

Navier-Stokes 方程式の数値解法について

電気通信大学 情報数理工学科 中村正彰

Navier-Stokes 方程式の差分法を用いた近似解法は、多くの
人々によって研究されてきた。とくに Krăžvicki-Ladyženskaja は
Energy method を用いて、Implicit scheme の安定と収束を示した。

From, 高見は、流れの関数を用いて、 $\operatorname{div} u = 0$ の部分の難
しさを、克服しようとしたが、Temam は、 $\operatorname{div} u \neq 0$ なる関
数で解を近似しようとして、Cauchy-Kowaleska type の方程式
を導入して、分数差分法によって安定と収束を示した。

ここでは、境界の動く場合について、処罰法を用いて、解
の存在と単独性を示した藤田の理論にならって、Penalty のつ
いた方程式を、Cauchy-Kowaleska type にして、陽差分 scheme
を用いて近似する。そしてその scheme の安定と収束を論ずる
ことにしたい。

§§ Notation

 $T > 0$. $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $t \in [0, T]$, 境界は滑らか. $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$, $\hat{\Gamma} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma(t)$, $\hat{\Omega} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega(t)$ $B \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. ∂B 滑らか. $\Omega(t) \subset B$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $\partial\Omega$ 滑らか. $D_0(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \varphi \subset \Omega, \text{div } \varphi = 0 \}$ $H_0(\Omega) = D_0(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ norm に対する完備化 $V(\Omega) = D_0(\Omega)$ の $H_0^1(\Omega)$ norm に対する完備化 $\hat{G} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2$ 有界領域. $\hat{D}_0(\hat{G}) = \{ \varphi \in C^\infty(\hat{G}) \mid \text{supp } \varphi \subset \hat{G}, \text{div } \varphi = 0 \}$ $\hat{V}(\hat{G}) = \hat{D}_0(\hat{G})$ の $\|\cdot\|_V$ norm に対する完備化

$$\|u\|_V = \iint_{\hat{G}} |\nabla u|^2 dx dt.$$

 $\mathcal{D}_0(\hat{G}) = \{ \varphi \in \hat{D}_0(\hat{G}) \mid \varphi(T, x) = 0 \}$ $\mathcal{U}(\hat{\Omega}) = \{ u \in \hat{V}(\hat{G}) \mid \text{ess. sup}_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega(t))} < \infty \}$

§1.

まず問題と定理をあげておく.

領域に対する仮定.

(AI). $\forall t \in [0, T]$. $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $T(t) = \partial\Omega(t)$ 滑らか(AII). $\exists B \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. ∂B 滑らか. $\Omega(t) \subset B \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{dist}(\partial B, T(t)) > \delta_0 > 0 \quad \forall t.$ (AIII) $\Omega(t)$ は t に関して滑らか.

問題1.

 $u_0 \in H_0(\Omega(0)), f \in L_2(0, T; H_0)$ が与えられたとき. $u \in L_2(0, T; V(\Omega(t)) \cap L_\infty(0, T; H_0(\Omega(t)))$ で

$$\int_0^T \{ -(u, \varphi'(t))_t + v((u(t), \varphi(t))_t + b(u(t), u(t), \varphi(t))_t \} dt \\ = \int_0^T (f(t), \varphi(t))_t dt + (u_0, \varphi(0))_0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_0(\Omega)$$

を見つけてよ.

問題II.

 $u_0 \in H_0(\Omega(0)), p_0 \in L_2(\Omega(0)), f \in L_2(0, T; H_0)$ given.Find. $u_{\varepsilon n} \in L_2(0, T; H_0'(B)) \cap L_\infty(0, T; L_2)$ $p_{\varepsilon n} \in L_\infty(0, T; L_2(B))$ such that

$$\int_0^T \{ -(u_{\varepsilon n}(t), \varphi'(t))_t - \varepsilon (p_{\varepsilon n}(t), \psi'(t))_t + v((u_{\varepsilon n}(t), \varphi(t))_t \\ + n(\chi u_{\varepsilon n}; \varphi(t))_t + b(u_{\varepsilon n}(t), u_{\varepsilon n}(t), \varphi(t))_t$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon (p_{\varepsilon n}(t), \operatorname{div} \varphi(t))_+ + (\psi, \operatorname{div} u_{\varepsilon n}(t)) \} dt \\
& = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0)) + \varepsilon (p_0, \varphi(0)) \\
& \quad \varphi \in C(0, T; H_0^1(B)), \varphi' \in L_2(0, T; L_2(B)), \varphi(T) = 0 \\
& \quad \psi \in C(0, T; L_2(B)), \psi' \in L_2(0, T; L_2(B)), \psi(T) = 0
\end{aligned}$$

