = \{f_1, f_2\}; \quad f_1 = 0, \quad f_2 = \delta \quad (\delta\text{-関数}) \quad (55)$$

すなわちアーチの中心に集中力が作用する場合に相当する。この問題に対しては厳密解の表示を陽に与えることが可能である。図1に $u_\varepsilon = \{u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}\}$ の第2成分のグラフを示す。ただし、たて軸は $\varepsilon^2 u_{\varepsilon 2}$ を示しており、いくつかの ε の値について関数の分布を図示することにより、 $\varepsilon \downarrow 0$ の挙動が視覚的に理解できるようにした。図からわかるように、 $\varepsilon = 10^{-5}$ 程度で u^{-2} の項が支配的になり、 $\varepsilon = 10^{-6}$ ではほとんど u^{-2} に一致してしまう。なお u^{-2} の第2成分 u_2^{-2} の全積分量は0であるが(式(12)参照)、同図を見るとそのことも確認できるよう。

区間 I を N 等分して、 ε をいろいろに変化させて数値解の挙動、収束のようすなどを観察した。($h = 1/N$ とする)

まず、誤差の大きさの絶対的な量を見ていただくため、 $u_{h\varepsilon}$ の第2成分の N や ε への依存性を図. 2 に示した。部分近似モデルとしては Kikuchi の手法のみ図示したが、Yamada-Ezawa の場合もほとんど同様である。図. 2 の (i) には $\varepsilon = 10^{-4}$ の場合を示したが、この場合には適合モデルでは10要素位ではやや誤差があり、100要素程度でほぼ満足できる結果



図・1 問題での u_2 の ε への依存性の様子

が得られている。しかし部分近似モデルでは10要素でほぼ十分な値が求められている。(ii) の $\varepsilon = 10^{-7}$ では適合モデルは1000要素以上ないと結果は悪い。しかし部分近似モデルでは10要素で十分である。このように極端な差がある。

