

この図よりK-dV方程式に5階微分の項が付加される度合が増すにつれカオス状態へ移行することが分る。

また図-4には $s=1$ の場合(5階の空間微分のみ)について、初期波形の半値幅 W_H を変化させた場合の最大リアプノフ数 L の変化を示してある。 L は W_H が増加するとある値で正となる。この L が正となり始める W_H の値は、孤立波が3個生成する初期波形であり、5階微分を有する系では孤立波の三体衝突は不安定である事実を反映しているものと考えられる¹⁾。

結論として、この系においては、初期波形で定まる s_0 以上で L は正となり、カオス状態となり、カオス状態は非可積分系の孤立波の個性を保存しない衝突によって生ずる。

参 考 文 献

- 1) H. Nagashima and M. Kuwahara: J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 3792.
- 2) K. Yoshimura and S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 3028.
- 3) G. Benettin, L. Galgani and J. Strelcyn: Phys. Rev. **A14** (1976) 2338.

相 関 関 数 の 理 論

東大・教養物理 十 河 清

§1. はじめに

量子可積分系の研究にとって、量子逆散乱法(QISM)という手法は、次のようなめざましい良い特徴を持っている。(1) Bethe statesの代数的構成(Bethe仮説の代数化!)を可能にする。(2) S行列の因子化理論をとおして新しい可積分系を発見できる。(3) 量子Gelfand-Levitan方程式を基にして相関関数の計算を可能にする。

1次元量子系と2次元古典系とのよく知られた対応があるので、上掲QISMの特徴(1)によって、基底状態エネルギー(分配関数)、素励起スペクトル(相関距離)など従来計算されてきたものを容易に再現することができる¹⁾。また(2)の手法によって、新しく解けるモデルがつぎつぎと提出されてきている²⁾。

本稿の目的は、上掲(3)QISMによる相関関数の理論の現状を報告することである。ここではほとんど全ての性質(分配関数、秩序度、相関関数)が調べられている2次元Isingモデルを例にして、Sato-Miwa-Jimboの理論³⁾、McCoy-Wuの理論⁴⁾を述べる。これら2次元Isingモデル、1次元XYモデル、不透過Boseガスなど、一般にfree-fermion系と呼ばれる場合には、計算が厳密に遂行できるのである。Free fermion系は、QISMのworkする系

の特別な極限の場合と考えられるので、このことは教訓的である。

与えられた紙数が少ないので、本稿では途中の計算を省略して結果のみを記し、導出のポイントとなる諸定理、諸性質のみを述べる。次の§2では、2次元 Ising モデルの相関関数の計算に関する SMJ の理論を紹介する。§3 では、free fermion の場合に SMJ 理論が work した理由を要約したのち、これとの対比で QISM の現状について議論する。なお末尾に文献をあげたので詳細はそれらにあたるか、直接著者まで御質問ください。

§2. 2次元 Ising モデルの相関関数

(a) 諸 結 果

2次元 Ising モデルに関して、Onsager, Yang 以降の発展でめざましいのは、相関関数の計算に関するものである。現在までに得られている結果は以下のようなものである。

(1) 2点相関関数 (MWTB⁴⁾, Bariev⁵⁾)

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{mn} \rangle = \langle \sigma \rangle^2 \exp \left[- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F^{(l)}}{2^l} \right] \quad (T < T_c) \quad (2.1)$$

ここに $\langle \sigma \rangle$ は自発磁化で、Yang の結果

$$\langle \sigma \rangle = [1 - (\operatorname{sh} 2K_1 \operatorname{sh} 2K_2)^{-2}]^{1/8} \quad (2.2)$$

で与えられる。また $F^{(l)}$ は

$$F^{(l)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi \operatorname{sh} r(\theta_1)} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_{2l}}{2\pi \operatorname{sh} r(\theta_{2l})} \\ \times \prod_{j=1}^{2l} e^{-nr(\theta_j) - im\theta_j} \frac{\operatorname{sh} [(r(\theta_j) - r(\theta_{j+1}))/2]}{\sin [(\theta_j + \theta_{j+1})/2]} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{ch} r(\theta) \equiv \operatorname{ch}(2K_1) \operatorname{ch}(2K_2^*) - \operatorname{sh}(2K_1) \operatorname{sh}(2K_2^*) \cos \theta \quad (2.4)$$