ここで

$$i) b(u, v, w)_+ = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 u_i \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j - v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dx$$

$$ii) \chi(t, x) = 1 \quad x \in \overset{\Omega(t)}{\Omega}, x \in B \quad 0, \quad x \in \Omega(t)$$

$$(注1). b(u, u, v)_+ = (u, \nabla u + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u)u, v)_+$$

$$\text{従, } \varepsilon \operatorname{div} u = 0 \quad \text{ならば} \quad b(u, u, v) = (u, \nabla u, v)$$

$$\text{また} \quad b(u, u, v) = 0$$

(注2) 問題IIの方程式は

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u)u + n \chi u + \nabla p = f \\
\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} u = 0 \\
u|_{\partial B} = 0 \\
u(0, x) = \bar{u}_0, \quad p(0, x) = \bar{p}_0
\end{cases}$$

を介するものである。

Theorem I.

$\nu \geq 0, \quad \varepsilon n > 0$ fixed とすると

$$\begin{aligned}
\exists 1. \quad & u_{\varepsilon n} \in L_\infty(0, T; L_2(B)) \cap L_2(0, T; V) \quad \left. \vphantom{u_{\varepsilon n}} \right\} \text{問題IIの解} \\
& p_{\varepsilon n} \in L_\infty(0, T; L_2(B))
\end{aligned}$$

その上に

$$|u_{\varepsilon n}(t)|^2 + \int_0^T \|u_{\varepsilon n}(t)\|^2 dt + n \int_0^T |\chi u_{\varepsilon n}(t)|^2 dt + \varepsilon |p_{\varepsilon n}(t)|^2 \leq C$$

$$C = \text{const.}(u_0, p_0, v, T, f)$$

Theorem II.

$\varepsilon \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$ のとき

$$u_{\varepsilon n} \rightarrow w \quad \text{in } L_2(0, T; H^1(B)), \quad w^* - L_\infty(0, T; L_2(B))$$

そして

$u = w|_{\Omega(t)}$ は 問題 I の解.

注) Th I, Th II の証明は省略するが, Th I は Galerkin 法で, 存在を示し, 単独性は $\mathbb{R}^2$ における Sobolev の補助定理を使う. Th II は, 問題 I の解に対して Energy equality が成立することを利用して示す.

注) $\frac{\partial p_{\varepsilon n}}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{in } L^1(\bar{B}) \quad i=1, 2$ も示すことができる.

§2. Explicit scheme.

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = R, \quad \Delta t = R = 1/N,$$

$$\Omega(R) = \{ (iR, jR) \mid i, j \in \mathbb{Z}, (iR, jR) \in \Omega \}$$

$$\Omega(R)^\circ = \{ (iR, jR) \in \Omega(R) \mid ((i \pm 1)R, jR), (iR, (j \pm 1)R) \in \Omega(R) \}$$

$$S(R) = \Omega(R) - \Omega(R)^\circ$$

$$B(R), B(R)^\circ, \quad B(R) - B(R)^\circ = S(R) \text{ について } \text{同じ}$$

$$\tau(M, 0) = \prod_{i=1}^2 (\mu_i - \frac{1}{2}h, \mu_i + \frac{1}{2}h) \quad M = (\mu_i, l_i)$$

