

Keldysh 形式に基づくメゾスコピック系の 非平衡久保公式とショットノイズ

東京大学物性研究所 藤井 達也¹

(2009 年 8 月 4 日受理)

メゾスコピック系の Keldysh 形式での摂動項の断熱的印加による定式化が、Zubarev が提案した不変部分による定式化に対応していることを示す。この新たな理論的な側面から、Keldysh 形式での密度行列が、Mac-Lennan と Zubarev が提案した非平衡統計演算子の一種となることを示す。この密度行列を用いて、微分コンダクタンス $G(V)$ が一般的に、カレント-カレント相関関数 $S(V)$ と電子溜での非自明なカレント-電荷相関関数 $S_h(V)$ の和として表されることを述べる。線形応答領域では久保公式により、微分コンダクタンスはカレント-カレント相関関数のみで表されていた。この背景には揺動と散逸の間の普遍的な関係式があることはよく知られている。一般の非平衡領域では揺動散逸定理からのずれが、非自明な相関関数として付加されることになる。これをメゾスコピック系での非平衡久保公式と呼ぶことにする。

この結果は、メゾスコピック系での物理量に対しても新しい知見を与えている。非平衡久保公式の結果は、観測量のノイズパワー $S(V)$ と微分コンダクタンス $G(V)$ を用いて $S_h(V) = S(V) - 4k_B T G(V)$ となる。絶対零度 $T = 0$ では $S_h(V)$ はこれまでのショットノイズの定義 $S(V)$ と等しくなる。線形応答領域では $S_h(V) = 0$ となり、Nyquist-Johnson 関係式 $S(0) = 4k_B T G(0)$ を正しく再現できている。また、相関効果がない系ではショットノイズはノイズパワーから熱雑音を引いたものとして議論されてきた。このことから $S_h(V)$ を任意の温度でのショットノイズの公式として提案する。結果として、非平衡久保公式に基づいて計算された $S_h(V)$ を、観測量から決まる $S(V) - 4k_B T G(V)$ と比較することで、任意の温度での新たなショットノイズ研究が可能となっている。さらに同じ枠組みから、定常性や散逸に関する性質も証明できることを議論する。

なお、このノートは、2007 年 8 月 22 日から 24 日まで千葉県富津市で行われた、東京大学生産技術研究所羽田野研究室の夏合宿における講義に基づいている。

¹E-mail: tfujii@issp.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

1.1 メゾスコピック系における非平衡定常状態の基礎的な理解

近年、メゾスコピック系において非平衡定常状態の電子相関効果の研究が注目されてきている。有限サイズの導体が電子溜へ結合された系では、電子溜間の電位差を外部から変えることで自然に非平衡状態が実現できるという利点がある。輸送量を通じて非平衡状態にある系の特性を実験的に研究していくことができるようになっている。例えば、非平衡状態にある近藤効果や朝永-Luttinger 液体といった課題は興味深い研究対象となっている。

非平衡状態でも、相互作用がない系ではランダウアー公式を用いた議論がなされ、興味深い結果がこれまでに明らかにされてきた。しかし、相関効果のある系では取り扱いが難しいため進展は遅々としていた。近年になって、Keldysh 形式に基づく系統的な手法が有用であることが、様々な系での研究で明らかになってきた。そこでは、線形から大きくずれた領域でのカレント、あるいはそれを電位差 V で微分した微分コンダクタンス $G(V)$ などが典型的な物理量として議論されている。さらには、カレント-カレント相関関数によるノイズパワー $S(V)$ の絶対零度で定義されるショットノイズという量も計算され、実験との比較対応がなされている。

一方で、系の詳細に依存しない特性を明らかにすることも、有限バイアス下での輸送現象の包括的な見識を得る上で重要となってくる。これまでに線形応答領域の議論は確立されており、久保公式により線形コンダクタンスとノイズパワーという異なる観測量が一般に関連付けられることはよく知られている。これは Nyquist-Johnson 関係式として知られている。線形領域から外れた場合には久保公式の一般化に対応するものが何であるか、はっきりと分かっておらず、それがメゾスコピック系の物理量を一般的に関連付けるだけの普遍性をもつのかも明らかではない。

この課題を検討する 1 つのアプローチとして、メゾスコピック系での密度行列を考察するのは有用かもしれない。1 つの手法である Keldysh 形式では、密度行列の形式的な表式が文献 [1] で提案されている。この研究は、量子ドット系で一体問題へと還元できるような問題への応用 [2] が行われただけで、それ以上の一般論としての進展はなかった。また別の手法である C^* 代数法により、密度行列が MacLennan と Zubarev が提案した非平衡統計演算子の一種になることが明らかにされているが [3, 4, 5]、久保公式の一般化の議論は系統的には行われていない。

1.2 本稿の構成

まず、メゾスコピック系の Keldysh 形式の標準的な定式化を見た後に、Keldysh Green 関数導入の前の段階での、摂動項の断熱的な印加による記述を詳細に検討しよう。実は、それが Zubarev が提案した不変部分による定式化と等価になっていることを証明する。その結果を用いて、文献 [1] での密度行列は MacLennan-Zubarev による非平衡統計演算子となることを明らかにする。この密度行列が不変部分となっている事実から、微分コンダクタンス $G(V)$ は線形応答から予想されるカレント-カレント相関関数 $S(V)$ だけではなく、非自明なカレント-電荷相関関数 $S_h(V)$ によって与えられることを示す。これを非平衡久保公式と呼ぶことにする。次に、この $S_h(V)$ がショットノイズの

任意の温度への自然な拡張を与えていることを提案する。その結果として、不変部分という概念がメゾスコピック系の物理量を任意の非平衡状態で常に関連付ける等式 $S_h(V) = S(V) - 4k_B T G(V)$ へと導くことを見る。さらに、この結果に基づいたショットノイズの新たな研究の方針を示そう。最後に、密度行列が持つ不変部分という特性から、定常性や不可逆性に関する議論も行えることを示そう。なお、本稿の内容は参考文献 [6] に基づいている。

2 Keldysh 形式

Keldysh 形式 [7] は非平衡現象を記述するための理論の 1 つで、広範な現象の記述に用いられてきた。解説が幾つかあり、Green 関数に基づいた文献 [8, 9] はよく知られている。文献 [9] は 1986 年に書かれたもので、イントロダクションの部分で、Keldysh 形式と関連した理論のそれまでの研究小史が述べられ、様々な研究対象への応用を概観するのに役にたつ。汎関数法を用いた解説は文献 [10] が知られている。Keldysh 形式をメゾスコピック系へ応用したものとしては、Green 関数を用いた文献 [11] がある。これはカレントを計算するプロセスがコンパクトにまとまっていて見やすい。一方で、汎関数に基づきメゾスコピック系を定式化しているものとしては文献 [12, 13] がある。

Keldysh 形式の特徴としては、やはり S 行列の時間発展への閉経路 (Keldysh contour) の導入と、その結果としての Keldysh Green 関数の導入が挙げられる。閉経路 (Keldysh contour) とは、 S 行列の時間発展を通常の $-\infty$ から $+\infty$ までに加えて、逆向きの時間発展 $+\infty$ から $-\infty$ も考慮するものである。通常、Keldysh 形式というとはほとんどこれらを指している。一方で、Keldysh 自身の定式化 [7] にもあるように、Keldysh contour 導入前のステップで摂動項の断熱的印加による記述を行っているが、これは手続きの一種のように見られこれまで省みられることはなかった。しかし、実はこれが重要な概念を与えていることを明らかにする点が、本講義の大きな特徴である。

ここでは、メゾスコピック系の非平衡定常状態の記述へと応用された Keldysh 形式 [14, 15, 16] を議論の土台にしよう。まずは、Keldysh 形式の標準的な理解のために、閉経路の導入が不可逆な現象の記述と関連している様子を見てみよう。これを考えるためには絶対零度がわかりやすい。その後に、第 3 章と第 4 章で先に述べた断熱的印加による記述を密度行列を通じて考察を進めよう。

2.1 Keldysh contour と Keldysh Green 関数

ここでは、メゾスコピック系における絶対零度での Keldysh 形式の定式化を行い、Keldysh contour と Keldysh Green 関数を導入しよう。まずその前に、理論の設定についていくつか整理していこう。

まず、考える系のハミルトニアンを、有限サイズの導体部分 H_c 、左右の無限大の電子溜部分 $H_{L,R}$ 、境界での結合部分 $H_{cL,R}$ を用いて次のように定義する：

$$H \equiv H_c + H_L + H_R + H_{cL,R}. \quad (1)$$

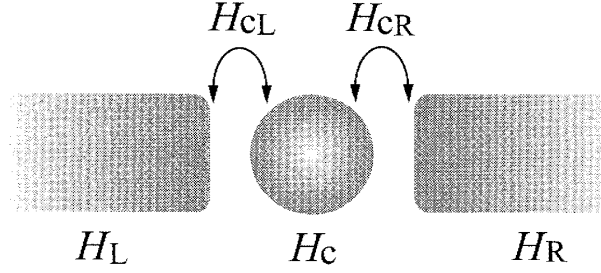


図 1: 典型的なメゾスコピック系

この系を図 1 に示す。以下の議論では、有限サイズ導体での相互作用は陽に現れないが、常に H_c に含まれていることを注意しておきたい。 H_c に対して、非摂動項 H_{c0} と相互作用 H_{c1} の効果を分けて表したとすると、

$$H_c = H_{c0} + H_{c1} \quad (2)$$

と書ける。

ここで、この系のハミルトニアン H を、非摂動項 H_0 と摂動項 H_1 に分けることにしよう：

$$H_0 \equiv H_c + H_L + H_R, \quad (3)$$

$$H_1 \equiv H_{cL,R}. \quad (4)$$

H_0 は 3 つの独立した系を記述し、 H_1 は境界での結合 $H_{cL,R}$ により決まっている。ところで、例えば量子ドット系では、局所的なクーロン相互作用を Wick の定理を用いて取扱いたい場合などは、 H_c に含まれる H_{c1} を摂動項 H_1 に含む場合もある [15, 16]。この場合でも、以下の議論は変更なく進められる。

さて、ここから H_0 に摂動項 H_1 を断熱的に印加することを考えよう：

$$H_\epsilon \equiv H_0 + g e^{-\epsilon|t|} H_1. \quad (5)$$

ここで、 g はパラメタであり、 ϵ は断熱因子である。摂動項は $t = \pm\infty$ で断熱的にゼロになっている。また H_ϵ と系の全ハミルトニアン H は、 $\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon = H$ で結ばれている。上で定義した H_ϵ で記述される系の時間発展を表す S 行列を定義しよう：

$$S_\epsilon(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' g e^{-\epsilon|t'|} H_1(t') \right). \quad (6)$$

T は時間順序積を表し、

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & t_1 > t_2 \\ \pm B(t_2)A(t_1) & t_1 < t_2, \end{cases} \quad (7)$$

と作用する。第 2 行目の符号はそれぞれ、+ がボゾン、- がフェルミオンの場合に対応している。 $H_1(t)$ は以下で定義する H_1 の相互作用表示である。

ここで、以下の議論で用いる表記の仕方について整理しておこう：

Schrödinger 表示： A ,

相互作用表示： $A(t) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t}$,

Heisenberg 表示： $A_H(t) = S_\epsilon(0, t) A(t) S_\epsilon(t, 0) = U_\epsilon(0, t) A U_\epsilon(t, 0)$.