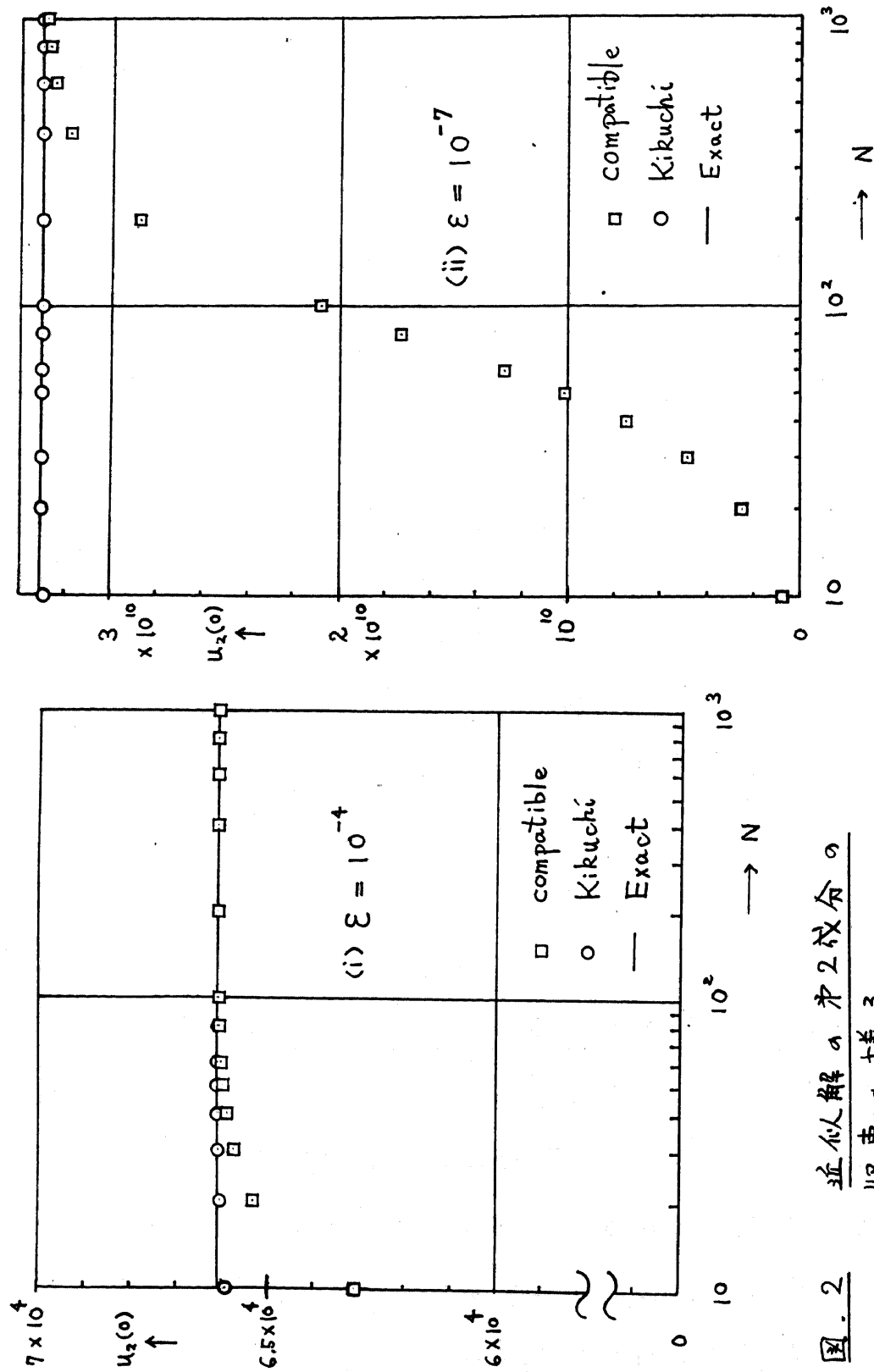


図. 2 近似解の2成分の収束の様子

(N = 要素数)

図-3には $\varepsilon^2 \|u_{h\varepsilon} - u_\varepsilon\|_V$ を $h = 1/N$ に対してプロットしたものを、部分近似の場合について示した。図3-(i), (ii) は $\varepsilon = 10^{-4}$ の場合で、(i) が Kikuchi モデル、(ii) が Yamada-Ezawa モデルである。どちらもほとんど同じ挙動を示すことがわかる。興味深いことに、 h が大きいときは誤差はほぼ h^2 に比例して減少し（両対数方眼紙で勾配2に注意）、 h が小さくなって初めて h に比例して減少するようになる。よって数値実験で (48) の誤差評価を漸近的な意味で正しく測定す

