

Erdős-Kac の定理

学習院大 田 中 穰

§ 1. 序

正整数 n の相異なる素因数の数を $\omega(n)$ で表わす.

$\omega(1)=0, \omega(2)=1, \omega(3)=1, \omega(4)=1, \omega(5)=1, \omega(6)=2,$

$\omega(7)=1, \omega(8)=1, \omega(9)=1, \omega(10)=2, \dots, \omega(30)=3, \dots$

$\omega(n)$ の大きさは

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \omega(n) = 1,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n)}{\frac{\log n}{\log \log n}} = 1.$$

平均的には $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \sim \log \log x.$$

また Hardy-Ramanujan は次の定理を証明した (1917),

Turán は証明を著しく短縮した (1934).

定理 1. $g(n) (n=1, 2, \dots)$ を $n \rightarrow \infty$ のとき $g(n) \rightarrow \infty$ である関数とすると

$$3 \leq n \leq x, \quad |\omega(n) - \log \log n| > g(n) \sqrt{\log \log n}$$

である n の数は $o(x)$ である.

(Hardy-Wright [2], Chap. 22 参照.)

Erdős-Kac [1] は定理 1 を精密化して次の定理を証明した.

定理 2. $\alpha < \beta$ を与えられた実数とする. 整数 n , $3 \leq n \leq x$ のうち

$$\log \log n + \alpha \sqrt{\log \log n} < \omega(n) < \log \log n + \beta \sqrt{\log \log n}$$

である n の数を $A(x) = A(x; \alpha, \beta)$ とすると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Erdős-Kac はこの定理を整数論のふるい法と確率論の中心極限定理とを用いて証明した. 中心極限定理の代りに特性関数を用いる方法もあるが, これは本質的な相異ではない. 筆者は [3], [4], [5], [6] において, 確率論を用いない証明を試み, かつ種々の拡張も試みた. 次の定理は [1], 定理 A の特別な場合である.

定理 3. $\alpha_i < \beta_i (i=1, \dots, k)$ を与えられた実数とする. 整数 n , $3 \leq n \leq x$ のうち

$$\log \log n + \alpha_i \sqrt{\log \log n} < \omega(n+i-1)$$

$$< \log \log n + \beta_i \sqrt{\log \log n} \quad (i=1, \dots, k)$$

と同時に満たす n の数を $A(x) = A(x; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$ とする。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

さて本稿では次の定理を証明する。定理3に似ているが加法的整数論に属する結果である。

定理4. k を1より大きい整数とする。 $\alpha_i < \beta_i$ ($i=1, \dots, k$) と与えられた実数とし、整数 $N \geq \max(3, k)$ に対し、次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を $A(N) = A(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$ で表わす:

$$N = n_1 + \dots + n_k;$$

$$\log \log N + \alpha_i \sqrt{\log \log N} < \omega(n_i)$$

$$< \log \log N + \beta_i \sqrt{\log \log N} \quad (i=1, \dots, k).$$

この $A(N)$ は $N \rightarrow \infty$ のとき

$$A(N) \sim \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

§ 2. 証明

証明を数個の補題に分けて述べることにする。

補題 1. $a_1, \dots, a_k, b$ が正整数で, d を $a_1, \dots, a_k$ の最大公約数とする. $d|b$ のとき, 不定方程式

$$a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = b$$

の正整数解の数 $S_k = S_k(a_1, \dots, a_k, b)$ は

$$\left| S_k - \frac{d b^{k-1}}{(k-1)! a_1 \dots a_k} \right| < C_k b^{k-2},$$

ここに C_k は k のみによって定まり $a_1, \dots, a_k, b$ に関係しない正数である.

証明. 初等整数論において不定方程式 $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ の整数解の形はよく知られている. このことから $k=2$ の場合が得られるから, k に関する帰納法による.

補題 2. a, b を負でない整数とすると

$$\sum_{c=0}^b (-1)^c \binom{a}{c} \begin{cases} = 1 & (a=0 \text{ のとき}) \\ \geq 0 & (a>0 \text{ 且 } b \text{ が偶数のとき}) \\ \leq 0 & (a>0 \text{ 且 } b \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

ただし

$$\binom{a}{0} = 1; \quad a < c \text{ のとき } \binom{a}{c} = 0$$

とした.

証明. $a=0$ のときは明らかである. $a>0$ のときは

$$\sum_{c=0}^b (-1)^c \binom{a}{c} = (-1)^b \binom{a-1}{b}$$

から直ちに補題を得る。

補題3. a_i, b_i ($i=1, \dots, k$) を負でない整数とすると

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{c_j=0}^{2b_j+1} (-1)^{c_j} \binom{a_j}{c_j} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{c_i=0}^{2b_i} (-1)^{c_i} \binom{a_i}{c_i} \right\} \\ - (k-1) \prod_{i=1}^k \sum_{c_i=0}^{2b_i} (-1)^{c_i} \binom{a_i}{c_i}$$

$$\begin{cases} = 1 & (a_i \text{ がすべて } 0 \text{ のとき}) \\ \leq 0 & (a_i \text{ のなかに正のものがあるとき}) \end{cases}$$

証明. a_i がすべて 0 のときは明らかである. a_i のなかに正のものがあるときは, $a_i > 0$ ($i=1, \dots, k$), $a_i = 0$ ($i=k+1, \dots, k$) としても一般性を失わない. このとき与式を書きかえ

$$\sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{c_j=0}^{2b_j+1} (-1)^{c_j} \binom{a_j}{c_j} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{c_i=0}^{2b_i} (-1)^{c_i} \binom{a_i}{c_i} \right\} \\ - (k-1) \prod_{i=1}^k \sum_{c_i=0}^{2b_i} (-1)^{c_i} \binom{a_i}{c_i}$$

とすることが出来る. 補題2を適用するとこの式が ≤ 0 であることがわかる. (証明終)

さてここで数種の集合と関数とを定義する. N は大きい整数とする.