ここで $U_\epsilon(t, t_0)$ は、

$$\begin{aligned} U_\epsilon(t, t_0) &= e^{-iH_0 t} S_\epsilon(t, t_0) e^{iH_0 t_0} \\ &= T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_\epsilon(t') \right) \end{aligned} \quad (8)$$

と与えられている。なお、Schrödinger 表示において、例えば H_ϵ のように時間依存する演算子である場合にも、それが明らかな場合には時間依存性を適宜省略することにする。

初期条件として、 $t_0 = -\infty$ で系が基底状態にある場合を考え、それを $|\Phi_0\rangle$ と表わすことにする。初期状態 $|\Phi_0\rangle$ は、3つの独立した系の基底状態を表しており、初期時刻 $t_0 = -\infty$ で左右の電子溜の化学ポテンシャルが異なった状態もとりうる。導体部分と電子溜部分との相互作用を断熱的に印加することで、任意の時刻において系が定常状態にあるとする。とくに、 $t = 0$ での状態 $|\Psi\rangle$ は、初期状態 $|\Phi_0\rangle$ を用いて次のように書ける：

$$|\Psi\rangle \equiv \frac{S_\epsilon(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | S_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}. \quad (9)$$

断熱因子がゼロの極限 $\epsilon \rightarrow 0$ で分子から現れる発散を取り除くために、規格化因子 $\langle \Phi_0 | S_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle$ が必要となることが知られている [17, 18]。この点で断熱因子の議論に注意する必要があるが、任意の演算子 $\mathcal{O}$ の $|\Psi\rangle$ で規格化された期待値

$$\langle \mathcal{O}_H(t) \rangle \equiv \frac{\langle \Psi | \mathcal{O}_H(t) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (10)$$

の議論へと進んだ時には、断熱因子の影響は陽に現れてこなくなる。この点については最後にまた触れることにしよう。

さてここから、Keldysh contour の導入を契機づける様子を見てみるために、式 (9) の状態を用いた Green 関数を議論しよう：

$$g(t_1, t_2) \equiv -i \frac{\langle \Psi | T d_H(t_1) d_H^\dagger(t_2) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (11)$$

d は電子の消滅演算子で、簡単のため空間依存性は陽には書き表していない。式 (11) において、 $|\Psi\rangle$ の定義式 (9) を代入する：

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2) &= -i \langle \Phi_0 | S_\epsilon(-\infty, 0) T [S_\epsilon(0, t_1) d(t_1) S_\epsilon(t_1, 0) S_\epsilon(0, t_2) d(t_2) S_\epsilon(t_2, 0)] S_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= -i \langle \Phi_0 | T [S_\epsilon(-\infty, t_1) d(t_1) S_\epsilon(t_1, t_2) d^\dagger(t_2) S_\epsilon(t_2, -\infty)] | \Phi_0 \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで注目したい事は、系が平衡状態か非平衡状態にあるかに関わらず、 S 行列による $-\infty$ から $-\infty$ までの時間発展が自然に現れていることである。これらの違いを議論できるように、式 (12) に $S_\epsilon(-\infty, t_1) = S_\epsilon(-\infty, \infty)S_\epsilon(\infty, t_1)$ を代入する：

$$g(t_1, t_2) = -i\langle\Phi_0|T\left[S_\epsilon(-\infty, \infty)S_\epsilon(\infty, t_1)d(t_1)S_\epsilon(t_1, t_2)d^\dagger(t_2)S_\epsilon(t_2, -\infty)\right]|\Phi_0\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle. \quad (13)$$

まず、左右の化学ポテンシャルが等しくなる平衡状態 $\mu_L = \mu_R$ を場合を考えよう。この時、摂動項を断熱的に切る ($t \rightarrow \infty$) と、元の状態に戻ることが知られている [17, 18]：

$$S_\epsilon(\infty, 0)S_\epsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle. \quad (14)$$

これは時刻が $-\infty$ から未来へと時間発展するのと、 ∞ から過去へと時間発展してくることが本質的に同じであることを示している。この事実は、系に時間反転対称性があることを意味している。この時、 S 行列は $-\infty$ から ∞ までの通常の時間発展だけが残ることになる：

$$g(t_1, t_2) = -i\langle\Phi_0|T\left[S_\epsilon(\infty, t_1)d(t_1)S_\epsilon(t_1, t_2)d^\dagger(t_2)S_\epsilon(t_2, -\infty)\right]|\Phi_0\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle. \quad (15)$$

しかし、 $\mu_L \neq \mu_R$ での有限バイアス下では、摂動項 H_1 の中に含まれる境界での結合 $H_{cL,R}$ により不可逆な過程が現れることになる。ここで電子溜が無限大に大きく、端に当たって粒子が跳ね返されてくるようなことはないと仮定している。平衡状態において成り立っていた式 (14) は、有限バイアス下では期待できない。この場合、 S 行列の時間発展は $-\infty$ から ∞ 、そして $-\infty$ へ戻る経路を考える必要がある。

そこで、このような時間発展を表す閉経路として図 2 のような Keldysh contour を導入しよう。

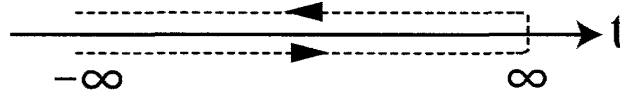


図 2: Keldysh contour

それに伴い、閉経路に沿った時間発展を表す演算子を次式で定義する：

$$S_\epsilon^c(-\infty, \infty) = T_c \exp \left(-i \int_c d\tau g e^{-\epsilon|\tau|} H_1(t) \right). \quad (16)$$

ここで、 T_c は図 2 の Keldysh contour に沿った時間順序積を表し、

$$T_c \left[A(\tau_1^\alpha) B(\tau_2^\beta) \right] = \begin{cases} TA(t_1)B(t_2) & \alpha = -, \beta = - \\ \pm B(t_2)A(t_1) & \alpha = -, \beta = + \\ A(t_1)B(t_2) & \alpha = +, \beta = - \\ \tilde{T}A(t_1)B(t_2) & \alpha = +, \beta = + \end{cases} \quad (17)$$

と作用する。ここで、 τ^+ が上側の経路、 τ^- が下側の経路の時刻を表しているとする。通常の時 t との関係は、 $\tau^\pm = t \pm i\epsilon$ となっている。また、 $\tilde{T}$ は逆時間順序積である。Keldysh 閉経路に沿った時間順序積であるため、通常の時 t 順序積 T とは異なる作用をするので注意を要する。

最後に、Keldysh contour に沿って次の 4 つの Green 関数を定義しよう：

$$\begin{aligned} g^{--}(t_1, t_2) &= -i\langle T_c d_H(\tau_1^-) d_H^\dagger(\tau_2^-) \rangle = -i\langle T d_H(t_1) d_H^\dagger(t_2) \rangle, \\ g^{-+}(t_1, t_2) &= -i\langle T_c d_H(\tau_1^-) d_H^\dagger(\tau_2^+) \rangle = +i\langle d_H^\dagger(t_2) d_H(t_1) \rangle, \\ g^{+-}(t_1, t_2) &= -i\langle T_c d_H(\tau_1^+) d_H^\dagger(\tau_2^-) \rangle = -i\langle d_H(t_1) d_H^\dagger(t_2) \rangle, \\ g^{++}(t_1, t_2) &= -i\langle T_c d_H(\tau_1^+) d_H^\dagger(\tau_2^+) \rangle = -i\langle \tilde{T} d_H(t_1) d_H^\dagger(t_2) \rangle. \end{aligned}$$

ここで Keldysh contour での時間の配置は図 3 のようになっている。ここまでで、標準的な Keldysh

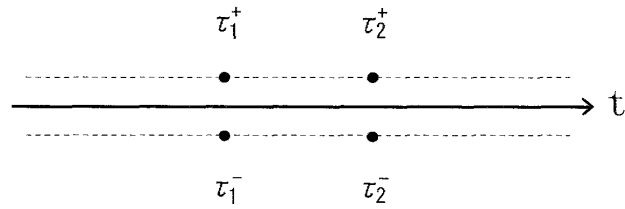


図 3: Keldysh contour での時間の配置

形式の簡単な紹介を行ってきた。先に述べたように、この Keldysh Green 関数のように規格化された量を議論している分には、断熱因子の影響は表に現れてこなくなる。この事実が、断熱因子は理論をよく定義するための便法と思われてきた一因ではないかと思われる。次章では、この断熱的な手続きについての議論をもっと深く掘り下げることにしよう。

3 Keldysh 形式における摂動項の断熱的印加

絶対零度での Keldysh 形式の定式化を一般の有限温度へ拡張し、ここでは Keldysh contour や Keldysh Green 関数ではなく、とくに断熱的な印加による定式化の部分に焦点を当てよう。また最後に、散乱理論に基づく Keldysh 形式が、メゾスコピック系での非平衡定常状態の記述に有用であることも議論しよう。

有限温度も含んだ定式化を行うので、具体的には密度行列を議論していく。この系での密度行列の時間発展は von Neumann 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon(t) = [H_\epsilon, \rho_\epsilon(t)] \quad (18)$$

により記述される。ここで $[A, B] \equiv AB - BA$ である。

この方程式の形式解は、式 (8) の

$$U_\epsilon(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_\epsilon(t') \right) \quad (19)$$

を用いて、

$$\rho_\epsilon(t) = U_\epsilon(t, t_0) \rho_\epsilon(t_0) U_\epsilon(t_0, t) \quad (20)$$

と書ける。ただし $H_\epsilon(t)$ は H_ϵ の相互作用表示ではなく、その時間依存性をあらわに書いたものである。

系の初期状態 $t_0 = -\infty$ において導体部分と電子溜が同じ温度で平衡状態にあるとすると、その分布は Boltzmann 分布によって

$$\rho_0 = e^{-\beta(H_0 - \mu_c N_c - \mu_L N_L - \mu_R N_R - \Omega_0)} \quad (21)$$

と与えられる。ここで $\beta = 1/k_B T$ であり、 μ_c, μ_L, μ_R と N_c, N_L, N_R は、それぞれ導体部分と左右の電子溜の初期の化学ポテンシャルと粒子数である。また、 Ω_0 は初期状態 (平衡状態) における熱力学ポテンシャルで、次の式で定義される：

$$\Omega_0 \equiv -\frac{1}{\beta} \ln \left(\text{Tr} e^{-\beta(H_0 - \mu_L N_L - \mu_R N_R - \mu_c N_c)} \right). \quad (22)$$

さて左右の電子溜間の電位差をその化学ポテンシャルの差を用いて定義し、平均により μ という量を決める：

$$\frac{\mu_L - \mu_R}{2} \equiv \frac{eV}{2}, \quad (23)$$

$$\frac{\mu_L + \mu_R}{2} \equiv \mu. \quad (24)$$

エネルギーの原点は $\mu = 0$ と選ぶことにする。さらに簡単のため導体の初期の化学ポテンシャルは μ に等しいとする： $\mu_c = \mu = 0$ 。このとき初期状態での密度行列は、

$$\rho_0 = e^{-\beta(H_0 - eV(N_L - N_R)/2 - \Omega_0)} \quad (25)$$

となる。さらに熱力学ポテンシャルは、

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \text{Tr} e^{-\beta[H_0 - eV(N_L - N_R)/2]} \right\} \quad (26)$$

となる。

この初期条件のもとで、任意の時刻 t における密度行列は、式 (20) で $t_0 = -\infty$ として

$$\rho_\epsilon(t) = U_\epsilon(t, -\infty) \rho_0 U_\epsilon(-\infty, t) \quad (27)$$

と書ける。 H_0 で記述される系は3つの独立な系からなっているので、 H_0 と N_L , H_0 と N_R はそれぞれ可換である。従って、

$$[H_0, N_L - N_R] = 0 \quad (28)$$

である。これは ρ_0 の表式 (25) を見ると明らかなように、 $[H_0, \rho_0] = 0$ を意味する。

さてここで、期待値について議論しておこう。時刻 t での期待値は任意の演算子 $\mathcal{O}$ に対して、

$$\text{Tr}(\mathcal{O} \rho_\epsilon(t)) = \text{Tr}(\mathcal{O}_H(t) \bar{\rho}_\epsilon) \equiv \langle \mathcal{O}_H(t) \rangle \quad (29)$$