$w_{\alpha M} = \tau(M, 0)$ の定義函数

$$u_h(x) = \sum_{M \in B(h)} u_h(M) w_{\alpha M}(x)$$

$$V_h = \{ u_h(x) \mid u_h(x) = \sum_{M \in B(h)} u_h(M) w_{\alpha M}(x) \}$$

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{1}{h} \{ u_h(x + h e_i) - u_h(x) \} \quad e_i = (\delta_{ij})$$

$$\bar{\nabla}_i u_h(x) = \frac{1}{h} \{ u_h(x) - u_h(x - h e_i) \}$$

$$(u_h, v_h) = \int_B u_h(x) v_h(x) dx = h^2 \sum_{M \in B(h)} u_h(M) v_h(M)$$

$$\|u_h\|_h^2 = (u_h, u_h)$$

$$((u_h, v_h)) = h^2 \sum (\nabla_i u_h(M)) (\bar{\nabla}_i v_h(M)), \|u_h\|_h^2 = ((u_h, u_h))$$

$$P_h: L_2(B) \longrightarrow V_h$$

$$(P_h u)(M) = \frac{1}{|B|} \int_B u(x) dx \quad |P_h|_h \leq 1$$

$$P_h^m: L_2(\Omega; L_2(B)) \xrightarrow{\tau(M, 0)} V_h$$

$$P_h^m f = f_h^m = \frac{1}{h} \sum_{(m-1)h}^{mh} (P_h f)(s) ds \quad \text{とある.}$$

Proposition 1.

1) $\forall u_h \in V_h$ に対して.

$$\|u_h\|_h \leq C_0 \|u_h\|_h \quad C_0 = \text{diameter of } B.$$

2) $\forall u_h \in V_h$ に対して

$$\|u_h\|_h \leq S(h) \|u_h\|_h \quad S(h) = \frac{2}{h}$$

(注) 1) は Poincaré の不等式の差分化であり, 2) は V_h が有限次元空間であることから簡単に示される。

Explicit scheme (I)

$$\text{I-1)} \quad \frac{1}{k} \{ v_e^{n+1} - v_e^n \} - \sum_{i=1}^2 \bar{D}_i \cdot \nabla_i v_e^n + g_e(v_e^n, v_e^n) + \frac{1}{2} (\nabla_i + \bar{\nabla}_i) p_e^n + n \chi^n v_e^n = f_e^{n+1} \quad B(e)$$

$$\text{I-2)} \quad \frac{1}{k} \{ \varepsilon p_e^{n+1} - \varepsilon p_e^n \} + d_e(v_e^n) = 0 \quad B(e)^0$$

$$\text{I-3)} \quad v_e^{n+1} | S(k) = 0$$

$$\text{I-4)} \quad p_e^{n+1} | S(k) = p_e^n(M) \quad M \text{ は } S(k) \text{ の点に最短距離にある格子点}$$

$$\text{I-5)} \quad v_e^0 = \bar{u}_{0,k}$$

$$p_e^0 = \bar{p}_k$$

ここで

$$6) \quad d_e(v_e) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (\nabla_i + \bar{\nabla}_i) v_e^i$$

$$7) \quad g_e(u_e, v_e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{ u_e^i \cdot \nabla_i v_e^i + (\nabla_i u_e^i) \cdot v_e^i + u_e^i \cdot \nabla_i v_e^i \}$$

$$u_e^k = u(x + k e_k)$$

$$8) \quad G_e(u_e, v_e, w_e) = (g_e(u_e, v_e), w_e)_e \quad \text{と} \quad \text{する}$$

すると $S(k)$ で 0 と なるような u_e, v_e, w_e に対しては

$$9) \quad G_e(u_e, v_e, v_e) = 0$$

$$10) \quad |G_e(u_e, v_e, w_e)| \leq 1$$

$$\leq |u_e|^{\frac{1}{2}} \|u_e\|^{\frac{1}{2}} \{ \|v_e\| |w_e|^{\frac{1}{2}} \|w_e\|^{\frac{1}{2}} + |v_e|^{\frac{1}{2}} \|v_e\|^{\frac{1}{2}} \|w_e\| \}$$

証明は Temam「」参照.

(注) $g_e(u_e, u_e)$ は $u \cdot \nabla u + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u) \cdot u$ の差分化である.

✱

A priori estimate for Scheme I.

Theorem III.

