

## 確率付グラフ上の点素な s-t Disjoint Paths の期待最大本数の計算問題

程 鵬 増山 繁  
Peng CHENG Shigeru MASUYAMA  
豊橋技術科学大学知識情報工学系

[概要] 枝あるいは節点の切断の可能性を考慮する確率付グラフにおいて、指定された 2 節点間の点素な路の最大本数の期待値はネットワークの信頼性の評価基準のひとつとして考えられる。その期待値を計算する問題は一般に NP 困難であることが知られている。本稿では、その計算問題がグラフが平面又は s-t 出入双木である場合にも NP 困難であることを証明する。更に、この期待値が効率良く求まるグラフを与える。

### 1 はじめに

通信網をはじめ、ガスパ網や輸送網などはグラフの構造を持つネットワークとして定式化できる。グラフの指定された 2 節点間の (節点あるいは辺) 素な路の最大本数を求める問題はネットワークにおけるひとつの基礎的問題であり、それを効率良く求めるアルゴリズムが多く知られている<sup>[4,5,9]</sup>。但し、ここではグラフの節点や枝が故障しないことが仮定されている。一方、節点 (Vertex) あるいは枝 (Edge) の故障確率を考慮するグラフ (以下、確率付グラフと呼ぶ) においては、節点あるいは枝の故障によって指定された 2 節点間の素な路の最大本数は変わるが、その期待値 (即ち、平均値) が存在する。この期待値は良く研究されている 2 節点間の連結確率<sup>[1,2,9]</sup>と同様にネットワークの信頼性の評価基準のひとつとして考えられる。

ところが、[12] で与えられた確率付グラフにおいて、その 2 節点間の辺素な路の最大本数の期待値がいくつかの特殊なグラフに対して効率良く求まることを報告した。更に、グラフが閉路を持たないグラフのクラスの部分クラスである s-t 出入双木 (s-t Out-In Bitree) および平面グラフ (Planar Graph) であるときには、この計算問題が NP 困難であることも指摘した<sup>[12]</sup>。

本稿では、指定された 2 節点間の確率付グラフ上の点素な路、即ち互いに節点を共通しない路の最大本数の期待値を計算する問題を考える。まず、2 節点間の連結確率の計算問題がこの計算問題に帰着できることを証明することによって、平面グラフ及び s-t 出入双木に対してその計算問題がいずれも NP 困

難であることを示す。また、確率付 s-t 直並列グラフ (s-t Series Parallel Graph) および各節点の故障確率が等しい節点への確率付 s-t 多段完全 2 部グラフ (s-t Multi-ranks Complete Bipartite Graph) に対してその期待値がグラフのサイズに関する多項式時間で計算できることを明らかにする。

### 2 準備

有向グラフ  $G = (V, A, s, t)$  を考える。ここで、 $V$  は有限個の節点の集合であり、 $A$  は有向枝の集合と呼ばれる  $V \times V$  の部分集合であり、その要素 (有向枝) を  $a = (u, v), u, v \in V$  とする。 $s, t (s \neq t)$  はそれぞれソース (Source)、シンク (Sink) と呼ばれる  $V$  の 2 つの指定された節点である。以下では、グラフに関する概念と記号は文献 [8, 12] に従う。

グラフ  $G = (V, A, s, t)$  において、節点の部分集合  $S \subseteq V$  のすべての節点とその節点に接続するすべての枝を除去したグラフを  $G - S$  と記す。 $G$  の中で互いに共通の節点を持たない s-t 路を点素な s-t 路と呼ぶが、与えられた  $G$  に対して点素な s-t 路の最大本数を  $\kappa_{st}(G)$  と記す。

グラフ  $G = (V, A, s, t)$  を

$$\begin{aligned} V_1 \cup V_2 &= V, V_1 \cap V_2 = \phi \\ A_1 \cup A_2 &\subseteq A, A_1 \cap A_2 = \phi, \\ A - (A_1 \cup A_2) &\subseteq V_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (1)$$