と与えられている。ここで $\bar{\rho}_\epsilon \equiv \rho_\epsilon(0)$ である。従って、時刻 $t = 0$ での密度行列が自然と考察の対象となる。以下で、ある特定の時刻 $t = 0$ での密度行列を議論していたとしても、それは定常状態が実現している事実とは関わりがない点に注意しておきたい。期待値の時間依存性は ρ の Heisenberg 表示を通じて記述されている。定常状態の実現については、あらためて第 7 章で証明することにする。

さて、式 (27) の密度行列の形式解を、式 (8) の $U_\epsilon(t, t_0) = e^{-iH_0 t} S_\epsilon(t, t_0) e^{iH_0 t_0}$ を用いて S 行列による表式に書き直そう：

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_\epsilon &= S_\epsilon(0, -\infty) e^{iH_0(-\infty)} \rho_0 e^{-iH_0(-\infty)} S_\epsilon(-\infty, 0) \\ &= S_\epsilon(0, -\infty) \rho_0 S_\epsilon(-\infty, 0).\end{aligned}\tag{30}$$

最後の等式は $[H_0, \rho_0]$ を用いた。通常の Keldysh 形式では、この段階から Keldysh contour の導入へと入ることになる。しかし冒頭でも強調したように、そのステップへと行く前の、断熱的印加による表式 (30) 自体がここでの議論の対象となる。これが出発点であり、その詳細な計算は次章で行おう。

さて、この章を終えるに当たって、この定式化の有用性について少し触れておこう。電子溜を含む非摂動項 H_0 は無限大の系の寄与であるのに対し、摂動項 H_1 は有限サイズ系の寄与でしかない。この時、高々有限サイズの影響のために、無限大の電子溜を相転移させることはないと期待してよい。これは現実のメゾスコピック系を考えてみたときに、導体を電極につないだために、例えば電極全体が絶縁体になったりするようなことは通常は起らないことに対応している。結果として、無限級数で定義される S 行列が、よく定義された級数となっていることを意味している。

定常的に電流が流れていると、粒子数変化と熱の発生が生じる。ナノスケールの導体を通過することによる粒子数変化は、無限大の電子溜にとっては十分無視できるとする。さらに導体で熱が発生しても、それは電子溜が熱浴の役割を果たして吸収できるとする。この時、電子溜は化学ポテンシャルと温度が定義できる熱平衡状態で記述してもよいと期待できる。系全体から眺めるとほとんどが電子溜から成るので、広範囲な領域で熱平衡状態にあるように見える。メゾスコピック系の非平衡定常状態とは、それよりはるかに小さい有限サイズ領域に限定されていると考えてよい。このような系の非平衡状態を記述するために、 H_1 を摂動とした散乱理論は、なおよく定義された理論になっていると期待できる。

4 MacLennan-Zubarev の密度行列

この章ではまず、Keldysh 形式の断熱的な記述方法が、Zubarev が提案した不変部分という概念による記述と等しくなっているという理論的な背景を示そう。この不変部分という概念と、結果的に導出される非平衡統計演算子を見るために、今の議論から一旦離れ、Zubarev の局所平衡系での議論を概観してみる。その後に、式 (30) の密度行列も Zubarev が導入した非平衡演算子になっていることを示そう。

4.1 断熱的な時間発展と Zubarev の不変部分

本節では、Keldysh 形式における摂動項の断熱的印加による記述が、Zubarev が提案した不変部分による記述に正確に対応していることを示す。

von Neumann 方程式の形式解を考察するために、 S 行列を用いて定義される以下の量を考える：

$$\bar{A}_\epsilon \equiv S_\epsilon(0, -\infty) A S_\epsilon(-\infty, 0). \quad (31)$$

ただし演算子 A は $[A, H_0] = 0$ を満たすとする。 A が ρ_0 の時は、式 (30) の $\bar{\rho}_\epsilon$ に帰着する。さらに以下の議論で必要となる、演算子 A に対する “current”

$$J_{AH}(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} A_H(t) \quad (32)$$

$$= i[A_H(t), H_{\epsilon H}(t)] = iU_\epsilon(0, t)[A, H_\epsilon]U_\epsilon(t, 0) \quad (33)$$

をここで定義しておこう。

まず、交換関係 $[A, S_\epsilon(0, -\infty)]$ の計算から始めよう。この交換関係に、 $S_\epsilon(0, -\infty)$ を展開した表式

$$\begin{aligned} S_\epsilon(0, -\infty) &= T \exp \left(-i \int_{-\infty}^0 dt g e^{-\epsilon|t|} H_1(t) \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \cdots dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} T(H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)) \end{aligned} \quad (34)$$

を代入しよう：

$$\begin{aligned} [A, S_\epsilon(0, -\infty)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \cdots dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} [A, T(H_1(t_1) \cdots H_1(t_n))] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \cdots dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)} \\ &\quad \times \sum_{P(p,q,r,\dots)} \theta(t_p - t_q) \theta(t_q - t_r) \cdots \left([A, H_1(t_p)] H_1(t_q) H_1(t_r) \cdots \right. \\ &\quad \left. + H_1(t_p) [A, H_1(t_q)] H_1(t_r) \cdots + H_1(t_p) H_1(t_q) [A, H_1(t_r)] \cdots + \cdots \right). \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、 $P(p, q, r, \dots)$ は $(p, q, r, \dots)$ の置換を表し、 $\theta(x)$ はステップ関数である。ここで、式 (35) での $[A, H_1(t)]$ を、 $J_{AH}(0) \equiv J_A = ig[A, H_1]$ に対する相互作用表示 $J_A(t) = e^{iH_0 t} J_A e^{-iH_0 t} = ig[A, H_1(t)]$ を用いて書き直そう。ここで導入した J_A を基準にして、式 (35) の時間順序積を J_A の左右に分けて表そう。 J_A が左から l 番目にあるとき、 H_1 の分け方が $_{n-1}C_{l-1}$ 通りあり、また J_A の積分変数の選び方が n 通りある。そこで、改めて $m = n - l$, $m' = l - 1$ とすると次式が得

られる：

$$\begin{aligned}
 [A, S_\epsilon(0, -\infty)] &= - \int_{-\infty}^0 dt_l e^{-\epsilon|t_l|} \\
 &\times \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-ig)^{m'}}{(m')!} \int_{t_l}^0 ds'_1 \cdots \int_{t_l}^0 ds'_{m'} e^{-\epsilon(|s'_1| + \cdots + |s'_{m'}|)} T[H_\epsilon(s'_1) \cdots H_\epsilon(s'_{m'})] \\
 &\times J_A(t_l) \\
 &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ig)^m}{(m)!} \int_{-\infty}^{t_l} ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{t_l} ds_m e^{-\epsilon(|s_1| + \cdots + |s_m|)} T[H_\epsilon(s_1) \cdots H_\epsilon(s_m)] \\
 &= - \int_{-\infty}^0 dt_l e^{-\epsilon|t_l|} S_\epsilon(0, t_l) J_A(t_l) S_\epsilon(t_l, -\infty). \tag{36}
 \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
 [A, S_\epsilon(0, -\infty)] &= - \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} S_\epsilon(0, t) J_A(t) S_\epsilon(t, -\infty) \\
 &= - \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} (J_A)_H(t) S_\epsilon(0, -\infty) \tag{37}
 \end{aligned}$$

が導かれることになる。ここで、 $(J_A)_H(t) \equiv S_\epsilon(0, t) J_A(t) S_\epsilon(t, 0)$ と $J_{AH}(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} A_H(t)$ を比較してみよう：

$$\begin{aligned}
 (J_A)_H(t) &= [A_H(t), S_\epsilon(0, t) e^{iH_0 t} (H_0 + gH_1) e^{-iH_0 t} S_\epsilon(t, 0)] \\
 &= J_{AH}(t) + ig(1 - e^{-\epsilon|t|}) [A_H(t), H_1 H(t)]. \tag{38}
 \end{aligned}$$

これから $\epsilon \rightarrow 0$ の極限の下では第 2 項が十分に無視できて、両者を等しいとしてよい。以下では $\epsilon \rightarrow 0$ を明示的に書いていない場合も、常にその極限は考慮に入れているとする。最終的に以下の結果が得られる：

$$[A, S_\epsilon(0, -\infty)] = - \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{AH}(t) S_\epsilon(0, -\infty). \tag{39}$$

この交換関係を使って、 $\bar{A}_\epsilon$ の定義式 (31) を書き直そう。 S 行列のユニタリ性 $S_\epsilon(0, -\infty) S_\epsilon(-\infty, 0) = 1$ を考慮すると、 H_0 と可換な A に対して

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_\epsilon &= S_\epsilon(0, -\infty) A S_\epsilon(-\infty, 0) \\
 &= (A S_\epsilon(0, -\infty) - [A, S_\epsilon(0, -\infty)]) S_\epsilon(-\infty, 0) \\
 &= \left(A + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{AH}(t) \right) S_\epsilon(0, -\infty) S_\epsilon(-\infty, 0) \\
 &= A + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{AH}(t) \tag{40}
 \end{aligned}$$

と書けることがわかる。これが以降の主要な結論の根幹部分を支えている重要な表式である。その意味合いを考察するために、時間積分の解析を進めてみよう。右辺第 2 項で $J_{AH}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} A_H(t)$ を用いて部分積分すると、

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{AH}(t) = -A + \epsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} A_H(t) \tag{41}$$

と書き下せる。これを式 (40) に代入すると、最終的に以下の結果を得る：

$$\bar{A}_\epsilon = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} A_H(t). \quad (42)$$

実のところ、この表式が Zubarev によって導入された不変部分の定義に他ならない。

この概念の理解を深めるために、Zubarev 自身の局所平衡系での議論を次の第 4.2 節で見てもよい。そこで、不変部分という概念と、さらには非平衡統計演算子についても述べよう。

以上で、Keldysh 形式での摂動項の断熱的な印加は、Zubarev 形式での遅延性をもつ長時間平均 (不変部分) をとることと等価であることを明らかにした。Keldysh 形式のこの新たな理論的な背景から、以下に挙げる本講義の主要内容が導かれることになる：

第 4.3 節 MacLennan-Zubarev タイプの密度行列

第 5,6 章 久保公式の一般化とショットノイズ公式

第 7 章 時間相関関数の定常性と不可逆性

4.2 Zubarev の非平衡統計演算子

本節では、メゾスコピック系での議論から一旦離れ、Zubarev の定式化に従い、局所平衡状態がよく成立しているような系の議論を行おう。そこで導入された不変部分という概念と、第 4.3 節の議論で必要となる非平衡統計演算子を見てみることにしよう [19, 20]。

まず、局所的な物理量 $P_m(x)$ とそれに共役な場 $F_m(x, t)$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \mathcal{H}(x), & F_0(x, t) &= \beta(x, t), \\ P_1(x) &= p(x), & F_1(x, t) &= -\beta(x, t)v(x, t), \\ P_{i+1}(x) &= n_i(x), & F_{i+1}(x, t) &= -\beta(x, t)(\mu_i(x, t) - m_i v^2(x, t)/2) \end{aligned} \quad (43)$$

で与えられるような局所平衡系を考えよう。なお、ここでは x により 3 次元の空間座標を表しているとする。この系での局所平衡統計演算子は、

$$\rho_L(t) \equiv \exp \left(-\Phi_L(t) - \sum_m \int dx F_m(x, t) P_m(x) \right) \equiv \exp (-S_L(t)) \quad (44)$$

により定義される。ここで $S_L(t)$ はエントロピーである。 $\Phi_L(t)$ は密度行列を規格化 $\text{Tr}[\rho_L(t)] = 1$ するように以下で与えられる：

$$\Phi_L(t) \equiv \ln \text{Tr} \exp \left(-\sum_m \int dx F_m(x, t) P_m(x) \right). \quad (45)$$

ここで、この系で不可逆性が記述できるかを、エントロピー生成を計算してみることで考察してみよう：

$$\text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial t} S_L(t) \rho_L(t) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} e^{-S_L(t)} = 0. \quad (46)$$