記号 $\rho(N)$ で

$$(1) \quad e^{(\log \log N)^2} < p < N^{(\log \log N)^{-2}}$$

である素数 p の集合を表わす. この集合に含まれる素数の範囲が N とともに変動するから $p(N)$ と書いたのである.

正整数 n の素因数のうち $p(N)$ に属するものの数 (重複度は考慮しない) を $\omega_N(n)$ で表わす:

$$\omega_N(n) = \sum_{\substack{p|n \\ p \in p(N)}} 1.$$

また

$$(2) \quad y(N) = \sum_{p \in p(N)} \frac{1}{p}$$

と置く.

t を正整数として $\mathcal{M}(N; t)$ で次の条件を満たす正整数 m の集合を表わす:

m は $p(N)$ に属する素数だけの積である;

m は squarefree である;

m の素因数の数は t である.

$\mathcal{M}(N; 0) = \{1\}$ と置く.

次に $t_i (i=1, \dots, k)$ が正整数のとき, 次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を $F(N; t_1, \dots, t_k)$ で表わす:

$$N = n_1 + \dots + n_k; \quad \omega_N(n_i) = t_i \quad (i=1, \dots, k).$$

正整数 $m_i (i=1, \dots, k)$ が $m_i \in \mathcal{M}(N; t_i) (i=1, \dots, k)$ のとき

次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を

$G(N; m_1, \dots, m_k)$ で表わす: $N = n_1 + \dots + n_k$;

$$\prod_{p|n_i, p \in P(N)} p = m_i \quad (i=1, \dots, k).$$

定義から

$$(3) \quad F(N; t_1, \dots, t_k)$$

$$= \sum_{m_1 \in M(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in M(N; t_k)} G(N; m_1, \dots, m_k).$$

今度は $t_i (i=1, \dots, k)$ と T が正整数のとき

$$H_0(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$= \sum_{m_1 \in M(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in M(N; t_k)} K_0(N; m_1, \dots, m_k; T),$$

$$K_0(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k),$$

$$L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1 \in M(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in M(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i \mu_i | n_i (i=1, \dots, k)}} 1$$

となく, $H_0(N; t_1, \dots, t_k; T)$ において $m_i (i=1, \dots, k)$ が条件

$m_i \in M(N; t_i)$ のもとで動くとき, $K_0(N; m_1, \dots, m_k; T)$ において

$\tau_i (i=1, \dots, k)$ がそれぞれ 0 から $2T$ まで動く,
 $L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$ において $\mu_i (i=1, \dots, k)$ が条件
 $\mu_i \in M(N; \tau_i), (m_i, \mu_i) = 1$ のとき動く, このような μ_i の各
 組に対し $n_i (i=1, \dots, k)$ が条件 $n_1 + \dots + n_k = N, m_i \mu_i | n_i$
 $(i=1, \dots, k)$ のとき動くのである.

$H_i(N; t_1, \dots, t_k; T) (i=1, \dots, k)$ も次のように定義する:

$$\begin{aligned} & H_i(N; t_1, \dots, t_k; T) \\ &= \sum_{m_i \in M(N; t_i)} \dots \sum_{m_k \in M(N; t_k)} K_i(N; m_1, \dots, m_k; T), \\ & K_i(N; m_1, \dots, m_k; T) \\ &= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_i=0}^{2T+1} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k), \end{aligned}$$

ここに $\tau_j (j=1, \dots, k; j \neq i)$ は 0 から $2T$ まで動く, τ_i は
 かつ 0 から $2T+1$ まで動く.

$H_0(N; t_1, \dots, t_k; T)$ の漸近式を求めたための補助として

$$\begin{aligned} & H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\ &= \sum_{m_i \in M(N; t_i)} \dots \sum_{m_k \in M(N; t_k)} K'(N; m_1, \dots, m_k; T), \\ & K'(N; m_1, \dots, m_k; T) \\ &= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L'(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k), \end{aligned}$$

$$L'(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in \mathcal{M}(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \frac{(m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k)}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k} \\ (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) | N$$

$$::: (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) \text{ if } m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k \text{ の最大公約数};$$

$$H^*(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$= \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N; t_k)} K^*(N; m_1, \dots, m_k; T),$$

$$K^*(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L^*(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k),$$

$$L^*(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in \mathcal{M}(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \frac{1}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k}; \\ (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) = 1$$

$$H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$= \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N; t_k)} K^{**}(N; m_1, \dots, m_k; T),$$

$$K^{**}(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

$$= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L^{**}(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k),$$

$$\begin{aligned}
& L^{**}(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k) \\
&= \sum_{\substack{\mu_1 \in M(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1 \\ (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) > 1 \\ (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) \mid N}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in M(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \frac{(m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k)}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k}; \\
& H^{***}(N; t_1, \dots, t_k; T) \\
&= \sum_{m_1 \in M(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in M(N; t_k)} K^{***}(N; m_1, \dots, m_k; T), \\
& K^{***}(N; m_1, \dots, m_k; T) \\
&= \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} (-1)^{\tau_1 + \dots + \tau_k} L^{***}(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L^{***}(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k) \\
&= \sum_{\substack{\mu_1 \in M(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1 \\ (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k) > 1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in M(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \frac{1}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k}
\end{aligned}$$

