

線織面の自己同型群について.

京大 理 丸 山 正 樹

§ 1 序

代数的多様体の自己同型群に“代数群”の構造(連結成分の数が可算無限個かもしれない)が自然に入るのは古くから知られている。また, n 次射影空間 P^n の非特異超曲面の自己同型群の計算は, [6] において詳しく述べられている。ところで代数曲面の場合を考えてみると, 自己同型群の連結成分(単位元と含むもの)の線型部分が自明でない時, その曲面が線織面になり, 線型部分が自明で, 連結成分の次元が 1 ならば楕円曲面, 次元が 2 ならばトーペル多様体になる [4]。

この小論の目的は線織面の自己同型群を計算し, その応用と述べることにある。いずれどこかに発表するつもりなので詳しい証明などは述べてない。

以下 k と任意標数の代数的閉体, X を k 上定義された完備な非特異既約代数曲線とする。 (S, X, π) を X 上の線織面 S

と, S から X への自然な射影 π (i.e. $S \xrightarrow{\pi} X$, $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}^1$, $\forall x \in X$) の組を表わす. $\text{Aut}(S)$ を S の自己同型群, $\text{Aut}_X(S) = \{\sigma \in \text{Aut}(S) \mid \sigma \circ \pi = \pi\}$ とする. $\text{Aut}^0(S)$, $\text{Aut}_X^0(S)$ 等はそれぞれの単位元を含む連結成分を表わす.

主目標は, 線織面 (S, X, π) について $\text{Aut}(S)$ を求めることにあるが, 方針は次の様である: よく知られている様に線織面 (S, X, π) が与えられた時, X 上階数2のベクトルバンドル E が存在して, $(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる. そこで, まず $\text{Aut}(E)$ を調べ, 次に $\text{Aut}_X(P(E))$ を調べ, 最後 $\text{Aut}(P(E))$ まで持っていく. それぞれ途中と適当な補題をつなぐわけである.

§2 $\text{Aut}(E)$.

E を X 上の階数2のベクトルバンドルとする. E の階数1の部分バンドルの全体と考えると, その degree は上に有界である. そこで最下の degree を持つ部分バンドルと極大部分バンドルと言い, その degree を $M(E)$ で表わす. $N(E) = \deg E - 2M(E)$ とおく.

定理1. E を X 上の階数2のベクトルバンドルとする.

$$(1) \quad N(E) > 0 \Rightarrow \text{Aut}(E) \cong G_m$$

$$(2) \quad N(E) \leq 0, E \text{ indecomposable, } L \text{ 極大部分バンドル (こ}$$

の場合は一意的) $\Rightarrow \text{Aut}(E) \cong H_r$

$$\colon \tau, \quad r = \dim T(X, (\det E)^{-1} \otimes \underline{L}^2),$$

$$H_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) \in GL(2, k) \times \dots \times GL(2, k), \right. \\ \left. \begin{array}{l} \alpha \in G_m \\ t_i \in k \end{array} \right\} \quad \text{とおく.}$$

(3) $E \cong L_1 \otimes L_2$, $\deg L_1 \geq \deg L_2$, $L_1 \not\cong L_2 \Rightarrow \text{Aut}(E) \cong H'_r$

$$\colon \tau, \quad r = \dim T(X, (\det E)^{-1} \otimes \underline{L}_1^2),$$

$$H'_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) \in GL(2, k) \times \dots \times GL(2, k) \mid \begin{array}{l} \alpha, \beta \in G_m \\ t_i \in k \end{array} \right\}$$

とおく.

(4) $E \cong L \otimes L \Rightarrow \text{Aut}(E) \cong GL(2, k)$.

証明には次の補題を使う. 少し工夫がいるがそれほど難しくはない.

補題1 E を定理1と同じとし, L_1, L_2 を E の極大部分バンドルで互いに異なるとする $\Rightarrow E \cong L_1 \otimes L_2$.

この補題は [2] の補題1.5 である.

§3. $\text{Aut}_X(S)$

(S, X, π) を線織面とする. X 上の階数2のベクトルバンドル E が存在して, $(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる. すなわち

$\exists \varphi: S \xrightarrow{\sim} P(E), \quad \pi = \pi' \circ \varphi$ となる. 次の補題は A. Grothendieck によるものである [1]

補題 2. E を連結な局所ネーター前概型 Y 上のベクトルバンドルとする. $\Delta = \{N \mid N \text{ は } E \otimes N \cong E \text{ となるような階数 1 のベクトルバンドルの同型類}\}$ とおく. この時, 次の完全系列がある:

$$e \longrightarrow \text{Aut}(E/\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*)) \longrightarrow \text{Aut}_Y(P(E)) \longrightarrow \Delta \longrightarrow e.$$

我々の場合は, $Y = X$ かつ $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathbb{G}_m$, 而 Δ は Jacobian 多様体の 2-torsion part の部分群になる. Δ について次の補題がある.