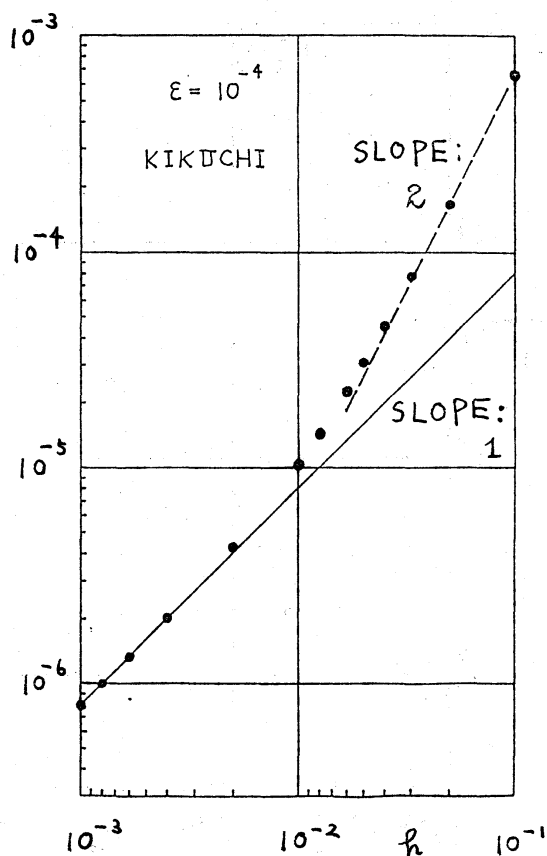


図3-(i) $\varepsilon = 10^{-4}$; Kikuchi

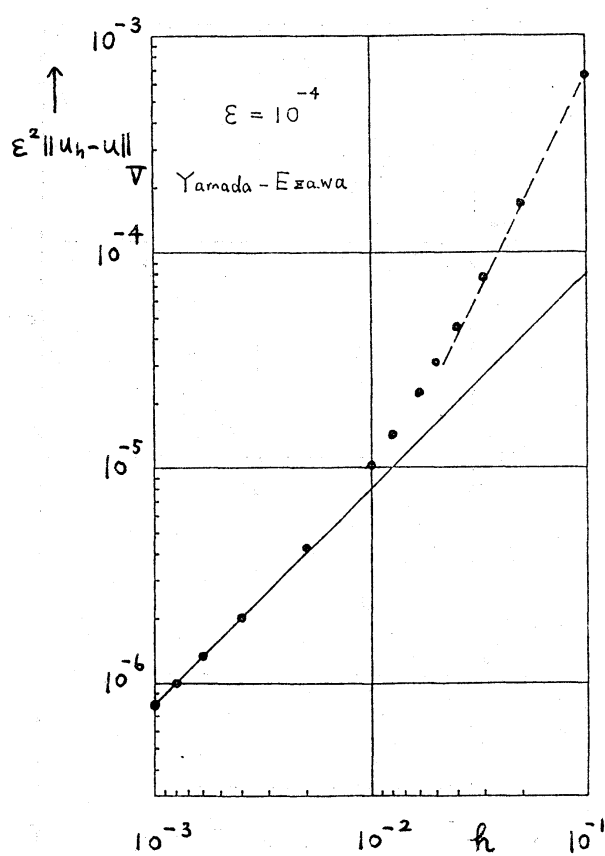


図3-(ii) $\varepsilon = 10^{-4}$; Yamada-Ezawa

るには、かなり数の要素が必要である。図. 3-(iii), (iv) には $\varepsilon = 10^{-5}$ と $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$ (ほとんど一致する) の Kikuchi モデルによる結果を示す。Yamada-Ezawa モデルもほとんど同一の結果を与える。この図からわかるように、 ε が小さいときには、部分近似による有限要素モデルは ε にほとんど依存しない誤差の漸近挙動を示す。

次に適合モデルによる対応する結果を図. 4 にまとめて示す。 ε への依存性が極めて高く、しかも誤差の値は ε が小さ

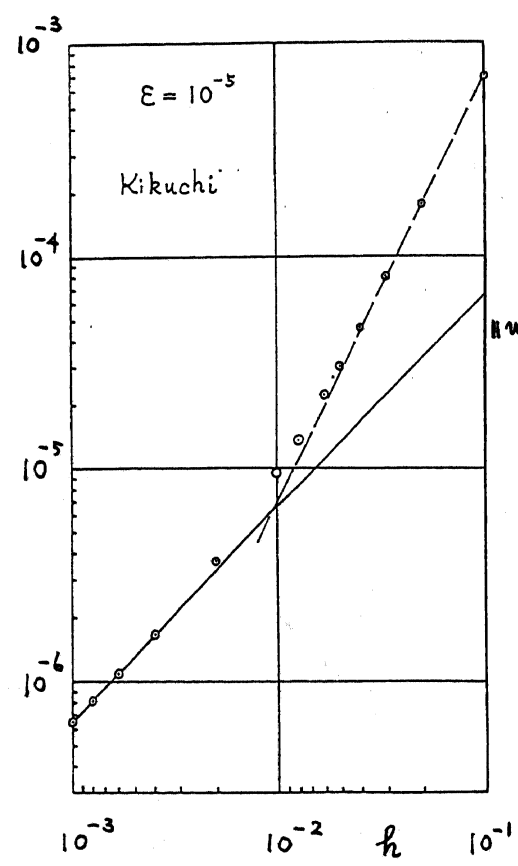


図. 3-(iii) $\varepsilon = 10^{-5}$; Kikuchi

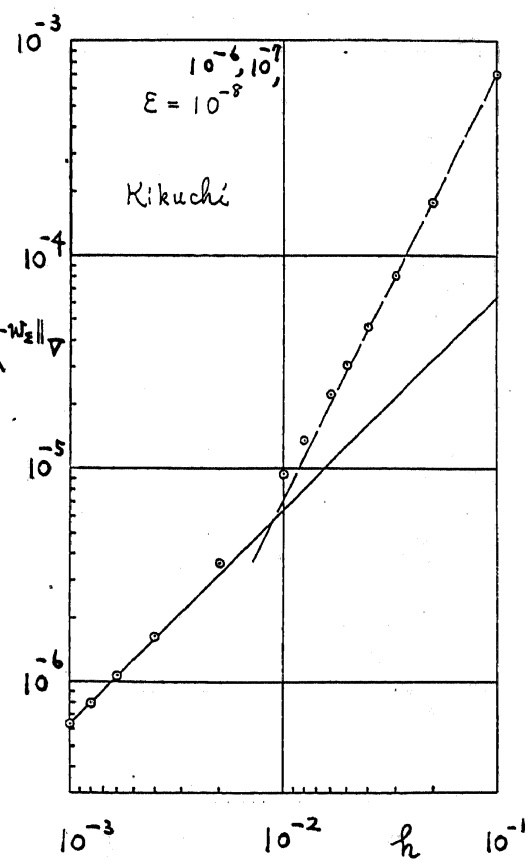


図. 3-(iv) $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$; Kikuchi

くなるにつれ増大していくことがわかる。興味深いことに、 ϵ がよほど小さくならないと、誤差は ϵ に比例して減少するようにならず、かなり広い範囲で ϵ^2 に比例するようにふるまう。また ϵ への依存性については、図の範囲では $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ に比例するというよりは、 ϵ^{-1} に比例しているかのようであるが、まだ最終的な誤差のオーダーを検出するには分割数が不足し