と置く。定義から直ちに

$$\begin{aligned}
(4) \quad H' &= (N; t_1, \dots, t_k; T) \\
&= H^*(N; t_1, \dots, t_k; T) + H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T),
\end{aligned}$$

$$(5) \quad H^*(N; t_1, \dots, t_k; T) + H^{***}(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$= \prod_{i=1}^k \sum_{m_i \in M(N; t_i)} \frac{1}{m_i} \sum_{\tau_i=0}^{2T} (-1)^{\tau_i} \sum_{\substack{\mu_i \in M(N; \tau_i) \\ (m_i, \mu_i)=1}} \frac{1}{\mu_i}.$$

補題 4. $y(N) = \log \log N + O(\log \log \log N)$.

証明. 集合 $P(N)$ を定義したときの不等式 (1) と $y(N)$ の定義 (2) とから

$$\begin{aligned} y(N) &= \sum_{p < \exp\{(\log N)(\log \log N)^{-2}\}} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq \exp\{(\log \log N)^2\}} \frac{1}{p} \\ &= \log\{(\log N)(\log \log N)^{-2}\} - \log\{(\log \log N)^2\} + O(1) \\ &= \log \log N + O(\log \log \log N). \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

定理の証明のこれからの筋道をかいつまんで述べておこう.

まず H' の漸近式を求めよ. そのとき最大公約数

$(m_1\mu_1, \dots, m_k\mu_k)$ が 1 より大きい頂の処置が面倒で, そのた

め H^*, H^{**}, H^{***} を導入した (補題 6-9). H' から H_0 へ

移行する (補題 10, 11). H_i の漸近式も同様にして得ること

がでる (補題 12). H_0, H_i から F へ移行する (補題

5, 13, 14). F の和をとると定理の証明になる.

補題 5. $t_i (i=1, \dots, k), T$ が正整数のとき

$$\sum_{i=1}^k H_i(N; t_1, \dots, t_k; T) - (k-1)H_0(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$\leq F(N; t_1, \dots, t_k) \leq H_0(N; t_1, \dots, t_k; T).$$

証明. $L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$ の定義における和の順序を変えて

$$L(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$$

$$= \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i | n_i (i=1, \dots, k)}} \sum_{\substack{\mu_1 \in M(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1) = 1 \\ \mu_1 | n_1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in M(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k) = 1 \\ \mu_k | n_k}} 1$$

$$= \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i | n_i (i=1, \dots, k)}} \prod_{i=1}^k \sum_{\substack{\mu_i \in M(N; \tau_i) \\ (m_i, \mu_i) = 1 \\ \mu_i | n_i}} 1$$

$$= \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i | n_i (i=1, \dots, k)}} \prod_{i=1}^k \left(\omega_N(n_i)_{\tau_i}^{-t_i} \right).$$

$$\mathcal{Z} = 1'' \quad K_0 = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i | n_i (i=1, \dots, k)}} \delta(n_1, \dots, n_k),$$

$$\sum_{j=1}^k K_j(N; m_1, \dots, m_k; T) - (k-1) K_0(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

$$= \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ m_i | n_i (i=1, \dots, k)}} \delta'(n_1, \dots, n_k),$$

$$\delta(n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^k \sum_{\tau_i=0}^{2T} (-1)^{\tau_i} \left(\omega_N(n_i)_{\tau_i}^{-t_i} \right),$$

$$\delta'(n_1, \dots, n_k)$$

$$= \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{\tau_j=0}^{2T+1} (-1)^{\tau_j} \left(\omega_N(n_j)_{\tau_j}^{-t_j} \right) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \sum_{\tau_i=0}^{2T} (-1)^{\tau_i} \left(\omega_N(n_i)_{\tau_i}^{-t_i} \right) \right\}$$

$$- (k-1) \prod_{i=1}^k \sum_{\tau_i=0}^{2T} (-1)^{\tau_i} \left(\omega_N(n_i)_{\tau_i}^{-t_i} \right)$$

とくに補題 2, 3 によりつねに

$$\delta(n_1, \dots, n_k) \geq 0, \quad \delta'(n_1, \dots, n_k) \leq 0$$

い、 $\omega_N(\omega_i) - t_i = 0$ ($i=1, \dots, k$) のとき、すなわち

$$\prod_{p|n_i, p \in P(N)} p = m_i \quad (i=1, \dots, k)$$

のとき、そしてそのときだけ

$$\delta(n_1, \dots, n_k) = \delta'(n_1, \dots, n_k) = 1$$

である。従って $G(N; m_1, \dots, m_k)$ の定義を思い起こすと

$$\sum_{j=1}^k K_j(N; m_1, \dots, m_k; T) - (k-1) K_0(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