を満たす  $T_{O(s)} = (V_1, A_1), T_{I(t)} = (V_2, A_2)$  に分離できるとき、 $G$  を s-t 出入双木 (s-t Out-In Bitree) と呼ぶ。ここで、 $T_{O(s)}, T_{I(t)}$  はそれぞれ根  $s$  からの有向出木と根  $t$  への有向入木を表す。条件 (1) と有向

木の性質を用いて、s-t 出入双木が閉路を持たないことを容易に導くことができる。s-t 出入双木の例を図 1 に示す。

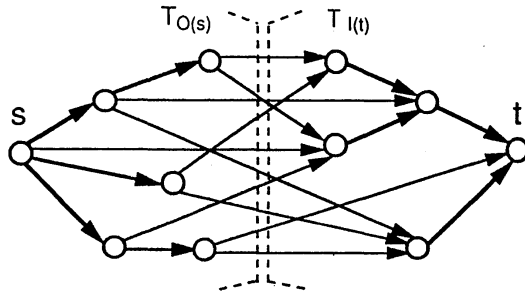


図 1. s-t 出入双木

### 3 s-t 線グラフ

グラフ  $G = (V, A, s, t)$  に対し、次のグラフ  $L_{st}(G) = (V_L, A_L, s, t)$  を s-t 線グラフ (s-t Line Digraph) と呼ぶ。

まず、 $G$  の各枝  $a$  に対し、節点  $u_a$  を対応させる。次に  $G$  の枝  $a$  の終点と枝  $a'$  の始点が一致するとき、枝  $(u_a, u_{a'})$  を作る。最後に節点  $s, t$  を加え、 $G$  で  $s$  から枝  $a$  が出るときに枝  $(s, u_a)$  を、又、枝  $a$  が  $s$  に入っているときに枝  $(u_a, s)$  を加え、 $G$  で枝  $a$  が  $t$  に入っているときに枝  $(u_a, t)$  を、又、 $t$  から枝  $a$  が出るときに枝  $(t, u_a)$  を加える。以下に形式的に  $V', A'$  を示す。

$$V' = \{s, t\} \cup \{u_a | a \in A\}.$$

$$\begin{aligned} A' = & \cup_{v \in V - \{s, t\}} \{(u_{a'}, u_{a''}) | r(a') = i(a'') = v, \\ & a', a'' \in A\} \\ & \cup \{(s, u_{a'}) | i(a') = s, a' \in A\} \\ & \cup \{(u_{a'}, s) | r(a') = s, a' \in A\} \\ & \cup \{(u_{a'}, t) | r(a') = t, a' \in A\} \\ & \cup \{(t, u_{a'}) | i(a') = t, a' \in A\}. \end{aligned}$$

但し、 $i(a), r(a)$  はそれぞれ枝  $a$  の始点と終点を表す。

(補題 1) グラフ  $G = (V, A, s, t)$  に対し、次のことが成り立つ。

- (i)  $G$  の枝は  $L_{st}(G)$  の  $s, t$  以外の節点と一対一に対応する。
- (ii)  $L_{st}(G)$  は多重枝を持たない。

- (iii)  $L_{st}(G)$  が閉路をもたないための必要十分条件は  $G$  に閉路が存在しないことである。
- (iv)  $G$  の単純な s-t 路  $\pi$  から  $L_{st}(G)$  によって定まった  $L_{st}(G)$  の単純な s-t 路  $\pi'$  は唯一である。
- (v)  $G$  の単純な s-t 路と  $L_{st}(G)$  の単純な s-t 路が一対一に対応するための必要十分条件は  $G$  が閉路をもたないことである。
- (vi)  $G$  の枝の部分集合  $U (\subseteq A)$  に対して、 $U$  に対応する  $L_{st}(G)$  の節点の集合を  $S_U$  とする。

$$L_{st}(G - U) = L_{st}(G) - S_U.$$

(証明).  $L_{st}(G)$  の定義から (i)-(iv) は明らか<sup>[7]</sup>。

(v).  $L_{st}(G)$  の単純な s-t 路  $\pi'$  :

$$s, (s, u_{a_1}), u_{a_1}, (u_{a_1}, u_{a_2}), u_{a_2}, \dots, u_{a_k}, (u_{a_k}, t), t$$