$(h, k) \in$

$$(1) \nu - 5k \left[S(h)^2 \{ \nu^2 + 2M e^{kT} \} + \frac{2k}{\varepsilon} \right] \geq \delta > 0$$

$$(2) 2 - 5kn \geq \delta$$

$$(3) K\varepsilon \geq 10kS(h)^2$$

とすると $0 \leq m \leq N$ に対して

$$(4) |v^{m+1}|^2 + \varepsilon |p^m|^2 \leq C \quad C \text{ は } \varepsilon, k, n, h \text{ に よ る 定 数.}$$

$$(5) k \sum_{j=0}^m \|v_h^j\|^2 \leq C.$$

$$(6) k \sum_{j=0}^m n |\chi^j v_h^j|^2 \leq C$$

ここで

M, K は ε, n, k, h に よ る 定 数 である。

(証明)

I-1) と $2k v_h^m$ の内積をとり

$$\begin{aligned} \text{I-1')} \quad & |v_h^{m+1}|^2 - |v_h^m|^2 - |v_h^{m+1} - v_h^m|^2 + 2\nu k \|v_h^m\|^2 + 2kn |\chi^m v_h^m|^2 \\ & + 2k G_h(v_h^m, v_h^m, v_h^m) + 2k \left(\frac{1}{2} (\nabla_i + \bar{\nabla}_i) p_h^m, v_h^m \right) = 2k (f_h^{m+1}, v_h^m) \end{aligned}$$

I-2) と $2k p_h^m$ の内積をとり

$$\text{I-2')} \quad \varepsilon |p_h^{m+1}|^2 - \varepsilon |p_h^m|^2 - \varepsilon |p_h^{m+1} - p_h^m|^2 + 2k (d_h(v_h^m), p_h^m) = 0$$

$$- \bar{\chi} \cdot (d_h(v_h^m), p_h^m) = - (v_h^m, \frac{1}{2} (\nabla_i + \bar{\nabla}_i) p_h^m)$$

よって I-1') + I-2') は

$$|v_h^{m+1}|^2 + \varepsilon |p_h^{m+1}|^2 - |v_h^m|^2 - \varepsilon |p_h^m|^2 + 2\nu k \|v_h^m\|^2 + 2kn |\chi^m v_h^m|^2$$

$$= |v_k^{m+1} - v_k^m|^2 + \sum |p_k^{m+1} - p_k^m|^2 + 2k(f_k^{m+1}, v_k^m)$$

→

$$\left(\frac{\sum}{k} \{p_k^{m+1} - p_k^m\}, p_k^{m+1} - p_k^m\right) + (d_k(v_k^m), p_k^{m+1} - p_k^m) = 0$$

$$2 \sum |p_k^{m+1} - p_k^m|^2 = -2k(d_k(v_k^m), p_k^{m+1} - p_k^m)$$

$$\leq 2k |d_k(v_k^m)| |p_k^{m+1} - p_k^m|$$

$$\leq 2k\sqrt{2} \|v_k^m\| |p_k^{m+1} - p_k^m|$$

$$\leq \sum |p_k^{m+1} - p_k^m|^2 + \frac{2k}{\sum} \|v_k^m\|^2$$

∴ (以後 v_k^m の $k \in \mathbb{N}$ 有 $\epsilon < \delta$ あり)

$$\begin{aligned} 2|v^{m+1} - v^m|^2 &= -2kv((v_k^m, v_k^{m+1} - v_k^m) - 2kG_k(v_k^m, v_k^m, v_k^{m+1} - v_k^m) \\ &\quad - 2kn(\chi v_k^m, v_k^{m+1} - v_k^m) - 2k(d_k(v^{m+1} - v^m), p^m) \\ &\quad + 2k(f^{m+1}, v^{m+1} - v^m)) \end{aligned}$$

∴

$$2kv|((v_k^m, v_k^{m+1} - v_k^m))| \leq 2kv \|v^m\| \|v^{m+1} - v^m\|$$

$$\leq 2kv S(k) \|v^m\| |v^{m+1} - v^m|$$

$$\leq \frac{1}{5} |v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2 S(k)^2 \|v^m\|^2$$

$$2k|G_k(v_k^m, v^m, v^{m+1} - v^m)| \leq \frac{1}{5} |v^{m+1} - v^m|^2 + 10k^2 S(k)^2 |v_k^m|^2 \|v_k^m\|^2$$

$$|2k(f^{m+1}, v^{m+1} - v^m)| \leq 2k |f^{m+1}| |v^{m+1} - v^m|$$

$$\leq \frac{1}{5} |v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2 |f^{m+1}|^2$$