$$\leq G(N; m_1, \dots, m_k) \leq K_0(N; m_1, \dots, m_k; T)$$

という。 $\sum$ の j を i と書い替えて、 m_i ($i=1, \dots, k$) を動か

して、不等式の各辺の和を求めると補題の不等式となる。

補題 6. $T = [4y(N)] + 1$ とくに、 $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H^*(N; t_1, \dots, t_k; T) + H^{***}(N; t_1, \dots, t_k; T)$$

$$= \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!} \{1 + o(1)\}$$

が $t_i < 2y(N)$ である t_i ($i=1, \dots, k$) に関し一様に成り立

つ。

証明. (5) を見ると各 i ($i=1, \dots, k$) に対し

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \sum_{m_i \in M(N; t_i)} \frac{1}{m_i} \sum_{\tau_i=0}^{2T} (-1)^{\tau_i} \sum_{\substack{\mu_i \in M(N; \tau_i) \\ (m_i, \mu_i)=1}} \frac{1}{\mu_i} \\
 &= \frac{\{y(N)\}^{t_i} e^{-y(N)}}{t_i!} \{1 + o(1)\}
 \end{aligned}$$

が $t_i < 2y(N)$ で一様に成り立つことを示せばよいことがわかる。
簡単のために添字 i を省いて

$$\sum_{m \in M(N; t)} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{2T} (-1)^\tau \sum_{\substack{\mu \in M(N; \tau) \\ (m, \mu)=1}} \frac{1}{\mu}$$

を条件 $t < 2y(N)$ のもとで考察する。

τ を集合 $M(N; \tau)$ の定義から直ちに

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau \sum_{\substack{\mu \in M(N; \tau) \\ (m, \mu)=1}} \frac{1}{\mu} = \prod_{\substack{p \in P(N) \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

従って

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \left| \sum_{\tau=0}^{2T} (-1)^\tau \sum_{\substack{\mu \in M(N; \tau) \\ (m, \mu)=1}} \frac{1}{\mu} - \prod_{\substack{p \in P(N) \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right| \\
 & \leq \sum_{\tau=2T+1}^{\infty} \sum_{\mu \in M(N; \tau)} \frac{1}{\mu}.
 \end{aligned}$$

また $y(N)$ と $M(N; \tau)$ の定義から

$$\sum_{\mu \in M(N; \tau)} \frac{1}{\mu} \leq \frac{\{y(N)\}^\tau}{\tau!},$$

従って

$$\sum_{\tau=2T+1}^{\infty} \sum_{\mu \in \mathcal{M}(N; \tau)} \frac{1}{\mu} \leq \sum_{\tau=2T+1}^{\infty} \frac{\{y(N)\}^{\tau}}{\tau!}$$

$$\leq \frac{\{y(N)\}^{2T+1}}{(2T+1)!} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\{y(N)\}^{\tau}}{\tau!} = \frac{\{y(N)\}^{2T+1} e^{y(N)}}{(2T+1)!}.$$

$(2T+1)! > (2T+1)^{2T+1} e^{-(2T+1)}$, かつ $T = [4y(N)] + 1$ とし

とすれば, $2T+1 > 8y(N)$, (したがって

$$\frac{\{y(N)\}^{2T+1}}{(2T+1)!} < \left(\frac{ey(N)}{2T+1}\right)^{2T+1} < \left(\frac{e}{8}\right)^{8y(N)} < e^{-8y(N)}.$$

よって

$$(8) \quad \sum_{\tau=2T+1}^{\infty} \sum_{\mu \in \mathcal{M}(N; \tau)} \frac{1}{\mu} = o(e^{-y(N)}).$$

さて $p(N)$ の定義により

$$\sum_{p \in p(N)} \frac{1}{p^2} = o(1)$$

したがって,

$$\prod_{p \in p(N)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \exp \left\{ \sum_{p \in p(N)} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \sum_{p \in p(N)} \frac{1}{p} + O \left(\sum_{p \in p(N)} \frac{1}{p^2} \right) \right\}$$

$$= \exp \{ -y(N) + o(1) \} = e^{-y(N)} \{1 + o(1)\}.$$

また $m \in \mathcal{M}(N; t)$, $t < 2y(N)$ ならば m の素因数の数は $2y(N)$ より

小さく, 各素因数は $p(N)$ に属し, (したがって

$\exp\{(\log \log N)^2\}$ より大きい. このことと補題4から

$$1 < \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < \prod_{p|m} \left(1 + \frac{2}{p}\right) < \left\{1 + 2e^{-(\log \log N)^2}\right\}^{2y(N)} \\ = 1 + O\left\{y(N)e^{-(\log \log N)^2}\right\} = 1 + o(1).$$

よって

$$(9) \quad \prod_{\substack{p \in \mathcal{P}(N) \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-y(N)} \{1 + o(1)\}$$

よって $m \in \mathcal{M}(N; t)$, $t < 2y(N)$ について m に関して一様に成り立つ。

よって (7), (8), (9) から

$$(10) \quad \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{2T} (-1)^\tau \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{M}(N; \tau) \\ (m, \mu)=1}} \frac{1}{\mu} \\ = \{1 + o(1)\} e^{-y(N)} \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} \frac{1}{m}.$$

よって $t < 2y(N)$ について t に関して一様に成り立つ。

多項定理により

$$(11) \quad \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} \frac{1}{m} \leq \frac{\{y(N)\}^t}{t!} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} \frac{1}{m} + \sum_w \frac{1}{w},$$

ここに w は次の条件に適する正整数の上を動く:

w は $\mathcal{P}(N)$ に属する素数だけから合成されている;

w は squarefree でない;

w は重複度数だけ数えて t 個の素因数をもつ。

このような w の各を $w = d^2 q$ とおき、 $d > 1$ かつ q は square-free とする。このとき

$$\sum_w \frac{1}{w} \leq \sum_d \frac{1}{d^2} \sum_q \frac{1}{q}$$

が成り立つ. ここに d, q はそれぞれ次の条件を満たす正整数の上を動く:

d は $P(N)$ に属する素数だけから合成され, $d > 1$;

q は $P(N)$ に属する素数だけから合成され, squarefree.