である。ここには $T < T_c$ の場合を書いたが、もちろん $T > T_c$ の場合の表式も得られている。

(2) scaling limit (MTW⁴⁾)

$$\tau_2^{\pm}(\theta) \equiv \lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ m, n \rightarrow \infty}} |T - T_c|^{-1/4} \langle \sigma_{00} \sigma_{mn} \rangle \quad (2.5)$$

$$2\theta \equiv \lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ m, n \rightarrow \infty}} |T - T_c| \sqrt{m^2 + n^2} \quad (2.6)$$

という極限を scaling limit と呼ぶ。このとき,

$$\tau_2^\pm(\theta) = \text{const.} \begin{pmatrix} \text{sh} \frac{\psi}{2} \\ \text{ch} \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \exp \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} dt \frac{t}{2} \left(\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 - \text{sh}^2 \psi \right) \right] \quad (2.7)$$

というコンパクトな表式を持つ。ここに ψ は

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{2} \text{sh}(2\psi) \quad (2.8)$$

即ち sine-Gordon 方程式に従う。あるいは変換 $\eta(\theta) = \exp(-\psi(\theta))$ によって,

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)^2 - \eta^3 + \frac{1}{\eta} \quad (2.9)$$

という, Painlevé III と呼ばれる非線形常微分方程式に帰着される。

(3) discrete Painlevé 方程式 (MW⁴⁾, Itzykson⁶⁾)

前節の計算は scaling limit をとらなくとも遂行できる。その場合には (2.8), (2.9) 式の離散形である discrete Painlevé 方程式に帰着される。表式は長くなるのでここには記さない。

(b) Sato-Miwa-Jimbo の理論³⁾

相関関数に関する SMJ 理論は, Clifford 群の理論とモノドロミー保存変形の理論という 2 つの道具から成りたっている。

(1) Clifford 群の理論

2 次元 Ising モデルの伝送行列が Jordan-Wigner 変換によって spin から fermion の演算子に変換されて解けることはよく知られている。

$$\begin{aligned} S_m &= I \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes I \\ C_m &= I \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes I \end{aligned} \quad (0 \leq m \leq M-1) \quad (2.10)$$

として

$$\begin{aligned} p_m &= C_0 C_1 \cdots C_{m-1} S_m, \quad p_0 = S_0 \\ q_m &= C_0 C_1 \cdots C_{m-1} C_m S_m \end{aligned} \quad (2.11)$$

を Jordan-Wigner 変換という。すると

$$\begin{aligned}
 p_m p_{m'} + p_{m'} p_m &= 2 \delta_{mm'} \\
 q_m q_{m'} + q_{m'} q_m &= -2 \delta_{mm'} \\
 p_m q_{m'} + q_{m'} p_m &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

である。このとき S_m と $p_{m'}$, $q_{m'}$ との間には次のような興味ある関係が成立する。写像 T_g を, $T_g \cdot w \equiv g w g^{-1}$ によって定義したとき,

$$\begin{aligned}
 T_{s_m} \cdot p_{m'} &= \begin{cases} p_{m'} & 0 \leq m' \leq m-1 \\ -p_{m'} & m \leq m' \leq M-1 \end{cases} \\
 T_{s_m} \cdot q_{m'} &= \begin{cases} q_{m'} & 0 \leq m' \leq m-1 \\ -q_{m'} & m \leq m' \leq M-1 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

となっている。このような T_g によって w にひきおこされた変換を induced rotation という。

この物理にはなじみの fermion の代数のことを数学では Clifford 代数と呼んでいる。これに関して次の定理がある。

定理 1. norm 表現

Clifford 代数の基底を $\{w_j\}$ とし, その期待値の table を $K_{jk} = \langle w_j w_k \rangle$ とする。Clifford 群の任意の要素 g は必ず norm 表現を持つ。

$$\begin{aligned}
 g &= \langle g \rangle : \exp(\rho/2) : \\
 \rho &= \sum_{j,k} R_{jk} w_j w_k, \quad R_{jk} = -R_{kj}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

ここに記号 $: \cdots :$ は normal ordering をあらわす。このとき行列 R は, g による induced rotation の行列 T ($T_g w_k = \sum_j w_j T_{jk}$) と次の関係で結ばれている。

$$T = (1 - R^t K)^{-1} (1 + RK) \tag{2.15}$$

$$R = (T - 1) (^t K T + K)^{-1} \tag{2.16}$$

定理 2. 積 公 式

Clifford 群の要素 $g^{(1)}, \dots, g^{(n)}$ が norm 表現

$$\begin{aligned}
 g^{(\ell)} &= \langle g^{(\ell)} \rangle : \exp(\rho^{(\ell)}/2) : \\
 \rho^{(\ell)} &= \sum_{j,k} R_{jk}^{(\ell)} w_j w_k \quad (\ell = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