補題 3 (1) $N(E) \leq 0$, $N^2 \cong I$ (自明なバンドル) となる任意のバンドルについて $E \not\cong L \oplus (L \otimes N) \Rightarrow \Delta = \{e\}$

(2) $E \cong L \oplus (L \otimes N)$, $N^2 \cong I$, $N \not\cong I \Rightarrow \Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(3) $E \cong L \oplus L \Rightarrow \Delta = \{e\}$.

$P(E)$ の section Δ が最小の self-intersection number を持つ時, それを minimal-section と呼ぶ. Δ が minimal section として $(\Delta, \Delta) = N(E)$ ($N(E)$ は $P(E)$ による, 以下 $N(P(E))$, $N(S)$ の記号を使う. また minimal-section と E の極大部分バンドルの間に一対一対応が成り立ち, L を極大部分バンドルとすると,

$$(\det E) \otimes L^{-2} \text{ が定める } X \text{ 上の divisor class} = \pi(\Delta, \Delta) \text{ (}\Delta \text{ と } \Delta \text{ の交わりを } X \text{ の上に射影した divisor class)}$$

したがって, 補題 2, 3 を使うと定理 1 は次の定理 2 の形になる.

定理 2. (S, X, π) を線織面とする.

(1) $N(S) > 0 \Rightarrow \text{Aut}_X(S) \cong \Delta$, Δ は補題 2 の中で定義した有限群 ($\subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\#X$ の種数) をなし, 補題 2 の E は, ここで $(P(E), X, \pi') \cong (S, X, \pi)$ となるもの.

(2) $N(E) \leq 0$, S indecomposable (i.e. $(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる E が indecomposable) $\Rightarrow \text{Aut}_X(S) \cong \underbrace{G_a \times \cdots \times G_a}_r$,
 $r = \dim |-\pi(\Delta \cdot \Delta)| + 1$, Δ は S の一意な minimal section.

(3) S : decomposable $\pi(\Delta \cdot \Delta) = \pi(\Delta' \cdot \Delta')$ となるような異なる minimal sections Δ, Δ' を持つ $\Rightarrow \text{Aut}_X(S) \cong \overline{H}_r$.
 ここで, $r = |-\pi(\Delta \cdot \Delta)| + 1$, Δ minimal section, $\overline{H}_r =$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mid \begin{matrix} t_1, \dots, t_r \in G_m \\ \alpha \in k \end{matrix} \right\}.$$

(4) S : decomposable, $S \not\cong P^1 \times X$, S は $\pi(\Delta \cdot \Delta) = \pi(\Delta' \cdot \Delta')$ となるような異なる minimal sections を持つ $\Rightarrow \text{Aut}_X(S) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in G_m \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in G_m \right\}$.
 したがって種は行列の種として演算し, さらに適当なスカラーで割った上の群に入るようにする.

(5) $S \cong P^1 \times X \Rightarrow \text{Aut}_X(S) \cong \text{PGL}(1, k)$.

§4 $\text{Aut}(S)$

次の補題は明かである.

補題 4 (S, X, π) を線織面とし, $S \not\cong P^1 \times P^1$ とする. この時次の完全系列がある.

5

$$e \longrightarrow \text{Aut}_X(S) \longrightarrow \text{Aut}(S) \xrightarrow{f} \text{Aut}(X).$$

実は、代数的多様体の自己同型群は本来、自己同型関手を表現するものとしてとらえるべきである。\$k\$ は閉体であり、\$S, X\$ は完備であるが、\$\text{Aut}(S), \text{Aut}(X)\$ は \$(Sch/k)_{\text{red}}\$ 上での関手と表現するものである [6]。また \$\text{Aut}_X(S)\$ も関手 \$\text{Aut}_{S/X}(T) = \ker(\text{Aut}_S(T) \longrightarrow \text{Aut}_X(T))\$ を表現する。したがって、上の完全列は代数群としての完全列である。(注 代数群として \$\ker f \cong \text{Aut}_X(S)\$)。

\$X\$ の種数が 2 以上であるならば \$\text{Aut}(X)\$ は有限群であるが、\$\text{Aut}^0(S)\$ を考える限りにおいて問題は同…。また、[2] で調べた命題を使えば、\$X\$ が楕円曲線で \$N(S) > 0\$ ならば \$\text{Im } f\$ は有限群であることがわかる。