に対して、 $L_{st}(G)$  の定義より、 $i(a_1) = s, r(a_k) = t$  となり、枝  $(u_{a_i}, u_{a_{i+1}}), i = 1, 2, \dots, k-1$  に対して  $i(a_i) = r(a_{i+1}) = v_i (\in V)$  となる。従って、 $G$  の s-t 路  $\pi$  :

$$s, a_1 = (s, v_1), v_1, \dots, v_{k-1}, a_k = (v_{k-1}, t), t$$

が存在する。 $G$  の枝と  $L_{st}(G)$  の  $s, t$  の以外の節点が一対一に対応し、かつ  $\pi'$  上の  $s, t$  以外の節点  $u_{a_i}$  と  $\pi$  上の枝  $a_i$  が一対一に対応すること、及び  $u_{a_1}, u_{a_2}, \dots, u_{a_k}$  が異なることによって、 $\pi$  が唯一である。次に、 $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  が相異なることを示す。さもなければ、 $v_i = v_j, 1 \leq i < j \leq k-1$  が成り立つとすると、

$$v_i, a_{i+1} = (v_i, v_{i+1}), v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, a_j = (v_{j-1}, v_j), v_j$$

が  $G$  の閉路である。これはこの仮定に反する。故に、 $\pi$  は  $G$  の単純な s-t 路である。

(vi).  $G$  の枝の部分集合  $U (\subseteq A)$  に対し、 $U$  に対応する  $L_{st}(G)$  の節点の集合を  $S_U$  とする。 $L_{st}(G)$  の定義より  $L_{st}(G) - S_U$  の節点と  $G - U$  の枝は一対一に対応する。 $u_{a'}, u_{a''} \notin \{s, t\}$  の場合について、枝  $(u_{a'}, u_{a''})$  は  $L_{st}(G)$  の枝であるとする。 $a', a'' \notin U$  であるので、 $u_{a'}, u_{a''} \notin S_U$  である。また枝  $(u_{a'}, u_{a''})$  が  $L_{st}(G)$  の枝であるから、 $L_{st}(G) - S_U$  の定義より、枝  $(u_{a'}, u_{a''})$  は  $L_{st}(G) - S_U$  の枝である。逆に枝  $(u_{a'}, u_{a''})$  は  $L_{st}(G) - S_U$  の枝であるとする。 $u_{a'}, u_{a''} \notin S_U$  から  $a', a'' \in A - U$  となる。また、節点  $r(a') = i(a'') = v \in V$  は  $G - U$  の節点であるので、枝  $(u_{a'}, u_{a''})$  は  $L_{st}(G)$  の枝である。 $u_{a'} \in$