ており、結論は出せない。

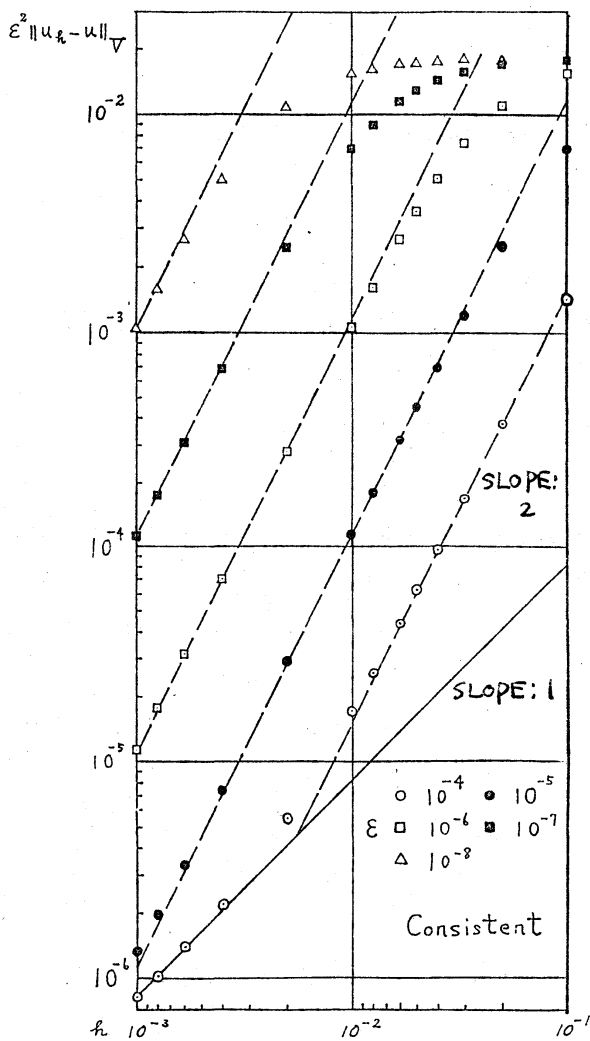


図. 4 適合モデル

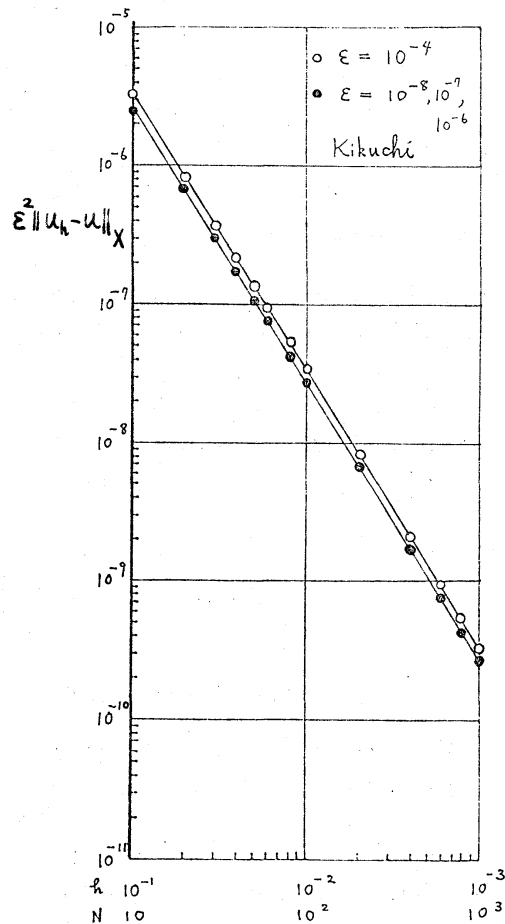


図. 5 $\epsilon^2 ||u_h - u||_X$

図5には Kikuchi モデルについて $\varepsilon^2 \|u_h - u\|_X$ ($X = \{L_2(\Gamma)\}^2$) を調べたもので、 h^2 に比例する誤差の挙動を示し、しかも ε はほとんど依存しない。なお適合モデルの場合には $h^2 \varepsilon^{-1}$ 適当挙動が検出されたが、図は省略する。

以上のように、実験結果は理論によって予知されたものとほぼ一致した。

参考文献

- [1] 菊地・ほか, 日本機械学会論文集, 302号 (1971) 1803-1817.
- [2] Yamada, Y., Ezawa, Y.: On curved finite elements for the analysis of circular arches, Int. J. Num. Meth. Engng, 11 (1977) 1635-1652.
- [3] Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland (1978).
- [4] Lions, J.L.: Perturbation singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal (Lecture Notes in Mathematics, #323, Springer), (1973).
- [5] Kikuchi, F.: On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of beam elements, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, 5 (1975) 253-276.
- [6] Bercovier, M.: Perturbation of mixed variational problems. Application to mixed finite element methods, RAIRO, Analyse numerique, 12 (1978) 211-236.
- [7] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, second edition, Pergamon (1974), Ch. 7.