(したがって、残ったのは次の場合である。

$$(1) S \cong \mathbb{P}^1 \times X$$

$$(2) X \text{ 有理曲線, } S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$(3) X \text{ 楕円曲線, } S \text{ indecomposable}$$

$$(4) X \text{ 楕円曲線, } S \text{ decomposable, } N(S)=0, \text{ さうな } S \cong \mathbb{P}^1 \times X.$$

(1) の場合は \$X \neq \mathbb{P}^1\$ ならば \$\text{Aut}(S) \cong \text{Aut}(X) \times \text{PGL}(1)\$ となり \$X \cong \mathbb{P}^1\$ ならば \$\text{Aut}(S) \cong ((\text{PGL}(1) \times \text{PGL}(1))) \cup \{V(\text{PGL}(1) \times \text{PGL}(1))\}\$ として、\$V\$ は \$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (x, y) \longrightarrow (y, x) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\$ なる自己同型であ

3.

(2) に含まれる曲面は、所謂 Hirzebruch surface Σ_n ($n > 0$) であり、(3) に含まれる曲面は 2 つの同型類 P_0, P_1 (Atiyah の記号、我々の [2] において P_0, P_1 なる記号を使った) がある。また (3) に含まれるものは P^1 で parametrize されている。

次の補題が基本的である。

補題 1. (i) 上の (2) と (3) の場合には、補題 4 の f は全射にある。

(ii) 上の (4) の場合、 Δ と S の minimal section として $\pi(\Delta \cdot \Delta) = \chi_0 - \chi$ とおく、ここで、 χ_0 は X の T-ベルヌ様体としての単位元とする。この時、 $\text{Im } f = \text{Aut}^0(X) \cup (\varphi_0 \text{Aut}^0(X)) \cup (\varphi_1 \text{Aut}^0(X)) \cup \dots \cup (\varphi_r \text{Aut}^0(X))$ 、ただし、 φ_0 (または $\varphi_i, 1 \leq i \leq r$) は $\varphi_0(y) = -y$ (または、 $\varphi_i(x) = x, 1 \leq i \leq r$) となるような、 X を T-ベルヌ様体とみでの自己同型。

証明には [2] で述べた elementary transformation によるモデールの構成法を使う。

さて、 f が全射になってモデール群の射としては全射でなくともいいない。すなわち、 f が分離的であるかどうかと見なければならぬ。そのために、 $\text{Lie}(\text{Aut}^0(S)) \xrightarrow{f_*} \text{Lie}(\text{Aut}^0(X))$ と調べる必要がある。前の Aut_S を表現する群概型が被約であるならば、 $\text{Lie}(\text{Aut}^0(S)) \cong H^0(S, \Theta_S)$ であるから、 $H^0(S, \Theta_S)$ を計

算して, f_* を調べればよいことになる. 問題の群構造が被写
かどうかが, 言い換えれば $\text{Aut}(S)$ が Aut_S と表現するかどうか
は, $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = \dim \text{Aut}(S)$ が成立するかどうかによる.
そこで, $H^0(S, \mathcal{O}_S)$ を計算してみると次の様になる.

補題 6 (S, X, π) を線織面とする. k の標数と p とする.

(1) X : 有理曲線, $N(S) = -n$ ($n \geq 0$) とする,

a) $n \neq 0 \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = n+1$.

b) $n=0$ (ie, $S \cong \mathbb{P}^1 \times X$) $\Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 2$.

(2) X : 楕円曲線, $N(S) = -n$ ($n \geq -1$) とする.

c) $p \nmid n$, $n \neq 0, -1 \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = n+1$

d) $p \mid n$, $n \neq 0, -1 \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = n+2$

e) $n=0$, S decomposable, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 2$.

f) $n=0$, S indecomposable (ie $S \cong \mathbb{P}_0$), $p \neq 2$

$\Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 2$

g) $n=0$, S indecomposable, $p=2 \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 3$.

h) $n=-1$, (ie, $S \cong \mathbb{P}_{-1}$) $\Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 1$.

i) $S \cong \mathbb{P}^1 \times X \Rightarrow \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) = 4$.