$\{s, t\}$  あるいは  $u_{a''} \in \{s, t\}$  の場合についても、同様である。□

更に、次のことがいえる。

(補題 2) 閉路をもたないグラフ  $G = (V, A, s, t)$  に対し、

$$\lambda_{st}(G) = \kappa_{st}(L_{st}(G))$$

が成り立つ。但し、 $\lambda_{st}(G)$  は  $G$  の辺素な  $s$ - $t$  路の最大本数を表す。

(証明)  $G$  の最大本数である辺素な  $s$ - $t$  路を  $\pi_1, \dots, \pi_{\lambda_{st}(G)}$  とする。補題 1(iv) よりそれぞれ  $\pi_1, \dots, \pi_{\lambda_{st}(G)}$  に対応して  $L_{st}(G)$  の  $\lambda_{st}(G)$  本の異なる単純な  $s$ - $t$  路  $\pi'_1, \dots, \pi'_{\lambda_{st}(G)}$  がある。補題 1(i) より、各  $\pi'_i$  上の  $s, t$  以外の節点とそれに対応する各  $\pi_i$  上の枝が丁度一対一に対応するので、 $\pi_1, \dots, \pi_{\lambda_{st}(G)}$  が辺素な  $s$ - $t$  路であるという仮定より、 $\pi'_1, \dots, \pi'_{\lambda_{st}(G)}$  が  $L_{st}(G)$  の点素な  $s$ - $t$  路である。故に、 $\lambda_{st}(G) \leq \kappa_{st}(L_{st}(G))$ 。

逆に  $L_{st}(G)$  の最大本数である点素な  $s$ - $t$  路を  $\pi'_1, \dots, \pi'_{\kappa_{st}(L_{st}(G))}$  とする。補題 1(v) より  $\pi'_1, \dots, \pi'_{\kappa_{st}(L_{st}(G))}$  に対応して  $G$  の  $\kappa_{st}(L_{st}(G))$  本の異なる単純な  $s$ - $t$  路  $\pi_1, \dots, \pi_{\kappa_{st}(L_{st}(G))}$  がある。補題 1(i) より、各  $\pi_i$  上の枝とそれに対応する各  $\pi'_i$  上の  $s, t$  以外の節点が丁度一対一に対応するので、 $\pi'_1, \dots, \pi'_{\kappa_{st}(L_{st}(G))}$  が点素な  $s$ - $t$  路であるという仮定より、 $\pi_1, \dots, \pi_{\kappa_{st}(G')}$  は  $G$  の辺素な  $s$ - $t$  路である。故に、 $\lambda_{st}(G) \geq \kappa_{st}(L_{st}(G))$  が成り立つ。□

#### 4 点素な $s$ - $t$ 路の期待最大本数

$s, t$  以外の節点の故障確率のベクトル  $p_v (0 \leq p_v(v) < 1, v \in V - \{s, t\})$  を与えるグラフ  $G = (V, A, s, t)$  を点への確率付グラフと呼び、 $(G, p_v)$  と記す。但し各節点の故障が独立に生じ、節点が故障するときに節点が完全には切断し、かつ、枝が故障しないと仮定する。簡単のため、以下では  $V - \{s, t\}$  を  $V_{-st}$  と記す。

同様に枝の故障確率  $p_A$  や枝と節点との故障確率  $p_{v,A}$  を考慮するグラフを辺への確率付グラフや点辺への確率付グラフと呼び、それらをそれぞれ  $(G, p_A)$ ,  $(G, p_{v,A})$  と記す。

##### 4.1 定義

点への確率付グラフ  $(G = (V, A, s, t), p_v)$  において、節点は故障しているか、していないかの 2 つの状態をもつ。故障状態  $S (\subseteq V_{-st})$  とは  $S$  に属するすべての節点が故障し、かつ、それ以外のすべての節

点が故障していない状態である。各節点の故障が独立に生じるという仮定より、各節点の故障状態の組合せによって  $2^{|V|-2}$  個の切断状態  $S$  に対応する部分グラフ  $G-S$  が生じる。従って、 $G-S$  の生起確率  $\psi(G-S)$  は

$$\psi(G-S) \equiv \prod_{v \in S} p_v(v) \prod_{v \in V - \{s, t\} - S} (1 - p_v(v)) \quad (2)$$

となる。明らかに、 $\sum_{S \subseteq V_{-st}} \psi(G-S) = 1$  となる。 $(G, p_v)$  の点素な  $s$ - $t$  路の最大本数は節点の故障状態  $S (\subseteq V_{-st})$  によって変わるが、その期待値 (すなわち、平均値) が常に存在する。そこで、各故障状態  $S (\subseteq V_{-st})$  における  $G-S$  の点素な  $s$ - $t$  路の最大本数  $\kappa_{st}(G-S)$  とその  $G-S$  の生起確率  $\psi(G-S)$  の積の総和を点素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値  $\Psi(G, p_v)$  と呼び、次式

$$\Psi(G, p_v) \equiv \sum_{S \subseteq V_{-st}} \kappa_{st}(G-S) \psi(G-S) \quad (3)$$

