

Hasse-Weil L 函数の Σ 因子.

東大理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)

一般に代数体上の代数多様体に対し, その Hasse-Weil L 函数が定義されるが, これは全平面に解析接続され函数等式を満たすことが予想される. Σ -factor というのはその函数等式にあるある定数のことであるが, これは各素点ごとに定義される局所因子の積に分解されると予想されている. ここではこの局所因子を tamely ramified な場合に計算する公式を与える. 証明など詳細については.

" Σ -factor of a tamely ramified sheaf on a variety"

東大 JOL 704 = 134-2 (1991)

他には.

"Chern 類のある refinement とその L 函数への応用"

代数幾何学シンポジウム報告集 (1991, 岡山)

"数論における vanishing cycle"

代数幾何と Hodge 理論報告集 (1991, 数研研)

と 47 下 11

§ 1. 一般論の復習.

はじめに Hasse-Weil L 函数と同所 Σ 因子の一般論をおおまかに復習する. かくかくは.

J.-P. Serre. Facteurs locaux des fonctions zeta des variétés algébriques 全集 vol 2. 581-592.

P. Deligne Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. Spn LNM 349.

k を代数体 X を k 上射影的かつ smooth な多様体とく. m を整数 ≥ 0 とする. このとき X の m -th Hasse-Weil L 函数は

$$L(H^m(X), s) = \prod_{p: k \text{ 有限素点}} P_p(H^m(X), N_p^{-s})^{-1}$$

と無限積で定義される. ここで右辺は

$$P_p(H^m(X), t) = \det (1 - F_{F_p} t H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_p})$$

と定義される t の多項式である. F_{F_p} は p での幾何的 Frobenius (i.e. N_p 乗写像の逆), ℓ は p とおちないう素数. I_p は p での惰性群. 上の Σ 添字は不変部分を意味し. 右辺は ℓ によらない $\mathbb{Z}$ 係数の多項式と予想される. Weil 予想により X が p で good reduction なるならばこの予想は正しく. さらに無限積が $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{m}{2} + 1$ で絶対収束することから従う.

Hasse-Weil L 函数 $L(H^m(X), s)$ は全 s 平面に解析接続され. 次のような函数等式をみたすと予想されている. 各無限素点に対して Σ の Hodge 構造から Γ -factor を定まり (定義は略).

$\Lambda(H^m(X), s) = L(H^m(X), s) \times \Gamma\text{-factor}$ とおくと

$$\Lambda(H^m(X), s) = E \cdot F^{-s} \cdot \Lambda(H^m(X), m+1-s)$$

とみたす. ここで E と F は次のような定数である. まず F は D を右の絶対判別式 D_{Ded} . b_m は Betti 数 $\dim H^m(X_{\bar{e}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

$f \in H^m$ の Artin 導関数とすると $F = D^{b_m} \cdot N(f)$ である. ここで $f = \prod_{p: \text{有限}} p^{f_p}$ は右の整 ideal で. 各 p に対し.

$$f_p = \dim H^m - \dim (H^m)^{I_p} + \text{Sw}_p H^m$$

ここで $\text{Sw}_p H^m \in \mathbb{N}$ は Swan 導関数とよばれる. H^m の p での wild な分岐の measure である. H^m が p で不分岐であることと $f_p = 0$ であることは同値であり. f の台は有限となる. E は $E^2 = F^{m+1}$ とみたす. つまり. F は各素点での H^m の分岐に関する量の乗法の積となつてゐる. さらに E の符号は以下で与えられるようにもう少し微妙な量であるが. やはり各素点の乗法の積となる.

以上 $H^m(X)$ の L 函数についてみたす. 一般の motif V に対して (これは大体 Dedekind の場合と Artin L を考えたことに相当する) L 函数の定義. 解析接続. 函数等式などが同様に予想される. 但し函数等式については V の L と V の双対の L との関係式になる. このとき定数 F については上と全く同様な式がなりたつと予想されるか. V は一般には自己双対的でないから E と F の関係は $E \cdot \bar{E} = F^{m+1}$ となる (m は V の weight).

しかしこの場合にも上と同様に E を各素点, の素点の積にかけると予想される. これは以下に述べる局所 Σ 因子の理論である.

K を非archimedes 局所体とし, V を K の絶対 Galois 群 G_K の l 次元表現とする ($l \neq p$: 剰余標数). χ を K の加法的指標 ψ と Haar measure dx をとると局所 Σ 因子 $\Sigma_K(V, \psi, dx)$ が定義される. 詳細は略す. これは次のような性質で特徴づけられるものである.

0. ψ, dx の変更に関する変換則.

1. V の完全列に対し乗法的.

2. 次数 0 の表現表現の K の有限次拡大 L の誘導表現での不変性.