$P(N)$ の定義のときの (2) により $d > e^{(\log \log N)^2}$, したがって

$$\sum_d \frac{1}{d^2} = O(e^{-(\log \log N)^2}).$$

また q が squarefree であることと $y(N)$ の定義により

$$\sum_q \frac{1}{q} \leq 1 + y(N) + \frac{\{y(N)\}^2}{2!} + \dots = e^{y(N)}.$$

よって

$$\sum_w \frac{1}{w} = O(e^{y(N) - (\log \log N)^2})$$

を得る. ここで $t < 2y(N)$ と仮定して次のように

$$\frac{\{y(N)\}^t}{t!} > \left(\frac{t}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{t!} = 2^{-t} > e^{-2y(N)}.$$

ゆえに

$$\sum_w \frac{1}{w} = O\left(\frac{\{y(N)\}^t}{t!} e^{3y(N) - (\log \log N)^2}\right).$$

補題 4 により $y(N) = O(\log \log N)$ であるから

$$\sum_w \frac{1}{w} = o\left(\frac{\{y(N)\}^t}{t!}\right).$$

これと (11) とから

$$\sum_{m \in M(N; t)} \frac{1}{m} = \frac{\{y(N)\}^t}{t!} \{1 + o(1)\}$$

を得る。しかもこの式が $t < 2y(N)$ である t に関して一様に成り立つこともわかった。

これと (10) とから

$$\begin{aligned} \sum_{m \in M(N; t)} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{2T} (-1)^\tau \sum_{\mu \in M(N; \tau)} \frac{1}{\mu} \\ = \frac{\{y(N)\}^t e^{-y(N)}}{t!} \{1 + o(1)\} \end{aligned}$$

が $t < 2y(N)$ である t に関して一様に成り立つことになり、これで補題の証明は済んだ。

補題 7. $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T) = o\left(\frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!}\right)$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ と任意の正整数 T に関して一様に成り立つ。

証明. $L^{**}(N; m_1, \dots, m_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$ の定義における和の各項において, $d = (m_1 \mu_1, \dots, m_k \mu_k)$, $m_i \mu_i = m'_i \mu'_i d$, $m'_i | m_i$, $\mu'_i | \mu_i$

$(i=1, \dots, k)$ とおく $m'_i \in \mathcal{M}(N; t'_i)$, $t'_i \leq t_i$, $\tau'_i \in \mathcal{M}(N; t'_i)$,
 $\tau'_i \leq \tau_i$ ($i=1, \dots, k$), $d|N$ であり, 異なる項からは異なる
 m'_i, μ'_i ($i=1, \dots, k$), d の組を得る. $k \geq 1$ であり, なら

$$\frac{(m, \mu_1, \dots, m_k, \mu_k)}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k} = \frac{1}{m'_1 \mu'_1 \dots m'_k \mu'_k d^{k-1}} \leq \frac{1}{m'_1 \mu'_1 \dots m'_k \mu'_k d}.$$

ゆえに $|H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T)|$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N; t_k)} \\ &\sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} \sum_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}(N; \tau_1) \\ (m_1, \mu_1)=1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k \in \mathcal{M}(N; \tau_k) \\ (m_k, \mu_k)=1}} \frac{(m, \mu_1, \dots, m_k, \mu_k)}{m_1 \mu_1 \dots m_k \mu_k} \\ &\quad (m, \mu_1, \dots, m_k, \mu_k) > 1 \\ &\quad (m, \mu_1, \dots, m_k, \mu_k) | N \\ &\leq \sum_d \frac{1}{d} \cdot \prod_{i=1}^k \sum_{\tau'_i=0}^{t_i} \sum_{m'_i \in \mathcal{M}(N; \tau'_i)} \frac{1}{m'_i} \cdot \sum_{\tau'_i=0}^{2T} \sum_{\mu'_i \in \mathcal{M}(N; \tau'_i)} \frac{1}{\mu'_i}. \end{aligned}$$

したがってもちろん

$$(12) \quad |H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T)| \leq \sum_d \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} \frac{1}{m} \right)^{2k},$$

ここに d は次の条件を満たす正整数の上を動く:

d は $\rho(N)$ に属する素数だけから合成されている;

$d|N$, $d > 1$, squarefree.

ゆえに

$$\sum_d \frac{1}{d} \leq \sum_{p|N, p \in \rho(N)} \frac{1}{p} \cdot \prod_{p|N, p \in \rho(N)} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

2. $\mathcal{P}(N)$ の定義から $p \in \mathcal{P}(N)$ ならば $p > e^{(\log \log N)^2}$.