で定義する。確率付グラフ  $(G, p_A)$ ,  $(G, p_{v,A})$  について、同様に  $\Psi(G, p_v)$ ,  $\Psi(G, p_{v,A})$  を定義する。

以下では点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  の  $\Psi(G, p_v)$  の性質を調べていく。最大本数が丁度  $r (\leq k)$  本である点素な  $s$ - $t$  路が存在する確率  $\delta_r(G, p_v)$  を

$$\delta_r(G, p_v) \equiv \sum_{\kappa_{st}(G-S)=r \text{ なる } S \subseteq V_{-st}} \psi(G-S)$$

と定義し、最大本数が  $r$  本以上である点素な  $s$ - $t$  路が存在する確率  $\delta_r^*(G, p)$  を

$$\delta_r^*(G, p_v) \equiv \sum_{\kappa_{st}(G-S) \geq r \text{ なる } U \subseteq A} \psi(G-U)$$

と定義する。明らかに、 $\delta_1^*(G, p_v)$  は少なくとも 1 本  $s$ - $t$  路が存在する確率である。 $\delta_r(G, p)$ ,  $\delta_r^*(G, p)$  の定義によって、次のことが成り立つ。

$$\Psi(G, p_v) = \sum_{r=1}^k \delta_r^*(G, p_v) \quad (4)$$

辺への確率付グラフ  $(G, p_A)$  および点辺への確率付グラフ  $(G, p_{v,A})$  についても、式 (4) は成り立つ。

##### 4.2 計算複雑度

与えられた点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  に対し、連結確率、即ち、少なくとも 1 本の切断されない  $s$ - $t$  路が存在する確率  $\delta_1^*(G, p)$  の計算問題が  $\Psi(G, p_v)$

の計算問題に帰着できることを次の補題に示す。ここで、問題  $P_0$  を問題  $P_1$  に帰着できるとは問題  $P_1$  の入力サイズの多項式時間で問題  $P_1$  を解けば問題  $P_0$  の入力サイズの多項式時間で問題  $P_0$  が解けることを意味する [6]。

(補題 3) 点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  において、 $\delta_1^*(G, p_v)$  の計算問題は  $\Psi(G, p_v)$  の計算問題に帰着できる。

(証明)  $(G = (V, A, s, t), p_v)$  に対し、 $(G' = (V \cup \{s'\}, A \cup \{(s', s)\}, s', t), p'_v)$  をつくる。但し  $p'_v(v) = p(v)$ ,  $v \in V_{-st}$ ,  $p'_v(s) = p_0$ ,  $0 < p_0 < 1$  とする。明らかに、節点  $s$  が  $G'$  の  $s$ - $t$  切断点なので、 $G'$  の点素な  $s$ - $t$  路の最大本数  $\kappa_{st}(G')$  は 1 であり、 $G'$  の少なくとも 1 本の切断されない  $s$ - $t$  路が存在する確率  $\delta_1^*(G', p_v)$  は  $p_0$  と、 $G$  の少なくとも 1 本の切断されない  $s$ - $t$  路が存在する確率  $\delta_1^*(G, p_v)$  の積である。

$\kappa_{st}(G') = 1$  から、式 (4) によって

$$\Psi(G', p_v) = \delta_1^*(G', p_v) = p_0 \delta_1^*(G, p_v)$$

が成り立つ。これで帰着できることが示せた。□

平面グラフおよび  $s$ - $t$  出入双木  $G$  において、任意の故障確率ベクトル  $p_v$  ( $0 \leq p_v < 1$ ) に対し、点への確率付グラフ上の 2 節点間の連結確率の計算問題が NP 困難であることが知られており [11,12]、補題 3 の証明が平面性や  $s$ - $t$  出入双木の条件を保つので、次の定理が成り立つ。