3. 1 次表現の場合の具体的な定義.

K が archimedes 的の場合には Hodge 構造 V に対し $\Sigma_K(V, \psi, dx)$ が定義される. これを用いると, 右 Σ_K 域体 V を右 Σ_K の motif とすると $dx = \bigotimes dx_v$ と $\prod_v \int_{A_v} dx_v = 1$ の互補測度 $\text{i.e.} \int_{A_v} dx_v = 1$ かつ $\int_{A_v} dx_v = 1$ かつ $\int_{A_v} dx_v = 1$ の v での

$\int_{A_v} dx_v = 1$ と $\psi = (\psi_v)_v \in A_v$ の加法的指標とすると

$$E = \prod_v \Sigma_v(V_v, \psi_v, dx_v)$$

と与えられる. 右 Σ_K は K が不分岐, $\text{ord} \psi_v = 0$ $\int_{A_v} dx_v = 1$

と 1 から有限積と与える.

局所 Σ 因子は定義をよくみると実質的に Gauss 和であることがわかる。特に V が tamely ramified な場合には具体的に次のように書ける。 Σ の変種 Σ_0, Σ

$$\Sigma_k(V, \psi, dx) = \Sigma_{0,k}(V, \psi, dx) \cdot \det(-\text{Fr}, V^I)$$

で定義する。 V^I は慣性群による不変部分。 Fr は剰余体の geom. Frobenius である。 Σ_0 も上の $0 \sim 3$ で特徴づけられる。 $\Sigma F V$ は G_k の tamely ramified な表現とし、 $\sum \mu_k dx = 1$, $\text{ord } \psi = -1$ とする。 ψ が誘導する $F = \mathbb{Q}_k(\mu_k)$ の指標 ($\neq 1$) を ψ_0 とする。 V は制限により慣性群の tame な商群 $\hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m(\bar{F})$ の表現 V_0 を定める。 このとき局所 Σ 因子 $\Sigma_{0,k}(V, \psi, dx)$ は、 V_0 (と ψ_0) のみで定まり、 次のように Gauss 和の積として定義される $\tau_F(V_0, \psi_0)$ と一致する。 V_0 は $V_X = \bigoplus_{i=0}^{f-1} g^{i*} X$ の形の表現いくつかの直和にかけると、 ここで X は $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の 1 次指標であり、 ΣX の位数としるとき、 f は F の位数 g の $(\mathbb{Z}/m)^X$ での位数で、 g^{i*} は $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の自己同型 g の i 倍によるひきもとしてある。 このとき $E \Sigma F$ の f 次拡大として、 $X \Sigma E^X \xrightarrow{\sum \text{乗}} \mu_m(F)$ により E^X の指標をみて $\tau_F(V_X, \psi_0) = - \sum_{\alpha \in E^X} \chi^{-1}(\alpha) \psi_0(\text{Tr}_{E/F}(\alpha))$ とおき、 $V_0 = \bigoplus_i V_{X_i}$ に対しては $\tau_F(V_0, \psi_0) = \prod_i \tau_F(V_{X_i}, \psi_0)$ と定義する。 言うまでもなく

$$\Sigma_{0,k}(V, \psi, dx) = \tau_F(V_0, \psi_0) = \prod_i \tau_F(V_{X_i}, \psi_0).$$

§2. 幾何的な場合

ここでは局所体の ℓ 進表現が多様体(上の ℓ 進層)のcohomologyからくる場合について、その局所因子の具体的な公式を説明する。応用として有限体上の多様体上の ℓ 進層についてそのcohomologyのdeterminantのFrobeniusの作用を与える公式について述べる。

K を非archimedes局所体、 $\mathcal{O}_K$ をその整数環とする。 $X \in \mathcal{O}_K$ 上proper regularなschemeでそのgeneric fiber X_K がsmoothなものと取る。 $U \subset X_K$ をopenとし、 $D = X - U$ が X の単純正規交叉因子になるとする。 X は $\mathcal{O}_K$ 上logsmoothであると仮定する。すなわち、 $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log D / \log F) = (\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1 \oplus \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bigoplus_j \mathcal{O}_U^{\times} / da - a da, a \in \mathcal{O}_X \cap \bigoplus_j \mathcal{O}_U^{\times}; 1 \otimes b, b \in K^{\times})$ (ここで $j: U \hookrightarrow X$) と定義したときこれを局所的に自由であると仮定する。この条件は例えばclosed fiber $X_F = \sum v_i D_i$ の各既約成分 D_i での重複度 v_i が剰余体 F の標数 p で割れなければ満たされる。さらに $F \ni U$ 上の $\ell (\neq p)$ 進層とし、 D にこの分岐を tame と仮定する。次の局所因子を与える。

$$\Sigma_0(U/K, F, \psi, dx) = \prod \Sigma_{0,K} (U_K, F, \psi, dx)^{(-1)^i}$$

ここで ψ, dx は前節と同様にそれぞれ $\text{ord } \psi = -1, \int_{U_K} dx = 1$ とする。加法的指標、Haar測度である。このとき次の公式が成り立つ。