$$|2kn(\chi v^m, v^{m+1} - v^m)| \leq 2kn |\chi v^m| |v^{m+1} - v^m|$$

$$\leq \frac{1}{5} |v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2 n^2 |\chi v^m|^2$$

$$|2k(d_k(v^{m+1} - v^m), p^m)| \leq 2k\sqrt{2} |p^m| \|v^{m+1} - v^m\|$$

$$\leq 2\sqrt{2}kS(\ell)|p^m||v^{m+1}-v^m|$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}|v^{m+1}-v^m|^2 + 10k^2S(\ell)^2|p^m|^2$$

$$(2k(f^{m+1}, v^m)) \leq 2k|f^{m+1}||v^m| \leq 2kC_0|f^{m+1}||v^m|$$

$$\leq kv||v^m||^2 + \frac{kC_0^2}{\nu}|f^{m+1}|^2$$

よ、 τ までとめると

$$\begin{aligned} & |v^{m+1}|^2 + \varepsilon|p^{m+1}|^2 - |v^m|^2 - \varepsilon|p^m|^2 + (2-5kn)kn|\chi v^m|^2 \\ & + \left[\nu k - 5k^2\nu^2S(\ell)^2 - 10k^2S(\ell)^2|v^m|^2 - \frac{2k^2}{\varepsilon} \right] ||v^m||^2 \\ & \leq 10k^2S(\ell)^2|p^m|^2 + \left(\frac{kC_0^2}{\nu} + 5k^2 \right) |f^{m+1}|^2 \end{aligned}$$

$$L_m = k \left[\nu - 5kS(\ell)^2 \left\{ \nu^2 + 2|v^m|^2 \right\} - \frac{2k}{\varepsilon} \right] \quad \text{とある}$$

$m=0$ から m まで加えると

$$\begin{aligned} & |v^{m+1}|^2 + \varepsilon|p^{m+1}|^2 + k \sum_{\ell=0}^m L_\ell ||v^\ell||^2 + k \sum (2-5kn)n|\chi v^\ell|^2 \\ & \leq k \sum_{\ell=0}^m 10k^2S(\ell)^2|p^\ell|^2 + k \left(\frac{C_0^2}{\nu} + 5k \right) \sum_{\ell=0}^m |f^{\ell+1}|^2 + |v^0|^2 + \varepsilon|p^0|^2 \end{aligned}$$

$$M_m = |v^0|^2 + \varepsilon|p^0|^2 + k \left(\frac{C_0^2}{\nu} + 5k \right) \sum_{\ell=0}^m |f^{\ell+1}|^2 \quad \text{とある}$$

$$M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_m \leq \dots \leq M = |v^0|^2 + \varepsilon|p^0|^2 + \left(\frac{C_0^2}{\nu} + 5T \right) \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

よ、 τ

とし $m=0, \dots, m < N$ まで, $2-5kn \geq \delta$

$$L_m \geq \delta > 0, \quad 10k^2S(\ell)^2/\varepsilon \leq K. \quad K \text{ (任意に大きい数)}$$

ならば

$$|v^{m+1}|^2 + \varepsilon|p^{m+1}|^2 \leq C = Me^{kT}$$

$$k \sum ||v_\ell^2||^2 < C$$

$$k \sum n|\chi^m v^m|^2 \leq C$$

$$C \text{ は } \varepsilon, k, n, \ell \text{ による定数}$$

lemma 1.

$$\begin{aligned}
 U^m \geq 0 \quad & U^{m+1} \leq k \sum_{\ell=0}^m U^\ell + M_1, \quad U^0 \leq M_2 \\
 \Rightarrow \quad & U^{m+1} \leq C \quad C = C(M_1, M_2) \quad \forall m.
 \end{aligned}$$

(証明終り)