(定理 1)  $s$ - $t$  出入双木  $G$  および平面グラフ  $G$  において、任意の故障確率ベクトル  $p_v$  ( $0 \leq p_v < 1$ ) に対して、点への確率付グラフ上の  $\Psi(G, p_v)$  の計算問題は NP 困難である。□

辺への確率付グラフ  $(G, p_A)$  や点辺への確率付グラフ  $(G, p_{v,A})$  に対しても、同様の結果を得る。

### 4.3 多項式時間で計算できるグラフ

本節では、確率付グラフ上の点素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値がグラフのサイズに関する多項式時間で求まるグラフのクラスを示す。

まず、点素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値の計算問題と辺素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値の計算問題の関係について、次の補題が与えられる。

(補題 4) 閉路を持たないグラフ  $G$  において、辺への確率付グラフ  $(G, p_A)$  に対応して点への確率付

グラフ  $(L_{st}(G), p_v)$  を考える。但し、 $p_A(a) = p_v(u_a)$ ,  $a \in A$  である。すると、

$$\Gamma(G, p_A) = \Psi(L_{st}(G), p_v)$$

が成り立つ。但し、 $\Gamma(G, p_A)$  は辺素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値である [12]。

(証明) 補題 1(i) によって  $G$  の枝と  $L_{st}(G)$  の  $V_{-st}$  の節点が一対一に対応するので、 $p_A(a) = p_v(u_a)$ ,  $a \in A$  および式 (2) より、 $U \subseteq A$  における  $\psi(G-U)$  は  $U$  に対応する  $S_U$  における  $\psi(G-S_U)$  と等しい。 $G$  が閉路を持たないから、 $G-U$  は閉路を持たない。補題 2 と補題 1(vi) より、

$$\lambda_{st}(G-U) = \kappa_{st}(L_{st}(G-U)) = \kappa_{st}(L_{st}(G) - S_U)$$

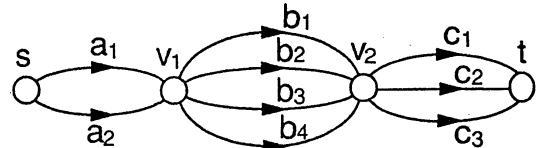
となる。 $\Gamma(G, p_A)$ ,  $\Psi(G, p_v)$  の定義より、補題が成り立つ。□

グラフ  $G = (V, A, s, t)$  が条件

$$V_{-st} = \bigcup_{i=1}^k V_i, \quad V_i \cap V_{i+1} = \emptyset, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$A = \bigcup_{i=0}^k V_i \times V_{i+1}, \quad V_0 = \{s\}, \quad V_{k+1} = \{t\}$$

を満たすときに、 $G$  を  $s$ - $t$  多段完全 2 部グラフ ( $s$ - $t$  Multi-ranks Complete Bipartite Digraph) と呼ぶ。明らかに  $L_{st}(G)$  の定義によって、 $s$ - $t$  直列グラフ  $G$  に対応する  $L_{st}(G)$  は  $s$ - $t$  多段完全 2 部グラフである (図 2 を参照)。



s-t直列グラフG

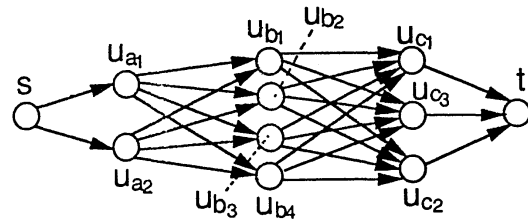


図2.  $s$ - $t$ 多段完全2部グラフ  $L_{st}(G)$

$G$  が  $s$ - $t$  直列グラフであり、かつ、 $A_i$  の各枝の故障確率が等しい場合に、辺への確率付グラフ上の

$\Gamma(G, p_A)$  を  $O(|A|^3)$  時間で求められることが知られているが<sup>[12]</sup>、s-t 直列グラフが閉路を持たないから、補題 4 によって次のことがわかる。