すなわち、局所平衡系ではエントロピーの時間変化がないため、不可逆な現象を記述できない。

Zubarev はある演算子 $A_Z(t)$ (時間依存があってもよい) に対する不変部分という概念

$$\bar{A}_{Z\epsilon}(t) = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} A_{ZH}(t+t', t') \quad (47)$$

を定義して、不可逆性を記述できるような理論を構成した。ここで、 $A_{ZH}(t_1, t_2)$ は $A_Z(t_1)$ の Heisenberg 表示である：

$$A_{ZH}(t_1, t_2) \equiv e^{iHt_2} A_Z(t_1) e^{-iHt_2}. \quad (48)$$

繰り返しになるが、Zubarev 自身の定義では $A_Z(t)$ に時間依存性があってもよい。とくに定常状態で $A_Z(t)$ に時間依存性がない場合は、

$$\begin{aligned} A_Z &\equiv A_Z(t), \\ A_{ZH}(t) &\equiv e^{iHt} A_Z e^{-iHt}, \\ \bar{A}_{Z\epsilon} &\equiv \bar{A}_{Z\epsilon}(t) \end{aligned} \quad (49)$$

とすると、

$$\bar{A}_{Z\epsilon} = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} A_{ZH}(t') \quad (50)$$

が得られる。この結果が、定常状態での Keldysh 形式の断熱的な記述法から得られた式 (42) と同じになっている。

この不変部分という量は、(i) 長時間平均による粗視化、(ii) 遅延性 ($t = -\infty \rightarrow 0$ のみ寄与) という特徴をもっており、 $\epsilon \rightarrow 0$ でハミルトニアンと可換になることが示されている。

Zubarev は局所平衡の性質を生かしながら不可逆性を記述できるように、局所平衡系でのエントロピーに対応する密度行列に対して、式 (47) を用いて不変部分という概念を適用した：

$$\ln \bar{\rho}_{L\epsilon}(t) = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \ln \rho_{LH}(t+t', t'). \quad (51)$$

ここで導入された密度行列 $\bar{\rho}_{L\epsilon}(t)$ が、MacLennan-Zubarev が定義した非平衡統計演算子である。この密度行列を用いて、エントロピー

$$S(t) \equiv - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr}(\bar{\rho}_{L\epsilon}(t) \ln \rho_L(t)) \quad (52)$$

を新たに定義し、これについてエントロピー生成が正となることが示された。

ここでは先に述べたように、MacLennan-Zubarev の非平衡統計演算子に焦点を当て、それを導いておこう。式 (44) での $F_m(x, t)$ と $P_m(x)$ を用いた $\rho_L(t)$ の表式を、式 (51) に代入し部分積分

する：

$$\begin{aligned}
 \ln \bar{\rho}_{L\epsilon}(t) &= \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \left(-\Phi_L(t+t') - \sum_m \int dx F_m(x, t+t') P_{mH}(x, t') \right) \\
 &= -\bar{\Phi}_{L\epsilon}(t) - \sum_m \int dx \left[e^{-\epsilon|t'|} F_m(x, t+t') P_{mH}(x, t') \right]_{t'=-\infty}^{t'=0} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \sum_m \int dx \left(\frac{\partial F_m(x, t+t')}{\partial t'} P_{mH}(x, t') + F_m(x, t+t') \frac{\partial P_{mH}(x, t')}{\partial t'} \right).
 \end{aligned} \tag{53}$$

ただし $\bar{\Phi}_{L\epsilon}(t)$ は次で定義される：

$$\bar{\Phi}_{L\epsilon}(t) \equiv \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \Phi_L(t+t'). \tag{54}$$

ここで、式 (53) の $P_{mH}(x, t)$ の時間微分の項を保存則：

$$\frac{\partial P_{mH}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_{mH}(x, t) = 0. \tag{55}$$

を用いて書き直し、その結果に対して空間に関する部分積分を行う：

$$\begin{aligned}
 \int dx F_m(x, t+t') \frac{\partial P_{mH}(x, t')}{\partial t'} &= - \int dx F_m(x, t+t') \nabla \cdot \vec{J}_{mH}(x, t') \\
 &= -B + \int dx \nabla F_m(x, t+t') \cdot \vec{J}_{mH}(x, t').
 \end{aligned} \tag{56}$$

ここで B は無限遠方での表面 S_B での積分を表し、物理的にそれは寄与しないとしてよい：

$$S = \int_{S_B} dS F_m(x, t+t') \vec{\xi} \cdot \vec{J}_{mH}(x, t') = 0. \tag{57}$$

なお、 $\vec{\xi}$ は面 S に垂直な単位ベクトルである。式 (56) と式 (57) の結果を、式 (53) に代入すると、最終的に密度行列の表式が得られる：

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_{L\epsilon}(t) &= \exp \left[-\Phi_{L\epsilon}(t) - \sum_m \int dx F_m(x, t) P_m(x) \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \sum_m \int dx \left(\frac{\partial F_m(x, t+t')}{\partial t'} P_m(x, t') + \nabla F_m(x, t+t') \cdot \vec{J}_{mH}(x, t') \right) \right].
 \end{aligned} \tag{58}$$

これが Zubarev が導入した非平衡統計演算子である。

後の議論のために、 $F_m(x, t)$ が時間に依存しなくなる定常状態 $F_m(x, t) \equiv F_m(x)$ を考えよう。この時、式 (49) を使って各物理量を表記すると、密度行列は次式となる：

$$\bar{\rho}_{L\epsilon} = \exp \left(-\Phi_L - \sum_m \int dx F_m(x) P_m(x) - \sum_m \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \nabla F_m(x) \cdot \vec{J}_{mH}(x, t') \right). \tag{59}$$

なお、右辺での熱力学ポテンシャル Φ_L は、式 (54) の $\bar{\Phi}_{L\epsilon}(t)$ に対して、定常状態では $\Phi_L(t) \equiv \Phi_L$ となることを利用して、時間積分を実行した結果として得られた：

$$\bar{\Phi}_{L\epsilon}(t) = \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \Phi_L(t+t') = \Phi_L. \tag{60}$$

4.3 Keldysh 形式での密度行列

さてここから、Keldysh 形式での密度行列の議論に戻ることにしよう。この節では、Keldysh 形式での密度行列が、MacLennan-Zubarev の非平衡統計演算子となることを見てみよう。式 (30) の $\bar{\rho}_\epsilon$ に対して、 ρ_0 の表式 (25) を用いて展開する：

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_\epsilon &= S_\epsilon(0, -\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \left[H_0 - \frac{eV}{2}(N_L - N_R) - \Omega_0 \right]^n S_\epsilon(-\infty, 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \left[S_\epsilon(0, -\infty) H_0 S_\epsilon(-\infty, 0) - S_\epsilon(0, -\infty) \frac{eV}{2}(N_L - N_R) S_\epsilon(-\infty, 0) - \Omega_0 \right]^n.\end{aligned}\quad (61)$$

N_L, N_R はそれぞれ H_0 と可換であるから、式 (40) を用いることができる：

$$S_\epsilon(0, -\infty) H_0 S_\epsilon(-\infty, 0) = H_0 + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{eH}(t), \quad (62)$$

$$S_\epsilon(0, -\infty) \frac{e}{2}(N_L - N_R) S_\epsilon(-\infty, 0) = \frac{e}{2}(N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t). \quad (63)$$

ここで、

$$J_{eH}(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} H_{0H}(t), \quad (64)$$

$$J_{cH}(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{2}(N_{LH}(t) - N_{RH}(t)) \quad (65)$$

と定義されている。これらを用いると、式 (30) の $\bar{\rho}_\epsilon$ は最終的に

$$\bar{\rho}_\epsilon = \exp \left\{ -\beta \left[H_0 + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{eH}(t) - V \left(\frac{e}{2}(N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t) \right) - \Omega_0 \right] \right\} \quad (66)$$

となる。ここで、この結果と式 (59) との対応関係を見てみよう。メゾスコピック系と局所平衡系では系が完全に対応するものではないので、表式自体が等価になっているわけではないが、式 (59) の $F_m P_m$ で、 $F_0 \rightarrow \beta$ と $P_0 \rightarrow H_0$ に応じて、 $\nabla F_0 \rightarrow \beta$ と $J_{0H} \rightarrow J_{eH}$ を対応させ、 $F_1 \rightarrow -\beta V$ と $P_1 \rightarrow e(N_L - N_R)/2$ では $\nabla F_1 \rightarrow -\beta V$ と $J_{1H} \rightarrow J_{cH}$ をとり、そして $\Phi_L \rightarrow -\beta \Omega_0$ とすることで、式 (59) を式 (66) へと読み替えることができる。より本質的な共通因子は、どちらも密度行列の指数部が Zubarev の提案した不変部分により記述されているという点である。その意味で、Keldysh 形式での密度行列 (30) が、前節で導いた MacLennan-Zubarev の非平衡統計演算子 (59) と同じ形になっている。この結果は、 C^* 代数法によって得られた結果とも一致している [3, 4, 5]。

この表式の特徴として、密度行列が不変部分によって表わされていたことで、指数部分の肩もまた不変部分によって決まっている点に着目しよう。とくに、バイアス V に共役な量が $e(N_L - N_R)/2$ の不変部分を与えている。次章では、実はこの事実こそが、微分コンダクタンスに対する久保公式の一般的な表式を決定していることを見ていこう。

5 非平衡久保公式

5.1 非平衡久保公式

この節では、メソスコピック系での観測量であるカレントを電位差 V で微分した微分コンダクタンスを議論する。その表式が、本講義の主要なテーマである久保公式の一般化として得られることを示そう。

まずカレントの定義は、式 (65) の演算子を使って

$$J(V) \equiv \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle J_{cH}(t) \rangle = \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle J_c \rangle \quad (67)$$

となっている。最後の等式では、第 7 章で証明することになる定常状態の性質を使った。微分コンダクタンスを、先ほど定義したカレントの微分で以下のように定義する：

$$G(V) \equiv \frac{\partial J(V)}{\partial V}. \quad (68)$$

この微分コンダクタンス (68) を具体的に書き下そう。式 (67) を式 (68) に代入し、式 (66) を用いて密度行列のバイアス微分を行う：

$$\begin{aligned} G(V) &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial V} \text{Tr} (J_c \bar{\rho}_\epsilon) \\ &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \text{Tr} \left\{ J_c \left[\frac{e}{2} (N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t) + \frac{\partial \Omega_0}{\partial V} \right] \bar{\rho}_\epsilon \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

この表式の [...] の中で、 Ω_0 の V 微分以外の項に着目しよう。これは、式 (66) の密度行列の指数部分での、 V に共役な量である $e(N_L - N_R)/2$ の不変部分に他ならない。従って、微分コンダクタンスは、カレント J_c と $e(N_L - N_R)/2$ の不変部分との相関関数によって決定されることになる。その結果として、カレント-電荷相関関数とカレント-カレント相関関数が現れている点に注意しよう。

一方で、 Ω_0 の V 微分を求めてみる。熱力学ポテンシャル Ω_0 の定義式 (26) を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0}{\partial V} &= -\text{Tr} \left\{ \frac{e}{2} (N_L - N_R) e^{-\beta[H_0 - eV(N_L - N_R)/2 - \Omega_0]} \right\} \\ &= -\text{Tr} \left[S_\epsilon(0, -\infty) \frac{e}{2} (N_L - N_R) S_\epsilon(-\infty, 0) S_\epsilon(0, -\infty) \rho_0 S_\epsilon(-\infty, 0) \right] \\ &= -\left(\frac{e}{2} \langle N_L - N_R \rangle + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} \langle J_{cH}(t) \rangle \right) \end{aligned} \quad (70)$$