よって $2^{\omega(N)} \leq N$ から $\omega(N) \leq \log N / \log 2 < 2 \log N$. (1.7) より

$$\sum_{p|N, p \in \mathcal{P}(N)} \frac{1}{p} = O(e^{-(\log \log N)^2} \log N),$$

$$\prod_{p|N, p \in \mathcal{P}(N)} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \left(1 + e^{-(\log \log N)^2}\right)^{2 \log N} = O(1).$$

ゆえに

$$(13) \quad \sum_d \frac{1}{d} = O(e^{-(\log \log N)^2} \log N).$$

また不等式 (11) の左半分から

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{m \in M(N; t)} \frac{1}{m} \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\{y(N)\}^t}{t!} = e^{y(N)}.$$

これと (12), (13) から

$$H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T) = O\left(e^{2ky(N) - (\log \log N)^2 \log N}\right).$$

よって $t_i < 2y(N)$ ($i=1, \dots, k$) と仮定してよいから

$$(14) \quad \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k}}{t_1! \dots t_k!} > \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k}}{\{2y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k}} \\ = 2^{-(t_1 + \dots + t_k)} > e^{-2ky(N)}.$$

ゆえに

$$\frac{H^{**}(N; t_1, \dots, t_k; T)}{\frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!}} = O\left(e^{5ky(N) - (\log \log N)^2 \log N}\right).$$

補題 4 に より $y(N) = O(\log \log N)$ であるから上式の右辺は $o(1)$

である。

補題 8. $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H^{***}(N; t_1, \dots, t_k; T) = O\left(\frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!}\right)$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ と任意の T に関して一様に成り立つ。

証明. 前補題の証明で (12) を導いたと同様にして

$$|H^{***}(N; t_1, \dots, t_k; T)| \leq \sum_d \frac{1}{d^2} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{m \in M(N; t)} \frac{1}{m} \right)^{2k}$$

を得る。しかし今度は d に対する制限から $d|N$ を除く。

$$\sum_d \frac{1}{d^2} < \sum_{d > \exp\{(\log \log N)^2\}} \frac{1}{d^2} = O(e^{-(\log \log N)^2}).$$

したがってまた前補題の証明を繰返すだけである。

補題 9. $T = [4y(N)] + 1$ とおくと, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H'(N; t_1, \dots, t_k; T) = \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!} \{1 + o(1)\}$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ。

証明. (4), (5), 補題 6, 7, 8 からこの補題を得る。

補題 10. $T = [4y(N)] + 1$ とおくと, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) &= \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\
&= O\left(\frac{N^{k-1} \{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!} \right)
\end{aligned}$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ。

証明. 補題 1 により

$$\begin{aligned}
H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) &= \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\
&= O\left\{ N^{k-2} \sum_{m_1 \in \mathcal{M}(N; t_1)} \dots \sum_{m_k \in \mathcal{M}(N; t_k)} \right. \\
&\quad \left. \sum_{\tau_1=0}^{2T} \dots \sum_{\tau_k=0}^{2T} \sum_{\mu_1 \in \mathcal{M}(N; \tau_1)} \dots \sum_{\mu_k \in \mathcal{M}(N; \tau_k)} 1 \right\} \\
&= O\left\{ N^{k-2} \prod_{i=1}^k \left(\sum_{m_i \in \mathcal{M}(N; t_i)} \sum_{\tau_i=0}^{2T} \sum_{\mu_i \in \mathcal{M}(N; \tau_i)} 1 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$t_i < 2y(N)$ のとき $t_i < 2T$ であるから

$$\begin{aligned}
(15) \quad H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) &= \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\
&= O\left\{ N^{k-2} \left(\sum_{t=0}^{2T} \sum_{m \in \mathcal{M}(N; t)} 1 \right)^{2k} \right\}
\end{aligned}$$

とすることができる。

さて $\mathcal{M}(N)$ の元の数を $|\mathcal{M}(N)|$ で表わすと, $\mathcal{M}(N; t)$ の定義から直ちに

$$\sum_{m \in M(N; t)} 1 = \binom{|p(N)|}{t} \leq \frac{|p(N)|^t}{t!},$$

(12) より

$$\sum_{t=0}^{2T} \sum_{m \in M(N; t)} 1 \leq \sum_{t=0}^{2T} \frac{|p(N)|^t}{t!} \leq |p(N)|^{2T} \sum_{t=0}^{2T} \frac{1}{t!} < 2 |p(N)|^{2T}.$$

仮定により $T \leq 4y(N) + 1$, また $p(N)$ の定義から $|p(N)| < N^{(\log \log N)^{-2}}$ であるから

$$\sum_{t=0}^{2T} \sum_{m \in M(N; t)} 1 = O\left(N^{2(\log \log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right).$$

ゆえに (15) である

$$\begin{aligned} H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) &= \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\ &= O\left(N^{k-2+4k(\log \log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right), \end{aligned}$$

(16) より (14) である

$$\begin{aligned} H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) &= \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} H'(N; t_1, \dots, t_k; T) \\ &= \frac{N^{k-1} \{y(N)\}^{t_1+\dots+t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!} \\ &= O\left(e^{3ky(N)} N^{-1+4k(\log \log N)^{-2}\{4y(N)+1\}}\right). \end{aligned}$$

補題 4 により $y(N) = O(\log \log N)$ であるから上式の右辺の

$O(\cdot)$ は $o(1)$ である, (よって $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots,$

$k)$ に関する) 同様: $o(1)$ である) ことが証明されている.