を持つとき、積 $g^{(1)} \dots g^{(n)}$ の norm 表現は以下で与えられる。

$$g^{(1)} \dots g^{(n)} = \langle g^{(1)} \dots g^{(n)} \rangle : \exp(\rho/2) : \quad (2.17)$$

$$\rho = \sum_{\ell m} \sum_{j k} R_{j k}^{(\ell m)} w_j w_k$$

ここに

$$\frac{\langle g^{(1)} \dots g^{(n)} \rangle}{\langle g^{(1)} \rangle \dots \langle g^{(n)} \rangle} = \sqrt{\det(1 - RA)} \quad (2.18)$$

$$R = \begin{pmatrix} R^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & R^{(n)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & K & & K \\ -{}^t K & 0 & & \\ & & \ddots & \\ -{}^t K & & -{}^t K & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$(R^{(\ell m)}) = (1 - RA)^{-1} R \quad (2.20)$$

である。

(2) 2点相関関数 (τ 関数)

2次元 Ising モデルの相関関数は

$$\tau_2(m, n) = \langle s_{00} s_{mn} \rangle \quad (2.21)$$

$$s_{mn} = e^{-imP_1 - nP_2} s_{00} e^{imP_1 + nP_2} \quad (2.22)$$

と書ける。ここに P_1, P_2 は boost operator である。

まず s_{mn} は Clifford 群の要素であり、その induced rotation (2.13) の行列 T から、定理 1. (2.16) を用いてその norm 表現を得る。

$$s_{mn} = \langle s_{mn} \rangle : \exp(\rho_{mn}/2) : \quad (2.23)$$

すると定理 2 を用いて、相関関数は

$$\begin{aligned} \langle s_{00} s_{mn} \rangle &= \langle s_{00} \rangle \langle s_{mn} \rangle \sqrt{\det(1 - RA)} \\ &= [1 - (\text{sh} 2K_1 \text{sh} 2K_2)^{-2}]^{1/4} \exp \left[\frac{1}{2} \text{trace} \cdot \log(1 - RA) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

と書ける。従って (2.1) 式の

$$F^{(\ell)} = \text{trace}(RA)^\ell$$

十河 清

を得る。これが MWTB, Bariev の結果である。

(3) scaling limit

$\varepsilon = |T - T_c|$ として, $x_1 = m\varepsilon$, $x_2 = \kappa n\varepsilon$ (κ はある定数) を固定した $\varepsilon \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$ 極限を考える。この連続化によって

$$s_{mn} \sim (\text{const. } \varepsilon)^{1/8} \varphi(x) \quad (T < T_c) \quad (2.25)$$

となる。このときの φ による rotation は

$$\varphi(a) \psi_{\pm}(x) = \varepsilon(a_1 - x_1) \psi_{\pm}(x) \varphi(a) \quad (2.26)$$

である。

相関関数は本質的にこれら $\varphi(x)$ の積の期待値に他ならない。

$$\rho_n(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = (\text{const. } \varepsilon)^{n/8} \langle \varphi(x^{(1)}) \cdots \varphi(x^{(n)}) \rangle \quad (2.27)$$

ここで波動関数と呼ぶ, 次の期待値

$$W_{\sigma\sigma'}^{(n)}(x, x') = \langle \psi_{\sigma}(x) \psi_{\sigma'}(x') \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_n) \rangle \quad (2.28)$$

を考えると, これは以下のような著しい性質を持っている。

- i) W は x の関数として, free equation of motion に従う。
- ii) W は点 $a_1, \dots, a_n$ において, 2 価のモノドロミー性質を持つ ((2.26) 式)。
- iii) モノドロミーは, $a_1, \dots, a_n$ の変形に依存しない。

そこで逆に関数 W を, このような性質 (モノドロミー保存変形) によってとらえなおすことができる。その結果の両立条件として (変形方程式), 非線形な Painlevé 方程式が出てくるのである。

§ 3. まとめと展望

(a) SMJ 理論はなぜ work したのか?