さて, 上の結果と定理 2, 補題 4, 5 を考慮に入れれば,
上の (a), (g) の場合に $\text{Aut}(S)$ が Aut_S と表現してはいないことがわ
かる. また問題の f_* が全射になるのは, (a) (b) (c) (f) (h) と
(k) で $p \neq 2$ の場合であることより, $H^0(S, \mathcal{O}_S)$ の元の具体的な形を

みることによりわかる。

定理 3. (S, X, π) を線織面とする。

(1) X : 有理曲線, $N(S) = n$ ($n > 0$) $\Rightarrow$ 次の代数群としての完全系列^{*}がある;

$$e \longrightarrow \overline{H}_{m-1} \longrightarrow \text{Aut}(S) \longrightarrow \text{PGL}(1) \longrightarrow e.$$

(2) X : 楕円曲線, S : decomposable, $N(S) = 0$, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X$

$\Rightarrow$ 次の代数群としての完全系列がある:

$$e \longrightarrow G \longrightarrow \text{Aut}(S) \longrightarrow \text{Aut}'(X) \longrightarrow e,$$

ここで, $\text{Aut}'(X)$ は補題 5 の (i) で定義した群であり, G は定理 2 の (3) の条件をみたすかどうかによって G_m か定理 2 の (4) の群かのいずれかである。さらに, $\text{Aut}^0(S)$ は, $\Delta_1, \Delta_2 \in S$ の minimal section として $S - \Delta_1 - \Delta_2$ に自然に可換群の構造を入れるものである。

(3) X : 楕円曲線, $S \cong \mathbb{P}^2$ $\Rightarrow$ 次の代数群の完全系列がある:

$$e \longrightarrow G_a \longrightarrow \text{Aut}(S) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

さらに, $\text{Aut}^0(S)$ は, $\Delta \in S$ の minimal section として, $S - \Delta$ に自然に可換群の構造を入れるものである。

^{*}) $e \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow e$ を代数群の系列とする。これが完全系列であるというのは, G' が G の代数群としての部分群であり, G/G' が代数群として G'' に同型であること。

(4) X : 楕円曲線, $S \cong \mathbb{P}^1$, k の標数は 2 でない

$\Rightarrow$ 次の代数群の完全系列がある;

$$e \longrightarrow \Delta \longrightarrow \text{Aut}(S) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

ここで, $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. さらに, $\Delta \cap \text{Aut}^0(S) = \Delta$.

証明は今までに述べてきたことを使えばほとんど問題ない。
ただ, (4) の最後の主張は, $\text{Aut}^0(S)$ の軌跡とファイバーとの交わりをみるために, 軌跡となりうる曲線を見つけなければならぬ。
これには少しめんどろな計算がいる。また, (4) の場合で k の標数が 2 でも, Δ を X の 2-torsion part として, $\text{Aut}(S)/\Delta \rightarrow \text{Aut}(X)$ なる射はできるが, それは決して分離的にならない。

§5. 応用

次の問題を考えよう。“線織面が同時に楕円曲面になるのはいつか?” この問題は $k = \mathbb{C}$ の時諏訪氏 [7] によってとられていたが, 且ち同型群の立場からみると, 一般の代数閉体の場合でも自然にとける (序参照) 結果は次の通りである。

定理 4. (S, X, π) を線織面, p を k の標数とする。

(1) S : 楕円曲面 $\Rightarrow X$: 楕円曲線

(2) $p = 0$ ならば, S が楕円曲面になるための必要十分条件は次の条件 (i), (ii) のいずれかを満足することである。

$$(i) \quad S \cong \mathbb{P}_1$$

(ii) S decomposable, $N(S)=0$, $\Delta \in S$ の minimal section として, $\pi(\Delta, \Delta) \in X$ の Torchi の様で torsion element になる.

(3) $p > 0$ ならば, S が楕円曲面になるための必要十分条件は, 上の (i), (ii) か下の (iii) のいずれかと満足することである.

$$(iii) \quad S \cong \mathbb{P}_0$$

$S \cong \mathbb{P}_1$ の場合 multiple fibre があるもの (2, 2, 2 type), (ii) の場合 2 本もの (r, r) type, r は $r\pi(\Delta, \Delta)=0$ となる最小のもの

参考文献

- [1] A. Grothendieck. Géométrie formelle géométrie algébrique, F.G.A.
- [2] M. Momiyama. On classification of ruled surfaces, Lect. in Math. Dept. Math. Kyoto Univ. 3 Kinokuniya (Tokyo) 1970,
- [3] M. Momiyama, On automorphism groups of ruled surfaces, to appear.
- [4] H. Matsumura, On algebraic groups of birational transformations, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 34 (1963).
- [5] H. Matsumura, P. Monsky. On the automorphisms of hypersurface. J. Math. Kyoto Univ. Vol 3 (1964).
- [6] H. Matsumura, F. Oort, Representability of group functors,

and automorphisms of algebraic schemes, Inv. Math. 4 (1967).

[7] T. Suwa, On ruled surface of genus 1 J. Math. Soc. Japan 21 (1969)