と書ける。したがって、 $\delta A \equiv A - \langle A \rangle$ を使って、

$$\begin{aligned} G(V) &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \left(\frac{e}{2} \langle J_c(\delta N_L - \delta N_R) \rangle + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} \langle J_c \delta J_{cH}(t) \rangle \right) \\ &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \left(\frac{e}{2} \langle \delta J_c(\delta N_L - \delta N_R) \rangle + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} \langle \delta J_{cH}(0) \delta J_{cH}(t) \rangle \right) \end{aligned} \quad (71)$$

を得る。ただし $\langle A \delta B \rangle = \langle \delta A \delta B \rangle$ と $J_c = J_{cH}(0)$ を使った。先ほど指摘したように、微分コンダクタンスは 2 種類の相関関数により決定されている。

微分コンダクタンスを対称化するために、上とは別の表式を書き下そう。これまでの議論で仮定している交換関係式 (28) を用いると、

$$\begin{aligned}
 0 &= S_\epsilon(0, -\infty) \left[H_0, \frac{e}{2}(N_L - N_R) \right] S_\epsilon(-\infty, 0) \\
 &= \left[S_\epsilon(0, -\infty) H_0 S_\epsilon(-\infty, 0), S_\epsilon(0, -\infty) \frac{e}{2}(N_L - N_R) S_\epsilon(-\infty, 0) \right] \\
 &= \left[H_0 + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{eH}(t), \frac{e}{2}(N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t) \right] \quad (72)
 \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで式 (62) と式 (63) を用いた。この交換する 2 つの量は、式 (66) における $\bar{\rho}_\epsilon$ の指数の肩に対応しているので、

$$\left[\bar{\rho}_\epsilon, H_0 + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{eH}(t) \right] = 0, \quad (73)$$

$$\left[\bar{\rho}_\epsilon, \frac{eV}{2}(N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t) \right] = 0 \quad (74)$$

となることが分かる。このうち式 (74) を式 (69) 式に用いると、

$$\begin{aligned}
 G(V) &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \beta \left[\frac{e}{2}(N_L - N_R) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} J_{cH}(t) + \frac{\partial \Omega_0}{\partial V} \right] J_c \bar{\rho}_\epsilon \right\} \\
 &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \left(\frac{e}{2} \langle (\delta N_L - \delta N_R) \delta J_c \rangle + \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} \langle \delta J_{cH}(t) \delta J_{cH}(0) \rangle \right) \quad (75)
 \end{aligned}$$

と書ける。ここでも $\langle A \delta B \rangle = \langle \delta A \delta B \rangle$ を用いた。これは先ほどの式 (71) 中の期待値の中身を入れ替えた形になっている。ここでカレントの時間に対する定常性を用いると、

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \delta J_{cH}(t) \delta J_{cH}(0) \rangle = \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \delta J_{cH}(0) \delta J_{cH}(-t) \rangle \quad (76)$$

を得る。これを式 (75) の最右辺第 2 項に対して用いると、

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{-\epsilon|t|} \langle \delta J_{cH}(t) \delta J_{cH}(0) \rangle = \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dt e^{-\epsilon|t|} \langle \delta J_{cH}(0) \delta J_{cH}(t) \rangle \quad (77)$$

となる。これを式 (75) に戻したものと、式 (71) の最右辺第 2 項に同様の変形をしたもの、および式 (71) と式 (75) の合計 4 つの式を全て足し合わせると、

$$\begin{aligned}
 4G(V) &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \left\{ 2 \times \frac{e}{2} [\langle \delta J_c (\delta N_L - \delta N_R) \rangle + \langle (\delta N_L - \delta N_R) \delta J_c \rangle] \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty dt e^{-\epsilon|t|} (\langle \delta J_{cH}(0) \delta J_{cH}(t) \rangle + \langle \delta J_{cH}(t) \delta J_{cH}(0) \rangle) \right\} \quad (78)
 \end{aligned}$$

を得る。最終的に、微分コンダクタンスは次のように対称化された表式で書ける事がわかる：

$$\begin{aligned}
 G(V) &= \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \frac{\beta}{4} \langle \{ \delta J_c, e(\delta N_L - \delta N_R) \} \rangle \\
 &\quad + \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \frac{\beta}{4} \int_{-\infty}^\infty dt e^{-\epsilon|t|} \langle \{ \delta J_{cH}(t), \delta J_{cH}(0) \} \rangle. \quad (79)
 \end{aligned}$$

ここで $\{A, B\} = AB + BA$ は反交換関係である。

密度行列が不変部分となっていたために、微分コンダクタンスは、カレントと $e(N_L - N_R)$ の不変部分との相関関数が決定していた。その結果として、微分コンダクタンスがカレントーカレント相関関数と、電子溜での非自明なカレントー電荷相関関数の和として表されることを示した。

次節で示すように、カレントー電荷相関関数は線形応答領域ではゼロになり、式 (79) は久保公式の結果と一致する。線形コンダクタンスが、カレントーカレント相関関数で表されていた背景には、揺動と散逸の間の普遍的な関係式があることはよく知られている。任意のバイアス下では、揺動散逸定理からのずれが、非自明なカレントー電荷相関関数として付加されることになる。これをメゾスコピック系での非平衡久保公式と呼ぶことにしよう。線形応答領域での確認の後に、第6章でこのカレントー電荷相関関数をメゾスコピック系での物理量の観点から再検討することにしよう。

5.2 線形応答領域

本節では、線形応答領域での非平衡久保公式が、これまでの線形応答の久保公式の結果と等しくなることを確かめる。カレントに対する線形応答領域を議論するので、カレントのバイアス微分である $G(V)$ の $V = 0$ を考えることになる。従って、線形応答領域では式 (79) の右辺の相関関数の期待値はゼロバイアスの平衡系を考えればよい。先に述べたように、ここではカレントー電荷相関関数を議論しよう。

そこでまず、ある演算子 $\mathcal{O}$ に対する平衡系の極限での期待値 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}}$ についての表記を整理しておこう。ここでの定義は

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}} \equiv \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \mathcal{O} \rangle|_{V=0} \quad (80)$$

としている。ここで、平衡系の極限での密度行列は、

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \bar{\rho}_\epsilon|_{V=0} = e^{-\beta(H-\Omega)} \quad (81)$$

と求められている。この結果を式 (80) で使うと、 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}}$ は通常の平衡系での期待値も表している：

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{eq}} \equiv \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \mathcal{O} \rangle|_{V=0} = \text{Tr}(\mathcal{O} e^{-\beta(H-\Omega)}). \quad (82)$$

さて、ここからカレントー電荷相関関数の平衡系の極限での議論へと移ろう：

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \{\delta J_c, e(\delta N_L - \delta N_R)\} \rangle|_{V=0} = \text{Tr} \left(\{\delta J_c, e(\delta N_L - \delta N_R)\} e^{-\beta(H-\Omega)} \right). \quad (83)$$

右辺への変形は式 (82) を使った。このトレース部分において、まず式 (65) から得られる $J_c = i[e(N_L - N_R)/2, H]$ を代入する。その結果を $\{[A, B], A\} = A^2B - BA^2$ を用いて書き直し、さら

に $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ を用いてトレースを計算する：

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\{ \delta J_c, e(\delta N_L - \delta N_R) \} e^{-\beta(H-\Omega)} \right) &= \text{Tr} \left(\left\{ i \left[\frac{e}{2} (\delta N_L - \delta N_R), H \right], e(\delta N_L - \delta N_R) \right\} e^{-\beta(H-\Omega)} \right) \\ &= i \frac{e^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | [(\delta N_L - \delta N_R)^2, E_n] | n \rangle e^{-\beta(E_n - \Omega)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (84)$$

従って、線形応答領域でこの項は寄与せず、非平衡久保公式は平衡系でのカレントーカレント相関関数のみで表されることが分かった：

$$G(0) = \frac{\beta}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \{ \delta J_{cH}(t), \delta J_{cH}(0) \} \rangle_{\text{eq}}. \quad (85)$$

次に、この結果が従来の久保公式と一致することを確認しよう。線形応答理論から、電場の 1 次までのカレントは以下で与えられている：

$$J_\alpha(x, \omega) = \int dx' \sigma_{\alpha\beta}(x, x', \omega) E_\beta(x', \omega). \quad (86)$$

ここで、 α, β は x, y, z 成分を表し、電気伝導率は、

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, x', \omega) = \frac{i}{\omega} \left[K_{\alpha\beta}^r(x, x', \omega) + \frac{\bar{n}_0 e^2}{m} \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (87)$$

と求められている [21]。 x, x' により 3 次元の空間座標を表しているとする。有限サイズ導体が電子溜へと接続された系への応用を念頭に置いて、式 (87) では空間に対する並進対称性を仮定していないものとしよう。また、カレントーカレント相関関数は以下で定義されている：

$$K_{\alpha\beta}^r(x, x', \omega) = -i \int dt e^{i\omega t} \theta(t) \langle [\delta j_{\alpha H}(x, t), \delta j_{\beta H}(x', 0)] \rangle_{\text{eq}}. \quad (88)$$

ここから等ポテンシャル面のアイデアを利用して、電子溜に接続された系での線形コンダクタンスを求めよう [22]。まず等ポテンシャル面 S_a を通過するカレントを、それに垂直な単位ベクトル $\vec{\xi}_a(x_a)$ を用いて定義する：

$$\begin{aligned} I(\xi_a, \omega) &\equiv \int dS_a \vec{\xi}_a(x_a) \cdot \vec{J}(x_a, \omega) \\ &= \int d\xi_b dS_b \int dS_a \vec{\xi}_a(x_a) \cdot (\text{Re } \sigma(x_a, x_b, \omega) \vec{E}(x_b, \omega)). \end{aligned} \quad (89)$$

第 2 行へは式 (86) を用い、 x' についての空間積分を ξ_b と S_b に関する積分に直した。またカレントは実数の量なので電気伝導率の実部だけが寄与し、それは式 (87) から

$$\text{Re } \sigma_{\alpha\beta}(x, x', \omega) = -\frac{1}{\omega} \text{Im } K_{\alpha\beta}^r(x, x', \omega) \quad (90)$$

と求められる。さらに、電場は常に等ポテンシャル面に垂直に生じている ($\vec{E}(x_b, \omega) = E(\xi_b) \vec{\xi}_b(x_b)$) 事実と、 $\sigma_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta$ の時に $\vec{\xi} \cdot (\sigma \vec{E}) = (\vec{\xi} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{E})$ となることを用いると、 $I(\xi_a, \omega)$ は、

$$I(\xi_a, \omega) = \int d\xi_b \left(-\frac{1}{\omega} \text{Im } \bar{K}^r(\xi_a, \xi_b, \omega) \right) E(\xi_b) \quad (91)$$

となることが示せる。ここで $\bar{K}^r$ は式 (88) でのカレント演算子を新たに、

$$I_H(\xi_a, t) \equiv \int dS_a \vec{\xi}_a(x_a) \cdot \vec{j}_H(x_a, t) \quad (92)$$

として定義された量である。

さて、ここから求めるべき定常電流の計算へと移ろう：

$$\begin{aligned} J(V) &\equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} I(\xi_a, \omega) \\ &= \int d\xi_b \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega} \text{Im} \bar{K}^r(\xi_a, \xi_b, \omega) \right) E(\xi_b). \end{aligned} \quad (93)$$

まず、式 (93) の $\text{Im} \bar{K}^r$ に揺動散逸定理を用いると、

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega} \text{Im} \bar{K}^r(\xi_a, \xi_b, \omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega} \frac{1}{2} \frac{e^{-\beta\omega} - 1}{e^{-\beta\omega} + 1} \int dt e^{i\omega t} \langle [\delta I_H(\xi_a, t), \delta I_H(\xi_b, 0)] \rangle_{\text{eq}} \\ &= \frac{\beta}{4} \int dt \langle [\delta I_H(\xi_a, t), \delta I_H(\xi_b, 0)] \rangle_{\text{eq}} \end{aligned} \quad (94)$$