(定理 2) s-t 多段完全 2 部グラフ  $G$  において、 $V_i$  の各節点の故障確率が等しいベクトル  $p_v$  に対し、点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  上の  $\Psi(G, p_v)$  が  $O(|V|^3)$  時間で求まる。□

以下では、s-t 直並列グラフ  $G$  において、任意の節点の故障確率ベクトル  $p_v$  ( $0 \leq p_v < 1$ ) に対し、点への確率付グラフ上の  $\Psi(G, p_v)$  が  $O(|A| + |V|)$  時間で求まることを示す。そのために、グラフ  $G = (V, A, s, t)$  に対して、次の操作  $P_{st}$  を行なって得たグラフ  $P_{st}(G)$  を考える。

操作  $P_{st}$ : グラフ  $G$  の  $s, t$  以外のすべての節点  $v$  に対して、次の操作を行なう。

- (i).  $v$  に対し、2 つの節点  $v', v''$  を作る。
- (ii).  $v$  が終点となるすべての枝  $(u, v)$  を枝  $(u, v')$  に更新する。同様に、 $v$  が始点となるすべての枝  $(v, w)$  を枝  $(v'', w)$  に更新する。
- (iii). 枝  $a_v = (v', v'')$  を作り、節点  $v$  を除去する。

つまり、 $P_{st}(G) = (V_P, A_P, s, t)$  とすると、

$$V_P = \{s, t\} \cup \{v', v'' \mid v \in V_{-st}\}$$

$$A_P = \{(v'_1, v'_2) \mid (v_1, v_2) \in A\} \cup \{a_v = (v', v'') \mid v \in V_{-st}\}.$$

s-t 直並列グラフ  $G$  が s-t 切断点を持ち、かつ、互いに共有する節点が  $s, t$  のみである幾つかの  $G$  の部分 s-t 直並列グラフ  $G_1, G_2, \dots, G_h$  に分解できる<sup>[3]</sup>。各  $G_i$  に対し、 $G_i$  が s-t 切断点を持つこと、および、操作  $P_{st}$  より、 $P_{st}(G_i)$  は最小 s-t カットの位数が 1 である s-t 直並列グラフである。 $P_{st}(G_1), \dots, P_{st}(G_h)$  から並列結合によって得たグラフは  $P_{st}(G)$  であり、単一分解可能 s-t 直並列グラフである (図 3 を参照)。

s-t 直並列グラフ  $G = (V, A, s, t)$  に対して、点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  に対応する辺への確率付グラフ  $(P_{st}(G), p_A)$  を作る。但し、

$$\begin{aligned} p_A(a_v) &= p_v(v), v \in V_{-st}, \\ p_A(a) &= 1, a \in A_P - \{a_v = (v', v'') \mid v \in V_{-st}\} \end{aligned} \quad (5)$$

である。 $S(\subseteq V_{-st})$  に対応する  $P_{st}(G)$  の枝の集合を  $U_S$  と記す。 $G - S$  の点素な s-t 路の最大本数は  $P_{st}(G) - U_S$  の辺素な s-t 路の最大本数と等しいこと、かつ、 $\psi(G - S) = \psi(P_{st}(G) - U_S)$  となる。故に、

$$\Psi(G, p_v) = \Gamma(P_{st}(G), p_A)$$

が成り立つ。ところが、枝の集合  $A_P$  の位数は  $|A| + |V|$  であること、および、単一分解可能 s-t 直並列グラフ  $G$  において任意の枝の故障確率ベクトル  $p_A$  に対し、辺素な s-t 路の最大本数の期待値  $\Gamma(G, p_A)$  が  $O(|A|)$  時間で求まること<sup>[12]</sup> から、次の定理が成り立つ。