補題 11. $T = [4y(N)] + 1$ とおくと, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H_0(N; t_1, \dots, t_k; T) = \frac{N^{k-1} \{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{(k-1)! t_1! \dots t_k!} \{1 + o(1)\}$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. 補題 9, 10 からこの補題を得る.

補題 12. $T = [4y(N)] + 1$ とおくと, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$H_i(N; t_1, \dots, t_k; T) = \frac{N^{k-1} \{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{(k-1)! t_1! \dots t_k!} \{1 + o(1)\} \\ (i=1, \dots, k)$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. 補題 6~10 を経由して補題 11 を得たと同じ道筋を繰返せばよい.

補題 13. $N \rightarrow \infty$ のとき

$$F(N; t_1, \dots, t_k) = \frac{N^{k-1} \{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{(k-1)! t_1! \dots t_k!} \{1 + o(1)\}$$

が $t_i < 2y(N)$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. 補題 5, 11, 12 からこの補題を得る.

補題 14. $\alpha_i < \beta_i (i=1, \dots, k)$ が与えられているとする.

$t_i = y(N) + u_i \sqrt{y(N)}$ とおくと, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$F(N; t_1, \dots, t_k) \\ = \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \{y(N)\}^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_k^2)} \{1 + o(1)\}$$

が $\alpha_i < u_i < \beta_i$ である $t_i (i=1, \dots, k)$ に関して一様に成り立つ.

証明. Stirling の公式により

$$t_i! = \sqrt{2\pi} t_i^{t_i + \frac{1}{2}} e^{-t_i} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t_i}\right) \right\}.$$

ここで $t_i = y(N) + u_i \sqrt{y(N)}$ とおき, $N \rightarrow \infty$ ならしめると

$$t_i! = \sqrt{2\pi} \{y(N)\}^{y(N) + u_i \sqrt{y(N)} + \frac{1}{2}} e^{-y(N) + \frac{u_i^2}{2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{y(N)}}\right) \right\},$$

したがって

$$\frac{\{y(N)\}^{t_i} e^{-t_i}}{t_i!} = \frac{e^{-\frac{u_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi y(N)}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{y(N)}}\right) \right\}$$

が $\alpha_i < u_i < \beta_i$ であるような t_i に関して一様に成り立つこと

がわかる. $i=1, \dots, k$ として k 個の等式をかけ合わせると

$$\begin{aligned} & \frac{\{y(N)\}^{t_1 + \dots + t_k} e^{-ky(N)}}{t_1! \dots t_k!} \\ &= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \{y(N)\}^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_k^2)} \{1 + o(1)\}. \end{aligned}$$

さて $t_i = y(N) + u_i \sqrt{y(N)}$, $\alpha_i < u_i < \beta_i$ であるような t_i は,

N が大なるとき $t_i < 2y(N)$ となるから, 上式と補題 13 によ

って補題の成り立つことがわかる.

補題 15. $\alpha_i < \beta_i (i=1, \dots, k)$ が与えられているとする.

次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を $A^{**}(N) =$

$A^{**}(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$ で表わす:

$$N = n_1 + \dots + n_k;$$

$$y(N) + \alpha_i \sqrt{y(N)} < \omega_N(n_i) < y(N) + \beta_i \sqrt{y(N)} \quad (i=1, \dots, k).$$

この $A^{**}(N)$ は $N \rightarrow \infty$ のとき

$$A^{**}(N) \sim \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \cdot (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

証明.

$$A^{**}(N) = \sum_{t_1, \dots, t_k} F(N; t_1, \dots, t_k)$$

と書くことにしよう. ここには各 t_i ($i=1, \dots, k$) の動く範囲を

$$y(N) + \alpha_i \sqrt{y(N)} < t_i < y(N) + \beta_i \sqrt{y(N)} \quad \text{とすればよい.}$$

このような t_i を大まかに順に t_{ij} ($j=1, \dots, s_i$) として,

$$t_{ij} = y(N) + u_{ij} \sqrt{y(N)} \quad \text{とすると, } u_{i,j+1} - u_{ij} = 1/\sqrt{y(N)} \quad \text{である.}$$

から補題 14 により

$$A^{**}(N) = \{1 + o(1)\} \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} e^{-\frac{u_{ij}^2}{2}} (u_{i,j+1} - u_{ij})$$

と書くことにしよう. ところで

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{s_i} e^{-\frac{u_{ij}^2}{2}} (u_{i,j+1} - u_{ij}) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

であるから補題を得る.

定理 4 の証明の完結. 補題 15 における $A^{**}(N)$ を定理 4 における $A(N)$ で置き換えることにすれば定理 4 が証明されたことになるが, $A^{**}(N)$ を $A(N)$ で置き換えることは, $A^{**}(N)$ を定義したときの不等式で, $\omega_N(n_i)$, $y(N)$ をそれぞれ

れ $\omega(n_i)$, $\log \log N$ で置換えることである。まず $\omega_N(n_i)$ を $\omega(n_i)$ で置換えるための影響を評価してみよう。そのために $A(N)$, $A^{**}(N)$ の中間に位置する $A^*(N)$ を導入する。次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を $A^*(N) = A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$ で表わす:

$$N = n_1 + \dots + n_k;$$

$$y(N) + \alpha_i \sqrt{y(N)} < \omega(n_i) < y(N) + \beta_i \sqrt{y(N)} \quad (i=1, \dots, k).$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n \leq N} \{\omega(n) - \omega_N(n)\} = \sum_{n \leq N} \sum_{p|n, p \notin P(N)} 1 \\ &= \sum_{p \leq N, p \notin P(N)} \left[\frac{N}{p} \right] \leq N \sum_{p \leq N, p \notin P(N)} \frac{1}{p} = N \left\{ \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} - y(N) \right\}, \end{aligned}$$