を得る。この結果は ξ_a と ξ_b の入れ替えに対して対称になっていることを示すことができる。一方で、定常電流を考えているので、 $I(\xi_a)$ はどこの等ポテンシャル面かを指定している変数 ξ_a には依存しなくなる。 ξ_a と ξ_b の入れ替えに関して対称でなくてはならないので、結果的に ξ_b 依存性もなくなってしまう。

これらの依存性がない事実を利用して、カレントを電子溜と導体との2つの接触部分 S_L と S_R での平均として再定義する：

$$J_{cH}(t) \equiv \frac{1}{2} \left(\int dS_L \vec{\xi}_L(x_L) \cdot \vec{j}_H(x_L, t) + \int dS_R \vec{\xi}_R(x_R) \cdot \vec{j}_H(x_R, t) \right). \quad (95)$$

この様子を図4に示す。電流保存則に対してガウスの定理を用いると、右辺の量はそれぞれ、

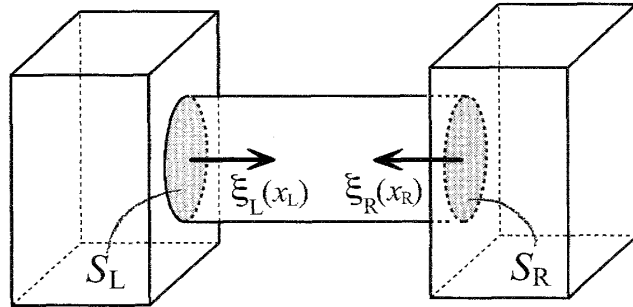


図4: 電子溜と左右の等ポテンシャル面 S_L, S_R

$$\begin{aligned} \int dS_L \vec{\xi}_L(x_L) \cdot \vec{j}_H(x_L, t) &= \int_{V_L} dx \nabla \cdot \vec{j}_H(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} e \int_{V_L} dx \rho(x, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} e N_{LH}(t), \\ \int dS_R \vec{\xi}_R(x_R) \cdot \vec{j}_H(x_R, t) &= -\int_{V_R} dx \nabla \cdot \vec{j}_H(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} e \int_{V_R} dx \rho(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} e N_{RH}(t) \end{aligned} \quad (96)$$

となる。結果として、式 (95) のカレントは、

$$J_{cH}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{e}{2} (N_{LH}(t) - N_{RH}(t)) \quad (97)$$

となる。これは確かに式 (65) のカレントの定義に他ならない。よって、式 (94) のカレントをこの J_c を用いて書き直すことで、式 (93) の定常電流は：

$$J(V) = \int d\xi_b \left(\frac{\beta}{4} \int dt \langle [\delta J_{cH}(t), \delta J_{cH}(0)] \rangle_{\text{eq}} \right) E(\xi_b) \quad (98)$$

と求められる。

もう一方で、カレントーカレント相関関数の ξ_b 依存性がなくなる事実を踏まえると、式 (98) の ξ_b 積分は電場に対してのみ実行できることになる。電子溜内ではポテンシャル一定とするので電場は発生していない。積分は等ポテンシャル面に沿って電子溜と導体との2つの接触部分まで行うことになる。その電位差がちょうど導体に印加されているバイアスを決めている：

$$\int d\xi_b E_b = -(\phi(\xi_R) - \phi(\xi_L)) = V. \quad (99)$$

この結果を式 (98) に用いると、線形応答領域での定常電流は：

$$J(V) = G(0)V \quad (100)$$

と書け、線形コンダクタンス $G(0)$ は：

$$G(0) = \frac{\beta}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \{ \delta J_{cH}(t), \delta J_{cH}(0) \} \rangle_{\text{eq}} \quad (101)$$

と得られる。

以上より、線形応答領域での非平衡久保公式 (85) は、確かに式 (101) の久保公式の結果と一致している事が確認された。

6 ショットノイズ

6.1 ショットノイズの研究意義

さてここから、議論を非平衡久保公式 (79) へと戻し、それをメゾスコピック系でのショットノイズという物理量の観点から見てみることにする。それにあたって、まずはじめにショットノイズの研究について概観しておこう。

メゾスコピック系の観測量としては、電流 (または微分コンダクタンス) 以外にカレントーカレント相関関数で与えられるノイズパワー $S(V)$ という量がある。それはここでの表記に従うと、以下で定義される：

$$S(V) \equiv \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\epsilon|t|} \langle \{ \delta J_{cH}(t), \delta J_{cH}(0) \} \rangle. \quad (102)$$

ショットノイズは、熱雑音の消える絶対零度 ($T = 0$) におけるノイズパワー $S(V)$ として与えられてきた。この量が注目を集めるようになったのは、透過率の小さな導体の議論から、 $S/2J$ という量により、電流 $J(V)$ だけからは議論できない単位電荷を決定できる可能性が示されたためである。ショットノイズがもつこの可能性が、その後の多くの系での研究を誘発してきた。中でも成功例としては、分数量子ホール系のエッジ状態間でのラフリン準粒子の分数電荷 $e/3$ が決定されたことが挙げられる [26, 27]。参考までに、図 5 に実験でショットノイズの電流に対する比例係数から単位電荷が決定された結果を示しておく [27]。

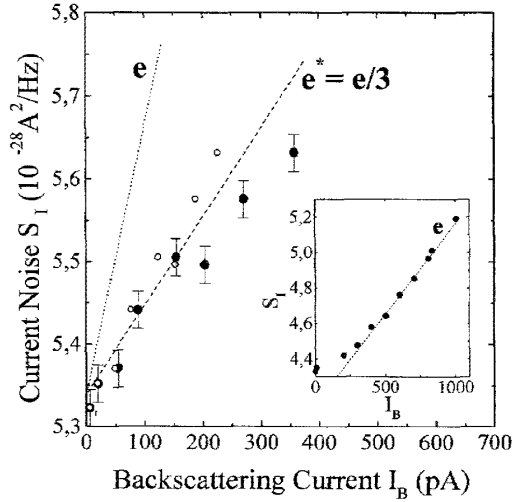


FIG. 2. Tunneling noise at $\nu = 1/3$ ($\nu_L = 2/3$) when following path A and plotted versus $I_B = (e^2/3h)V_{ds} - I$ (filled circles) and $I_B(1 - R)$ (open circles). The slopes for $e/3$ quasiparticles (dashed line) and electrons (dotted line) are shown. $\Theta = 25$ mK. Inset: data in same units showing electron tunneling for similar $G = 0.32e^2/h$ but in the IQHE regime ($\nu_L = 4$). The expected slope for electrons $2eI_B(1 - R)$ [$R = 0.68$, $I_B = (e^2/h)V_{ds} - I$] is shown. $\Theta = 42$ mK.

図 5: 分数電荷 $e/3$ の決定 [27]

現在では、ショットノイズは非平衡特性を議論する際の標準的な物理量としての地位が確立されている。これまでのショットノイズ研究では、熱雑音が抑制された低温が主に関心が持たれてきたことは述べた。任意の温度領域でのショットノイズを議論するための処方箋があると、研究の可能性が広がると期待される。

6.2 非平衡久保公式に基づくショットノイズの研究

次に、非平衡久保公式 (79) をこのショットノイズという量から考察してみよう。まず、式 (102) からカレントーカレント相関関数は $S(V)$ と表わされていた。さらに、非自明なカレントー電荷相関関数を次式で定義する：

$$S_h(V) \equiv - \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle \{ \delta J_c, e(\delta N_L - \delta N_R) \} \rangle. \quad (103)$$

この時、非平衡久保公式 (79) は、

$$S_h(V) = S(V) - 4k_B T G(V) \quad (104)$$

と書き直すことができる。ここで $\beta = 1/k_B T$ を用いた。

さて、この $S_h(V)$ という量がこれまでのショットノイズの概念の自然な拡張を与えていることを見てみよう。まずはじめに、これまでショットノイズは、絶対零度 $T = 0$ でのノイズパワー $S(V)$ として定義されてきたことは先にも述べた。 $T = 0$ では式 (104) は $S_h(V) = S(V)$ を与え、 $S_h(V)$ が確かにこれまでのショットノイズの定義と等しくなっていることを示している。次に、有限温度でも相互作用のない系では、ノイズパワーから熱雑音を引いた量 $S^0(V) - 4k_B T G^0(V)$ がショットノイズを与えてきた [23, 24]。式 (104) の右辺は、この議論を相互作用がある場合へと一般化した表式となっている。最後に、カレントに対する線形応答領域では式 (84) で示したように、カレント-電荷相関関数が寄与しなくなるため、定義式 (103) から明らかに $S_h(0) = 0$ となる。結果として、Nyquist-Johnson 関係式 $S(0) = 4k_B T G(0)$ [23, 24] が正しく導かれる。以上の考察から、 $S_h(V)$ を任意の温度でのショットノイズ公式として提案しよう。

結果的に不変部分という概念が、非平衡久保公式を通じてメゾスコピック系の物理量の一般的な関係式 (104) へと導かれることがわかる。これを用いて $S_h(V)$ を理論的に見積もった結果は、実験での観測量である $S(V)$ と $G(V)$ から決定された $S(V) - 4k_B T G(V)$ と比較検討できる。従って、非平衡久保公式により、任意の温度でのショットノイズ研究の処方箋が与えられている。

6.3 $U = 0$ Anderson 模型による確認

前節までで、非平衡久保公式とショットノイズについての一般論は終えているが、具体的な系である量子ドット系でこの提案を確認することにより理論を補強しておこう。

モデルとしては、相互作用のない Anderson 模型を考察する：

$$H = \sum_{\alpha k \sigma} \varepsilon_{\alpha k} c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma} + \epsilon_d \sum_{\sigma} n_{\sigma} + \sum_{\alpha k \sigma} V_{\alpha k \sigma} c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_{\sigma} + h.c.. \quad (105)$$

α は左右のリード線を表す変数で、 L と R をとる。第 1 項が左右のリード線の運動エネルギーで、第 2 項がドット内のエネルギー準位であり、最後がドット-リード間の混成項を表す。 $c_{\alpha k \sigma}^\dagger$ は、左または右のリード線で波数 k でスピン σ をもつ電子を生成する演算子である。また、 $d_{\sigma}^\dagger$ がドット内でスピン σ をもつ電子を生成する演算子である。さらに、 $n_{\sigma} = d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma}$ と与えられている。

この模型に対し、Keldysh Green 関数を用いてカレントが計算できる：

$$J^0(V) = 2e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega) (f_L(\omega) - f_R(\omega)). \quad (106)$$

ここで、各量に対して指数 0 によりクーロン相互作用 U の零次を表すものとする。透過確率 $T^0(\omega)$ は、

$$T^0(\omega) = \frac{\Gamma_L(\omega)\Gamma_R(\omega)}{\Gamma_L(\omega) + \Gamma_R(\omega)} \quad (107)$$

と得られ、共鳴幅 $\Gamma_{L,R}(\omega)$ と左右のリード線でのフェルミ分布関数は、

$$\begin{aligned}\Gamma_{L,R}(\omega) &= 2\pi \sum_k |V_{L,Rk}|^2 \delta(\omega - \varepsilon_{L,Rk}), \\ f_{L,R}(\omega) &= \frac{1}{e^{\beta(\omega \mp eV/2)} + 1}\end{aligned}\quad (108)$$

により与えられている。

微分コンダクタンスは定義により、式 (106) を V で微分すると得られる：

$$G^0(V) = \beta e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega) (f_L(\omega)(1 - f_L(\omega)) + f_R(\omega)(1 - f_R(\omega))). \quad (109)$$

一方、ノイズパワーも定義式 (102) に Keldysh Green 関数を用いて計算できる：

$$\begin{aligned}S^0(V) &= 4e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega) (f_L(\omega)(1 - f_L(\omega)) + f_R(\omega)(1 - f_R(\omega))) \\ &\quad + 4e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega)(1 - T^0(\omega))(f_L(\omega) - f_R(\omega))^2.\end{aligned}\quad (110)$$