従, 2

Theorem IV

$$K_k U_k(x) \in L_\infty(0, T, L_2(B)) \quad \text{stable}, \quad L_2(0, T, L_2(B)) \text{ stable}$$

$$\Pi_k U_k \in L_2(0, T, L_2(B)) \quad \text{stable}$$

If. (1), (2), (3) が満たされていり, $\gamma \neq 1$

$$(1) \quad v - 5k [S(x)^2 \{v^2 + 2Me^{kT}\} + \frac{2k}{\varepsilon}] \geq \delta > 0$$

$$(2) \quad 2 - 5kn \geq \delta > 0, \quad (3) \quad K_2 \geq 10kS(x)^2$$

そこで

$$K_k: V_k \rightarrow L_2(B), \quad \Pi_k: V_k \rightarrow L_2(B)$$

$$K_k U_k = U_k|_B, \quad \Pi_k U_k = (\nabla_1 U_{k1}, \nabla_2 U_{k2})|_B$$

$$U_k(t) = v_k^m \quad m_k \leq t \leq (m+1)k$$

Theorem V

$$\varepsilon \downarrow 0, \quad n \uparrow \infty, \quad k, h \downarrow 0$$

ただし, (1), (2), (3) を満たすものとする

$$K_k U_k \rightarrow u \quad L_2(0, T, L_2(B)), \quad w^+ - L_\infty(0, T, L_2(B))$$

$$\Pi_k U_k \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad w - L_2(0, T, L_2(B))$$

//

(証明) Th IV から

$\Rightarrow u_k, u_{k'} \in$

$$u_k, u_{k'} \rightarrow u \quad w \in L_2(0, T; L_2^1(B)), w^* \in L_\infty(0, T; L_2(B))$$

あとは次の lemma

lemma 2.

$$u_k, u_{k'} \rightarrow u \quad u \in L_2(0, T; L_2(B))$$

$$(\text{定義}) \quad \chi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & [-k, 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\chi_k^T(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} & [T-k, T) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{とおく}$$

$$\frac{1}{k} \{ u_k(t+k) - u_k(t) \} = \frac{d}{dt} \chi_k(t) * u_k(t)$$

よ、 $\sim$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\chi_k * u_k(t), v_k) + v((u_k(t), v_k)) + B(u_k(t), u_k(t), v_k) \\ + (n \chi_k u_k(t), v_k) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} (D + \bar{D}) p_k(t), v_k \right) \\ = (f_k(t), v_k) + (u_k^0, v_k) \chi_k(t) - (u_k^N, v_k) \chi_k^T(t) \end{aligned}$$

ところで

$$L: V_k \rightarrow V_k \text{ 在}$$

$$\begin{aligned} ((L w_k, v_k)) &= (f_k, v_k) - v((u_k, v_k)) - B(u_k, u_k, v_k) \\ &\quad + (n \chi_k u_k, v_k) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} (D + \bar{D}) p_k(t), v_k \right) \end{aligned}$$

で定めると線型はあきらか

$$|((L w_k, v_k))| \leq |f_k| |w_k| + v \|u_k\| \|v_k\| + C \|u_k\| \|u_k\| \|v_k\|$$

$$\begin{aligned}
& + n|Xu_a| \|v_a\| + \varepsilon |p_a| \|v_a\| \\
& \leq \{C(\|f_a\| + v \|u_a\| + \varepsilon |p_a| + n|Xu_a| + C\|u_a\|\|u_a\|)\} \|v_a\|
\end{aligned}$$

よって

$$\exists g_k(t) \in V_a \text{ such that } \int_0^T \|g_k(t)\|^2 dt \leq C$$

$$\widehat{g}_a = \begin{cases} g_a & t \in [0, T] \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

すると

$$\frac{d}{dt} (X_k + u_a, v_a) = ((\widehat{g}_a, v_a)) + (u_a^0, v_a) X_k(t) - (u_a^N, v_a) X_k^T(t)$$

Fourier 変換をとると

$$\begin{aligned}
-2\pi i \tau (\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau), v_a) &= ((\widehat{g}_a, v_a)) + (u_a^0, v_a) \widehat{X}_k(\tau) \\
&\quad - (u_a^N, v_a) \widehat{X}_k^T(\tau)
\end{aligned}$$

$$v_a = \widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau) \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}
-2\pi i \tau |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|^2 &\leq ((\widehat{g}_a, \widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau))) + (u_a^N | \widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau) \\
&\quad + |u_a^0| |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|
\end{aligned}$$

よって

$$2\pi |\tau| |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|^2 \leq \|\widehat{g}_a(\tau)\| \|\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)\| + (|u_a^0| + |u_a^N|) |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|$$