その理由は次のように要約できると思う。

- 1) free field $\psi_{\pm}(x)$ の存在。
- 2) main field $\varphi(x)$ が Clifford 群に属すること。
- 3) effective formulae の存在。

また波動関数を考えるという idea は教訓的である。

(b) QISM の現状⁷⁾

前節 (a) との対比によって QISM の現状を見てゆこう。

1) free field は存在するか—— YES

QISM に登場する演算子 $R(\lambda)$, $R^*(\lambda)$ がそれである。これらは次の交換関係を持つ。

$$R(\lambda) R^*(\mu) = S(\lambda - \mu) R^*(\mu) R(\lambda) + 2\pi \delta(\lambda - \mu) \quad (3.1)$$

ここに $S(\lambda - \mu)$ は S 行列で,

$$S(\lambda - \mu) = \frac{\lambda - \mu - ic}{\lambda - \mu + ic} \quad (\text{nonlinear Schrödinger model}) \quad (3.2)$$

$$S(\lambda - \mu) = \frac{\text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu - 2i\eta)} \quad (\text{XXZ model}) \quad (3.3)$$

で与えられる。どちらの場合も, $c \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ という極限をとれば, $S \rightarrow -1$ となり, (3.1) は fermion の交換関係になってしまう。このように QISM は, 特別な場合として不透過 Bose ガスと XY モデルを含んでいる。

また QISM における boost operator も著者達によって見出されている⁷⁾。かくして free field とは QISM における normal mode R , R^* であることがわかったが, その代数 (3.1) (S-algebra と呼ぶ) は特別の場合を除いて一般には Clifford 代数とはならない。

2) main field は再構成されるか—— YES

量子 Gelfand-Levitan 方程式が, その解答を与える⁷⁾。それは次のような展開 (symbolical)

$$\left. \begin{array}{l} \phi^* \\ S_n^- \end{array} \right\} = \sum R^* + \sum R^* R^* R + \cdots \quad (3.4)$$

で与えられる。

3) effective formula はあるか

部分的にはあるといえが, ここでは述べない。いずれにせよ, S-代数 (3.1) の研究が解答を与えるはずである。

(c) 展 望

QISM による相関関数の理論は, 前節で述べたように main field の構成までは出来あがっている。ここには残された課題と解決の方向について, 著者の予想を述べさせていただく。

1) S-代数にたいする Wick の定理を定式化すること。

2) 波動関数 (Jost 関数) を積極的に媒介として利用すべきである。

文 献

- 1) L. A. Takhtadzhian and L. D. Faddeev, Russian Math. Surveys **34** (1979) 11.
K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 1284.
- 2) K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 85.
A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **32** (1980) 298.
K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.
また本号の阿久津氏による報告も参照。
- 3) M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Publ. RIMS **16** (1980) 531.
神保・三輪, 「数学」**32** (1980) 289.
- 4) B. M. McCoy and T. T. Wu, Nucl. Phys. **B180** (1981) 89.
B. M. McCoy, T. T. Wu, C. A. Tracy and E. Baruch, Phys. Rev. **B13** (1976) 316.
B. M. McCoy, C. A. Tracy and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 793.
- 5) R. Z. Bariev, Phys. Lett. **55A** (1976) 456.
- 6) C. Itzykson, Nucl. Phys. **B210** (1982) 448.
- 7) H. B. Thacker, Lecture Notes in Physics **151** (Springer)
K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **69** (1983).

Bethe Ansatz と Soliton

北大・工 飛 田 和 男

§1. 序

古典一次元系では、逆散乱法等によって、いくつかの完全可積分系が知られ、その多くでソリトンが存在する。一方、量子一次元系については、古くから Bethe Ansatz で解ける例が知られていた。近年、この Bethe Ansatz は逆散乱法の量子化に他ならないことが明らかにされてきた。ここでは、量子系におけるソリトンに焦点をあて、Bethe Ansatz 及び、それを用いた統計力学を紹介し、あわせて、量子サイン・ゴールドン系へ適用した結果を紹介する。

§2. Bethe Ansatz

この節及び次節においては、最も簡単で、ソリトンをもつ例として、 δ -関数形の2体力で相互作用している一次元ボーズ系¹⁾を考える。ハミルトニアンは($\hbar = 1$)

$$H = \int [\partial_x \phi^* \partial \phi_x + C \phi^* \phi^* \phi \phi] dx \quad (1)$$