相互作用のない系ではよく知られているように [23, 24, 25]、ノイズパワーは第 1 項の熱雑音と第 2 項のショットノイズの和として表されている。

式 (109) と式 (110) からすぐに、

$$S^0(V) - 4k_B T G^0(V) = 4e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega)(1 - T^0(\omega))(f_L(\omega) - f_R(\omega))^2 \quad (111)$$

が得られる。左辺がノイズパワーから熱雑音を引いた表式に対応しており、そして右辺がショットノイズを表していることがわかる。ここまでは、これまでによく知られた事実である。

繰り返しになるが、非平衡久保公式に基づいた理論で新しい点は、ショットノイズ自体の公式を式 (103) により提案した点である。その公式は当然、 $S(V)$ や $G(V)$ とは独立して計算できる。相互作用のない Anderson 模型に対して、実際に Keldysh Green 関数を用いて $S_h^0(V)$ を計算してみると、

$$S_h^0(V) = 4e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T^0(\omega)(1 - T^0(\omega))(f_L(\omega) - f_R(\omega))^2 \quad (112)$$

と求められる。これは式 (111) のショットノイズに他ならないことがわかる。

以上より、相互作用のない Anderson 模型に対し、新公式 (103) は確かにショットノイズを表し、結果として非平衡久保公式 $S_h^0(V) = S^0(V) - 4k_B T G^0(V)$ が成立していることを証明した。

7 非平衡定常状態の性質

ここまでで、本講義の中心的なテーマである非平衡久保公式の導出と、それに基づくショットノイズ公式とその応用の提案を終えたことになる。第 4.1 節で指摘し、そしてこれまでも見てきたように、これは密度行列が不変部分として表わされる事実の直接的な帰結であった。実はこの同じ背景から、全く対象が異なると思われるような、定常性と不可逆性を議論することができる。この最後の章では、これまで Keldysh 形式では言及されてこなかった、この非平衡定常状態の性質を証明してみよう。

7.1 時間相関関数の定常性

まずここでは、カレントの期待値の時間依存性を議論し、式 (67) を示そう：

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle J_{cH}(t) \rangle = \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \langle J_c \rangle.$$

定義より、

$$\begin{aligned} \langle J_{cH}(t) \rangle &= \text{Tr} (\bar{\rho}_\epsilon J_{cH}(t)) \\ &= \text{Tr} (U_\epsilon(t, 0) \bar{\rho}_\epsilon U_\epsilon(0, t) J_c) \end{aligned} \quad (113)$$

となっている。ここで $U_\epsilon(t, 0) \bar{\rho}_\epsilon U_\epsilon(0, t)$ に注目しよう。これを考察するために、任意の演算子 B に対する Heisenberg 表示： $B_H(t) = U_\epsilon(0, t) B U_\epsilon(t, 0)$ の時間微分を考える：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_H(t) &= \frac{\partial U_\epsilon(0, t)}{\partial t} B U_\epsilon(t, 0) + U_\epsilon(0, t) B \frac{\partial U_\epsilon(t, 0)}{\partial t} \\ &= -i U_\epsilon(0, t) [B, H_\epsilon(t)] U_\epsilon(t, 0) \\ &= -J_{BH}(t). \end{aligned} \quad (114)$$

ここで第 2 行へは、 $U_\epsilon(t, 0)$ の運動方程式とそのエルミート共役な表式：

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon(t, 0) &= H_\epsilon(t) U_\epsilon(t, 0), \\ -i \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon(0, t) &= U_\epsilon(0, t) H_\epsilon(t) \end{aligned} \quad (115)$$

を用いている。また第 3 行へは定義式：

$$J_B \equiv i[B, H_\epsilon(t)] \quad (116)$$

を用いた。以下の議論のために便宜上、 H_ϵ の時間依存性を陽に $H_\epsilon(t)$ と書いている。

ここで、式 (114) の両辺を $[0, t]$ にわたって時間積分しよう：

$$B_H(t) - B = - \int_0^t dt_1 J_{BH}(t_1). \quad (117)$$

この両辺に、左から $U_\epsilon(t, 0)$ と右から $U_\epsilon(0, t)$ をそれぞれ演算し、 $U_\epsilon(t, 0) B U_\epsilon(0, t)$ についての表式に変形する：

$$U_\epsilon(t, 0) B U_\epsilon(0, t) = B + \int_0^t dt_1 U_\epsilon(t, 0) J_{BH}(t_1) U_\epsilon(0, t). \quad (118)$$

この式で $B = \bar{\rho}_\epsilon$ としたものを式 (113) に代入する：

$$\begin{aligned} \langle J_{cH}(t) \rangle &= \text{Tr} \left[\left(\bar{\rho}_\epsilon + \int_0^t dt_1 U_\epsilon(t, 0) J_{\bar{\rho}_\epsilon H}(t_1) U_\epsilon(0, t) \right) J_c \right] \\ &= \langle J_c \rangle + \int_0^t dt_1 \text{Tr} [J_{\bar{\rho}_\epsilon H}(t_1) J_{cH}(t)]. \end{aligned} \quad (119)$$

この結果から、定常性を示すには右辺第 2 項が $\epsilon \rightarrow 0$ で 0 になることを示せばよい。

まずは、 $J_{\bar{\rho}_\epsilon}$ という量に着目しよう。ここで、 $\bar{\rho}_\epsilon$ の定義式 (30) は、実は式 (42) を用いて不変部分の表式としても書ける：

$$\bar{\rho}_\epsilon = i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \rho_{0H}(t'). \quad (120)$$

この密度行列の表式を式 (116) に代入することで $J_{\bar{\rho}_\epsilon}$ が得られる：

$$J_{\bar{\rho}_\epsilon} = i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} [\rho_{0H}(t'), H_\epsilon(t)]. \quad (121)$$

さてここから、式 (121) に $H_\epsilon(t) = H_\epsilon(t') + (H_\epsilon(t) - H_\epsilon(t'))$ を用いた表式を書き直そう：

$$\begin{aligned} J_{\bar{\rho}_\epsilon} &= i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} [\rho_{0H}(t'), H_\epsilon(t')] + i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} [\rho_{0H}(t'), H_\epsilon(t) - H_\epsilon(t')] \\ &= \epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} \left(-\frac{\partial \rho_{0H}(t')}{\partial t'} \right) + i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} g \left(e^{-\epsilon|t|} - e^{-\epsilon|t'|} \right) [\rho_{0H}(t'), H_1] \\ &= -\epsilon(\rho_0 - \bar{\rho}_\epsilon) + i\epsilon \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\epsilon|t'|} g \left(e^{-\epsilon|t|} - e^{-\epsilon|t'|} \right) [\rho_{0H}(t'), H_1]. \end{aligned} \quad (122)$$

最後の表式の第 2 項は、 $\epsilon \rightarrow 0$ のもとでは、 $e^{-\epsilon|t|} - e^{-\epsilon|t'|} \rightarrow 0$ のため寄与しない。この結果を、 $\epsilon \rightarrow 0$ での式 (119) の右辺第 2 項のトレースに用いると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} [J_{\bar{\rho}_\epsilon H}(t_1) J_{cH}(t)] = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \cdot \text{Tr} [(\rho_0 - \bar{\rho}_\epsilon) U_\epsilon(t_1, 0) J_{cH}(t) U_\epsilon(0, t_1)] \quad (123)$$

と書ける。 ρ_0 や $\bar{\rho}_\epsilon$ での期待値が有限であると仮定すると、 ϵ の比例因子のために、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} [J_{\bar{\rho}_\epsilon H}(t_1) J_{cH}(t)] = 0 \quad (124)$$

となる。この結果を、 $\epsilon \rightarrow 0$ のもとでの式 (119) に用いると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle J_{cH}(t) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle J_c \rangle \quad (125)$$

が最終的に得られる。従ってカレントの定常性が示された。同様の議論に基づいて、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle J_{cH}(t) J_{cH}(t') \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle J_{cH}(t - t') J_{cH}(0) \rangle \quad (126)$$

も証明できる。

これまで Keldysh 形式では、時間に依存した期待値の定常性の性質は仮定されてきた。しかしながら、ここで示したように、Keldysh 形式での密度行列が不変部分になっているという事実から定常状態が証明できることがわかった。

7.2 不可逆性

本節では、エントロピー生成をバイアスの最低次まで求め、不可逆性を議論しよう。まず、Zubarev が定義したエントロピーは、

$$S(t) \equiv - \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} (\rho_\epsilon(t) \ln \rho_0) \quad (127)$$

と与えられている。このエントロピーの定義を用いて、エントロピー生成は、

$$\sigma(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} S(t) \quad (128)$$

$$= - \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_\epsilon(t) \ln \rho_0 \right) \quad (129)$$

となる。

このエントロピー生成の一般的な表式を導出しよう。そこで式 (129) のトレース部分を求める。密度行列の時間微分は von Neumann 方程式 (18) を用いて書き直し、その表式を $\text{Tr}([A, B]C) = \text{Tr}(B[C, A])$ により変形する：

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_\epsilon(t) \ln \rho_0 \right) &= -i \text{Tr} \left([H_\epsilon, \rho_\epsilon(t)] \ln \rho_0 \right) \\ &= -i \text{Tr} \left(\rho_\epsilon(t) [\ln \rho_0, H_\epsilon] \right). \end{aligned} \quad (130)$$

式 (25) の ρ_0 の定義と、von Neumann 方程式の形式解 (20) を用いると、

$$\begin{aligned} \ln \rho_0 &= -\beta \left[H_0 - \frac{eV}{2} (N_L - N_R) - \Omega_0 \right], \\ \rho_\epsilon(t) &= U_\epsilon(t, 0) \rho_\epsilon(0) U_\epsilon(0, t) \end{aligned} \quad (131)$$

が得られる。これらを用いると、式 (130) の最後の表式は、

$$\begin{aligned} &-i \text{Tr} \left(\rho_\epsilon(t) [\ln \rho_0, H_\epsilon] \right) \\ &= i \beta \text{Tr} \left\{ \rho_\epsilon(0) \left(U_\epsilon(0, t) [H_0, H_\epsilon] U_\epsilon(t, 0) - V U_\epsilon(0, t) \left[\frac{e}{2} (N_L - N_R), H_\epsilon \right] U_\epsilon(t, 0) \right) \right\} \end{aligned} \quad (132)$$

と求められる。ところで、式 (64) と式 (65) で定義したカレント $J_{eH}(t)$ と $J_{cH}(t)$ は、式 (33) のカレントの表式を考慮すると、

$$i U_\epsilon(0, t) [H_0, H_\epsilon] U_\epsilon(t, 0) = J_{eH}(t), \quad (133)$$

$$i U_\epsilon(0, t) \left[\frac{e}{2} (N_L - N_R), H_\epsilon \right] U_\epsilon(t, 0) = J_{cH}(t) \quad (134)$$

と書ける。これを式 (132) の右辺に代入すると、

$$\beta \text{Tr} [\rho_\epsilon(0) (J_{eH}(t) - V J_{cH}(t))] = \beta (\langle J_{eH}(t) \rangle - V \langle J_{cH}(t) \rangle) \quad (135)$$

が得られる。この結果を用いると、式 (130) は次のように得られる：

$$\text{Tr} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_\epsilon(t) \ln \rho_0 \right) = \beta (\langle J_{eH}(t) \rangle - V \langle J_{cH}(t) \rangle). \quad (136)$$

これを式 (129) に代入することで、出発点となるエントロピー生成の一般的な表式が得られる：

$$\sigma(t) = - \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \beta \left(\langle J_{eH}(t) \rangle - V \langle J_{cH}(t) \rangle \right). \quad (137)$$