したがって補題 4 により

$$\sum_{n \leq N} \{\omega(n) - \omega_N(n)\} = O(N \log \log \log N) = o(N \sqrt{y(N)}).$$

そこで任意に与えられた正数 ε に対し, $n \leq N$, $\omega(n) - \omega_N(n) > \varepsilon \sqrt{y(N)}$ である n の集合を $\mathcal{B}(\varepsilon, N)$ で表わすと, その元の数は $N > N_1(\varepsilon)$ のとき εN より小さくなる。

よって正数 ε に対し, 次の条件を満たす正整数の組 $(n_1, \dots, n_k)$ の数を $B(\varepsilon, N)$ で表わす: $n_1 + \dots + n_k = N$; $\omega(n_i) - \omega_N(n_i) > \varepsilon \sqrt{y(N)}$ ($i=1, \dots, k$) の少なくとも一つが成り立つ。

$B(\varepsilon, N)$ をこのように定義すると

$$A^{**}(N; \alpha_1, \beta_1 - \varepsilon, \dots, \alpha_k, \beta_k - \varepsilon) - B(\varepsilon, N)$$

$$\leq A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$$

$$\leq A^{**}(N; \alpha_1 - \varepsilon, \beta_1, \dots, \alpha_k - \varepsilon, \beta_k) + B(\varepsilon, N).$$

そこで $\forall \varepsilon > 0$ について $\Phi(\varepsilon, N)$ に関して得た上の結果から, 対称性を考慮

して, $N > N_1$ のとき

$$B(\varepsilon, N) \leq k \sum_{n_1 \in \Phi(\varepsilon, N)} \sum_{n_2 + \dots + n_k = N - n_1} 1 < k\varepsilon N^{k-1}.$$

ゆえに

$$A^{**}(N; \alpha_1, \beta_1 - \varepsilon, \dots, \alpha_k, \beta_k - \varepsilon) - k\varepsilon N^{k-1}$$

$$< A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)$$

$$< A^{**}(N; \alpha_1 - \varepsilon, \beta_1, \dots, \alpha_k - \varepsilon, \beta_k) + k\varepsilon N^{k-1}.$$

この不等式の各辺を N^{k-1} で割って補題 15 を適用すると

$$\frac{1}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i - \varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}} du - k\varepsilon$$

$$\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)}{N^{k-1}} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)}{N^{k-1}}$$

$$\leq \frac{1}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i - \varepsilon}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du + k\varepsilon.$$

ε は任意の正数であるから結局

$$(16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A^*(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)}{N^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

今度は (16) において $A^*(N)$ を $A(N)$ で置き換えたものの¹⁾あ
るが, それは $A^*(N)$ を定義するときの不等式における $y(N)$

$\varepsilon \log \log N$ を ε に置き換えることはできる。補題 4 により $y(N) \sim \log \log N$ であるから、任意に与えられた正数 ε に対して、
 $N > N_2(\varepsilon)$ のとき、

$$\begin{aligned} y(N) + (\alpha_i - \varepsilon) \sqrt{y(N)} &< \log \log N + \alpha_i \sqrt{\log \log N} \\ &< y(N) + (\alpha_i + \varepsilon) \sqrt{y(N)} \quad (i=1, \dots, k), \\ y(N) + (\beta_i - \varepsilon) \sqrt{y(N)} &< \log \log N + \beta_i \sqrt{\log \log N} \\ &< y(N) + (\beta_i + \varepsilon) \sqrt{y(N)} \quad (i=1, \dots, k). \end{aligned}$$

したがって $N > N_2$ のとき

$$\begin{aligned} A^*(N; \alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon, \dots, \alpha_k + \varepsilon, \beta_k - \varepsilon) \\ &< A(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k) \\ &< A^*(N; \alpha_1 - \varepsilon, \beta_1 + \varepsilon, \dots, \alpha_k - \varepsilon, \beta_k + \varepsilon). \end{aligned}$$

この不等式の各辺を N^{k-1} で割って、 $N \rightarrow \infty$ とすると、(16) により

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i + \varepsilon}^{\beta_i - \varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)}{N^{k-1}} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k)}{N^{k-1}} \\ &\leq \frac{1}{(k-1)!} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \int_{\alpha_i - \varepsilon}^{\beta_i + \varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

ε は任意の正数であったから定理 4 の成り立つことがわかった。

集合 $P(N)$ を導入したのは、いわゆる切断法 (truncation method) で確率論で有効に用いられる方法である。また補題 3 から補題 5 を導いたのは実質的には篩 (ふるい) 法 (sieve method) である。

文 献

- [1] P. Erdős and M. Kac, The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, Amer. J. Math., 62 (1940), 738-742.
- [2] G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford.
- [3] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers, Jap. J. Math., 25 (1955), 1-20.
- [4] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers II, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 171-191.
- [5] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers III, Jap. J. Math., 27 (1957), 103-127.
- [6] M. Tanaka, On the number of prime factors of integers IV, Jap. J. Math., 30 (1960), 55-83.