定理 上の記号のもとで.

$$\begin{aligned} \Sigma_0(U/k, \mathcal{F}, \psi, dx) &= \chi(-C_{X,U}/\mathcal{O}_K) \times \tau_{D/F}(\mathcal{F}, \psi_0) \\ &\quad \times \Sigma_0(U/k, \mathbb{Q}_\ell, \psi, dx)^{v_k \mathcal{F}} \\ \Sigma_0(U/k, \mathbb{Q}_\ell, \psi, dx) &= \prod_i \tau_F(V_{m_i}, \psi_0)^{[F_i:F] \times c_i} \times (-1)^{\chi(U_K)} \end{aligned}$$

右辺を説明する. 詳細については冒頭の引用文献をみて下さい. まず大雑把にいうと, 1-式右辺1-項は, $\mathcal{F}$ に対応する基本群の ℓ -進表現の行列式指標を類体論の相互写像を使って (X, U) の相対標準類でとらせた値. 2-項は $\mathcal{F}$ の D に関する分岐で定まる Gauss 和の積. 3-式の右辺は closed fiber の重複度で定まる Gauss 和の積である. 順にくわしくみよう. ℓ -進層 $\mathcal{F}$ は基本群 $\pi_1(U)^{\text{tame}}$ の ℓ -進表現 ρ と対応する. すると $\chi = \det \rho$ は $\pi_1(U)^{\text{ab, tame}}$ の指標を定める. 類体論の相互写像 $\text{CH}_F^n(X, D) \rightarrow \pi_1(U)^{\text{ab, tame}}$ により χ は $\text{CH}_F^n(X, D)$ の指標とみなせる. ここで $n = \dim X$ で $\text{CH}_F^n(X, D)$ は相対 Chow 群である. (X, U) の相対標準類 $C_{X,U}/\mathcal{O}_K$ は今 log smooth と仮定しているのて $(-1)^n \sum_i m_i \otimes c_{n-1}(\Omega_{D_i/F_i}^1 (\log D_i - D_i^*))$ と定義される. ここで m_i は重複度の p と素数部分, D_i^* は既約成分 D_i から他の D の成分との共通部分をひいたものである.

ℓ -進表現 ρ 制限により定まる各 D_i の誘性群の tame 商 $\mathcal{G}_i(U)$ の表現を ρ とし, D_i の定数体を F_i とする. また D_i^* の Euler

数 $c_i = \pi_c(D_i^* \otimes_{F_i} \bar{F}_i)$ とおく. 各重複度 v_i の P 巾部分を g_i とし, $\psi_0^{(g_i)}(a) = \psi_0(a^{g_i})$ とする. 前節で定めた Gauss 和を用いて $\tau_{D/F}(\gamma, \psi_0) = \prod_i \tau_{F_i}(\rho_i, \psi_0^{(g_i)} \circ \text{Tr}_{F_i/F})^{c_i}$ と定義する. 最後に V_{m_i} は $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の商 M_{m_i} の正則表現を $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の表現とみたもので, これについても前節のように Gauss 和を定義する.

定理の証明は vanishing cycle を計算することによりなされる. これについてもくわしくは引用文献をみて下さい.

最後に上で述べた応用についてのおける. F を有限体とし, X を F 上 projective-smooth な多様体. U は X の open で $D = X - U$ が単純正規交叉因子と与えるものとする. γ は U 上の smooth な $\mathcal{L}(\neq \text{ch } F)$ 束で D に γ 分岐が tame なものとする. ここで F の geom. Frobenius の γ 係数の cohomology への作用の行列式

$\prod_i \det(Fr; H_c^i(U_{\bar{F}}, \gamma))^{(-1)^{i+1}} \cdot \det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar{F}}, \gamma))$ と考え, すると

$$\text{定理} \quad \frac{\det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar{F}}, \gamma))}{\det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell))^{n_{\gamma}}} = \chi(-C_{X/U/F}) \cdot \tau_{D/F}(\gamma, \psi_0)$$

がなりたつ. ここで右辺は前と同様に γ に対応する $\mathcal{L}$ 束表現 ρ の行列式 χ の相対標準類での値と, Gauss 和の積である.

証明は次元に関する帰納法により, Lefschetz pencil をとって上の定理と, 標数 p の大域体の場合には E の積表示が Laumon により示されていることから従う.