ここから、式 (137) のエントロピー生成の表式を、バイアスの最低次である 2 次まで求め、それが常に正であることを示そう。まず準備として、エントロピー生成に対する V の 1 階微分と 2 階微分を求める：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial V} &= -\beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial V} (\langle J_e \rangle - V \langle J_c \rangle) \\ &= -\beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \langle J_e \rangle}{\partial V} - V \frac{\partial \langle J_c \rangle}{\partial V} - \langle J_c \rangle \right), \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial V^2} &= -\beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial \langle J_e \rangle}{\partial V} - V \frac{\partial \langle J_c \rangle}{\partial V} - \langle J_c \rangle \right) \\ &= -\beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 \langle J_e \rangle}{\partial V^2} - V \frac{\partial^2 \langle J_c \rangle}{\partial V^2} - 2 \frac{\partial \langle J_c \rangle}{\partial V} \right). \end{aligned} \quad (139)$$

次に、密度行列 $\bar{\rho}_\epsilon$ に対しても V の 1 階微分と 2 階微分を求める：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_\epsilon}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial V} e^{-\beta [\bar{H}_{0\epsilon} + eV(\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})/2 - \Omega_0]} \\ &= -\beta \frac{e}{2} (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) e^{-\beta [\bar{H}_{0\epsilon} + eV(\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})/2 - \Omega_0]}, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\rho}_\epsilon}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2}{\partial V^2} e^{-\beta [\bar{H}_{0\epsilon} + eV(\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})/2 - \Omega_0]} \\ &= \left[\beta \frac{e}{2} (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) \right]^2 e^{-\beta [\bar{H}_{0\epsilon} + eV(\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})/2 - \Omega_0]}. \end{aligned} \quad (141)$$

エントロピー生成の V の 1 次の係数を求めよう。式 (138) で $V = 0$ とすると、 $\langle J_c \rangle|_{V=0} = 0$ となるので J_e の V 微分の項だけが残る：

$$\left. \frac{\partial \sigma(t)}{\partial V} \right|_{V=0} = -\beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \langle J_e \rangle}{\partial V} \right|_{V=0}. \quad (142)$$

$\langle J_e \rangle$ の V 微分では、式 (140) を用い密度行列の V 微分を行う。さらに、式 (133) から $J_e = i[H_0, H]$ を用いると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \langle J_e \rangle}{\partial V} \right|_{V=0} &= \text{Tr} \left[J_e \frac{\partial \bar{\rho}_\epsilon}{\partial V} \right] \Big|_{V=0} \\ &= -i\beta \frac{e}{2} \text{Tr} \left[(H_0 H - H H_0) (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0} \end{aligned} \quad (143)$$

を得る。式 (143) を式 (142) に代入する：

$$\left. \frac{\partial \sigma(t)}{\partial V} \right|_{V=0} = i\beta^2 \frac{e}{2} \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[(H_0 H - H H_0) (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0}. \quad (144)$$

ところで、 $g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0$ では、不変部分の特徴としてハミルトニアンと可換となっていた。すなわち、 H と $\bar{N}_{L,R\epsilon}$ と $\bar{\rho}_\epsilon$ がそれぞれ可換となる。この事実とトレース内の巡回置換を用いると以下の関係式が得られる：

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[H_0 H (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0} = \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[H H_0 (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon}) \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0}. \quad (145)$$

この結果を考慮すると、式 (144) の右辺はゼロとなる。従って、エントロピー生成の V の 1 次の係数は、

$$\left. \frac{\partial \sigma(t)}{\partial V} \right|_{V=0} = 0 \quad (146)$$

となり寄与しないことがわかる。

同様にして、エントロピー生成の V の 2 次の係数を考えよう。式 (139) で $V = 0$ とすると、 V に比例する項は消える：

$$\left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial V^2} \right|_{V=0} = -\frac{1}{2!} \beta \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 \langle J_e \rangle}{\partial V^2} - 2 \frac{\partial \langle J_c \rangle}{\partial V} \right) \Big|_{V=0}. \quad (147)$$

まず第 1 項を議論しよう。 $\langle J_e \rangle$ の V の 2 階微分では、式 (141) を用いて密度行列の V の 2 階微分を行い、さらに 1 次と同様に $J_e = i[H_0, H]$ を用いる：

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \langle J_e \rangle}{\partial V^2} \right|_{V=0} &= \text{Tr} \left[J_e \frac{\partial^2 \bar{\rho}_\epsilon}{\partial V^2} \right] \Big|_{V=0} \\ &= i\beta^2 \frac{e^2}{4} \text{Tr} \left[(H_0 H - H H_0) (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})^2 \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0}. \end{aligned} \quad (148)$$

これもまた 1 次と同様に、 $g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0$ のもとでの H と $\bar{N}_{L,R\epsilon}$ と密度行列 $\bar{\rho}_\epsilon$ が可換である事実を考慮すると、

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\partial^2 \langle J_e \rangle}{\partial V^2} \right|_{V=0} &= i\beta^2 \frac{e^2}{4} \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[(H_0 H - H H_0) (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})^2 \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0} \\ &= i\beta^2 \frac{e^2}{4} \lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[(H H_0 - H H_0) (\bar{N}_{L\epsilon} - \bar{N}_{R\epsilon})^2 \bar{\rho}_\epsilon \right] \Big|_{V=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (149)$$

が得られる。従って、式 (147) の右辺第 1 項はエントロピー生成には寄与しないことがわかる。

次に、式 (147) の右辺第 2 項を見てみよう。定義式 (67) と (68) を考慮すると、この項は $V = 0$ での微分コンダクタンスに他ならない：

$$\lim_{g \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \langle J_c \rangle}{\partial V} \right|_{V=0} = G(0). \quad (150)$$

式 (149) と式 (150) の結果から、式 (147) の表式として以下を得る：

$$\left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial V^2} \right|_{V=0} = \beta G(0). \quad (151)$$

以上より、式 (144) と式 (151) の結果から、エントロピー生成の V の 2 次までを評価すると、

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\simeq \sigma(t) \Big|_{V=0} + V \cdot \left. \frac{\partial \sigma(t)}{\partial V} \right|_{V=0} + V^2 \cdot \left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial V^2} \right|_{V=0} \\ &= \beta G(0) V^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (152)$$

となり、この範囲で正となっていることがわかる。

8 まとめ

本講義では、まずメゾスコピック系に応用された Keldysh 形式での摂動項の断熱的印加を解析し、それが Zubarev の導入した不変部分を導入する手続きと同じであることを示した。Keldysh 形式のこの性質が新たに明らかにされたことで、以下の本講義の結果が導かれることになった。

まず、密度行列が MacLennan-Zubarev タイプの非平衡統計演算子となることがわかった。さらに、この密度行列の指数部でのバイアスに共役な量も不変部分として表わされるために、微分コンダクタンスの一般的な表式が、カレントーカレント相関関数とカレントー電荷相関関数により表わされることを示した。線形応答領域ではカレントー電荷相関関数はゼロとなり、久保公式が再現できることを確認した。線形領域から外れて初めて、この非自明な相関関数が微分コンダクタンスに寄与することになる。これを非平衡久保公式と呼ぶことにした。

次に、このカレントー電荷相関関数に焦点を当てた議論を行った。実は、これがショットノイズの任意の温度への自然な拡張を与えていることを示した。結果的に、不変部分という概念が、非平衡久保公式を通じて、ショットノイズ、ノイズパワー、微分コンダクタンスというメゾスコピック系の物理量を常に関係づけるだけの普遍性をもつことがわかった。この物理量間の関係式を用いて、任意の温度でのショットノイズ研究の方針を提案した。この提案を相互作用のない Anderson 模型に対して、Keldysh Green 関数を用いて具体的に計算して確認を行った。

最後に、密度行列が不変部分として決定されていることにより、これまで Keldysh Green 関数では仮定されてきた、時間相関関数の定常性も証明できることを示した。またエントロピー生成をバイアスの最低次まで求めた結果が正になることを示し、確かに不可逆性が記述できていることがわかった。

謝辞

東京大学生産技術研究所羽田野直道准教授と、同研究所西野晃徳氏と今村卓史氏には、原稿をご精読頂き多くのコメントを頂きました。また、原稿の作成に当たって、同研究所修士課程卒業の赤川史帆氏(羽田野研究室)に、図の作成にあたって、同研究所技術補佐員の佐藤直哉氏にお手伝い頂きました。皆様ご尽力どうも有難うございました。

参考文献

- [1] S. Hershfield: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2134.
- [2] A. Schiller and S. Hershfield: Phys. Rev. B **51** (1995) 12896; A. Schiller and S. Hershfield: Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1821; A. Schiller and S. Hershfield: Phys. Rev. B **58** (1998) 14978.

- [3] S. Tasaki: Chaos, Solitons and Fractals **12** (2001) 2657; in *Statistical Physics*, eds. M. Tokuyama and H. E. Stanley (AIP Press, New York, 2000) p. 356; in *Quantum Information III*, eds. T. Hida and K. Saito (World Scientific, Singapore, 2001) p. 157.
- [4] S. Tasaki and T. Matsui: in *Fundamental Aspects of Quantum Physics*, eds. L. Accardi and S. Tasaki (World Scientific, 2003) p. 100.
- [5] J. Takahashi and S. Tasaki: J. Phy. Soc. Jpn. **75** (2006) 94712.
- [6] T. Fujii: J. Phy. Soc. Jpn. **76** (2007) 44709.
- [7] L. V. Keldysh: Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1018.
- [8] D. C. Langreth: in *Linear and Nonlinear Transport in Solids*, eds. J. T. Devreese and V. E. Van Doren (Plenum Press, New York, 1976) Vol. 17 of NATO ASI, Series B: Physics.
- [9] J. Rammer: Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 323.
- [10] K.-C. Chou, Z.-B. Su, B.-L. Hao and Y. Lu: *Equilibrium and nonequilibrium formalisms made unified*, Phys. Rep. **118** (1985) 1.
- [11] H. Haug and A.-P. Jauho: *Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors*, (Springer, Berlin ; New York, 1996).
- [12] A. Kamenev: in *Strongly Correlated Fermions and Bosons in Low-Dimensional Disordered Systems*, eds. I. V. Lerner, B. L. Althsular, V. I. Fal'ko, T. Giamarchi (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002) Nato Science Series; Sub-series II, Mathematics, Physics and Chemistry, Vol 72.
- [13] A. Kamenev: in Lectures notes for 2004 Les Houches Summer School on “Nanoscopic Quantum Physics.”
- [14] C. Caroli, R. Combescot, P. Nozières, and D. S-James: J. Phys. C: Solid State Phys. **4** (1971) 916.
- [15] S. Hershfield, J. H. Davies, and J. W. Wilkins: Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 3720; Phys. Rev. B. **46** (1992) 7046.
- [16] Y. Meir, N. S. Wingreen, and P. A. Lee: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2601; N. S. Wingreen and Y. Meir: Phys. Rev. B. **49** (1994) 11040.
- [17] See, for example, A. L Fetter and J. D. Walecka: *Quantum Theory of Many Particles* (McGraw-Hill, New York, 1971).

- [18] P. Nozières: *Theory of Interacting Fermi Systems* (Benjamin New York, 1964).
- [19] D. N. Zubarev: *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics* (Consultants, New York, 1974).
- [20] J. A. MacLennan, Jr.: *Adv. Chem. Phys.* **5** (1963) 261.
- [21] G. D. Mahan: *Many-Particle Physics, 3rd ed.* (Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2000).
- [22] H. Bruus and K. Flensberg: *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics.* (Oxford University Press, 2004).
- [23] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker: in *Mesoscopic Electron Transport*, eds. Lydia L. Sohn, Leo P. Kouwenhoven, and Gerd Schon (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997) Vol. 345 of NATO ASI, Series E: Applied Sciences, p. 225.
- [24] See, for example, Ya. M. Blanter and M. Büttiker: *Physics Reports* **336** (2000) p. 1.
- [25] C. W. J. Beenakker and C. Schönenberger: *Physics Today* **56(1)**, May (2003) 37.
- [26] C. L. Kane and M. P. A. Fisher: *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 724.
- [27] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne: *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2526.