よって

$$2\pi |\tau| |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|^2 \leq C \|\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)\| + C |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|$$

$$\therefore |\tau| |\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)|^2 \leq C \|\widehat{X}_k(\tau) \widehat{u}_a(\tau)\|$$

よって

$$0 < \tau < \frac{1}{4} \text{ と } |\tau|$$

$$\begin{aligned}
& (v^{m+1} - v^m, \psi^m w_k) + \nu k \sum_{n=1}^{N-1} ((v^m, \psi^m w_k)) + k n (\chi v^m, \psi^m w_k) \\
& + k g_k(v^m, v^m, \psi^m w_k) - k \left(\frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) p^m, \psi^m w_k \right) \\
& = k (f^{m+1}, \psi^m w_k)
\end{aligned}$$

$m=0, \dots, N-1 \exists \tau \in \mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{N-1} (v^{m+1} - v^m, \psi^m w_k) + \nu k \sum_{n=1}^{N-1} ((v^m, \psi^m w_k)) \\
& + k \sum_{n=1}^{N-1} g_k(v^m, v^m, \psi^m w_k) + k \sum_{n=1}^{N-1} n (\chi v^m, \psi^m w_k) \\
& - k \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) p^n, \psi^m w_k \right) = k \sum_{n=1}^{N-1} (f^{m+1}, \psi^m w_k)
\end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned}
& - \sum (v^{m+1}, (\psi^{m+1} - \psi^m) w_k) + \nu k \sum ((v^m, \psi^m w_k)) \\
& + k \sum n (\chi v^m, \psi^m w_k) + k \sum g_k(v^m, v^m, \psi^m w_k) \\
& - k \sum \left(\frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) p^m, \psi^m w_k \right) \\
& = (v_k^0, \psi^0 w_k) + k \sum (f^{m+1}, \psi^m w_k)
\end{aligned}$$

すなわち

$$- \sum \left(\frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) p^m, \psi^m w_k \right) = \sum (p_k^m, \frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) \psi^m w_k)$$

これは

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\{ - (u_k(t), \frac{\psi_k(t+k) - \psi_k(t)}{k} p_k w) + \nu (u_k(t), \psi_k(t) p_k w) \right. \\
& + b_k(u_k(t), u_k(t), \psi_k(t) p_k w) + n(\chi u_k, \psi_k(t) p_k w) \\
& \left. + (p_k^m, \frac{1}{2} (D_i + \bar{D}_i) \psi_k p_k w) \right\} dt \\
& = (u_k(0), \psi_k(0) p_k w) + \int_0^T (f_k(t), \psi_k(t) p_k w) dt
\end{aligned}$$

である。

従って k, ε, n, R は 無限にも, $\varepsilon \neq 0$ と

$$\int_0^T \{ -(u, \varphi') + v((u, \varphi)) + b(u, u, \varphi) \} dt \\ = \int_0^T (f, \varphi) dt + (u_0, \varphi(0))$$

ここで $\varphi_k p_k w \rightarrow \varphi \in D_0$ とする。

- $\overline{\Pi}$.

$$-\varepsilon \sum_{n=1}^N (p_k^n, (\varphi^n - \varphi^{n-1}) q_k) + k \sum_{n=1}^{N-1} (d_k(u_k), \varphi^n q_k) = 0$$

$$q_k = \frac{1}{|B|} \int_{B(x_k, r_k)} g \, dx \quad g \in D(B)$$

とすると

$$|-\varepsilon \sum (p_k^\varepsilon, (\varphi^\varepsilon - \varphi^{k-1}) q_k)| \leq C \sqrt{\varepsilon} k \sum \left| \frac{\varphi^\varepsilon - \varphi^{k-1}}{k} q_k \right|$$

従って $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$\int_0^T (\operatorname{div} u, \varphi g) \, dt = 0 \quad \forall \varphi g \in D(0, T) \otimes D(B)$$

$$\therefore \operatorname{div} u = 0 \quad \text{a.e. } (t, x)$$

とすると $\operatorname{div} u \in L_2(0, T; L_2(B))$

$$\therefore \operatorname{div} u = 0$$

(証明終り)