(定理 3) s-t 直並列グラフ  $G = (V, A, s, t)$  において、任意の節点の故障確率ベクトル  $p_v$  に対し、点への確率付グラフ  $(G, p_v)$  上の  $\Psi(G, p_v)$  が  $O(|A| + |V|)$  時間で求まる。□

式 (5) に注意すると、辺への確率付グラフ  $(G, p_A)$ 、点辺への確率付グラフ  $(G, p_{v,A})$  に対し、 $G$  が s-t 直並列グラフであるとき、同様に、次の定理が成り立つ。

(定理 4) s-t 直並列グラフ  $G = (V, A, s, t)$  において、任意の節点の故障確率ベクトル  $p_A$  と  $p_{v,A}$  に対して、辺への確率付グラフ  $(G, p_A)$  と点辺への確率付グラフ  $(G, p_{v,A})$  とともに上の  $\Psi(G, p_A)$  と  $\Psi(G, p_{v,A})$  が  $O(|A| + |V|)$  時間で求まる。□

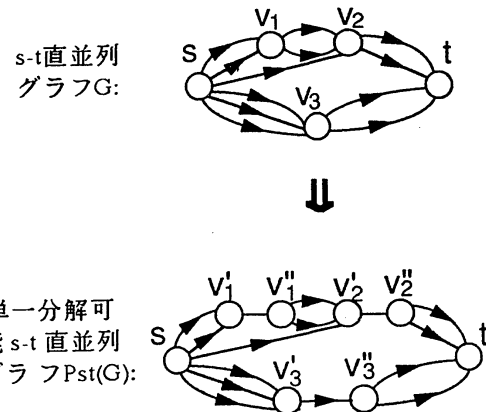


図3. 操作  $P_{st}$  の説明

## 5 むすび

本稿では、これまでにあまり研究されていない確率付グラフの点素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値を計算する問題を考えた。この問題は一般に NP 困難であることが知られているが、平面グラフおよび  $s$ - $t$  出入双木に対しても NP 困難であることを示した。特殊な平面グラフのクラス、 $s$ - $t$  直並列グラフに対し、確率付  $s$ - $t$  直並列グラフ上のその期待値を多項式時間で計算できることが分かったが、さらに、 $s$ - $t$  多段完全 2 部グラフに対してある条件を満たす故障確率のベクトルを与えると、その期待値も効率良く計算できる。それらをまとめると、表 1 になる。

表 1 において記号? の欄は今後の課題として考えられる。

## 参考文献

- [1] Ball M. O.: "Computational Complexity of Network Reliability Analysis: An Overview", IEEE trans. Reliability, Vol.R-35, pp.230-239 (august 1986).
- [2] Colbourn C. J.: "The Combinatorics of Network Reliability", Oxford University Press (1987).
- [3] Duffin R. J.: "Topology of series-parallel networks", J. Math. Appl., Vol. 10, pp.303-318 (1965).
- [4] Even S.: "Graph Algorithms", Computer Science Press (1979).
- [5] Even S. and Tarjan R. E.: "Network flow and testing graph connectivity", SIAM J. Comput., Vol. 4, pp.507-518(1975)
- [6] Garey M. R. and Johnson D. S.: "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", W. H. Freeman, San Francisco(1979).
- [7] Harary F. and Norman R. Z.: "Some Properties of Line Digraphs", Rend. Circ. Mat Palermo 9, pp.161-168(1961).
- [8] Harary F.: Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass.,1969.[池田訳, グラフ理論, 共立出版, 1971]
- [9] Khuller S. and Schieber B.: "Efficient parallel algorithms for testing connectivity and finding Disjoint  $s$ - $t$  paths in graphs", In Proc. 30th IEEE Symp. on Foundation of Computer Science, Oct. 1989, pp.288-293.
- [10] Politof T. and Satyanarayana A.: "Efficient algorithms for reliability analysis of planar networks-A survey", IEEE trans. Reliability, Vol.R-35, pp.252-259(august 1986).
- [11] Provan J. S.: "The complexity of reliability computations in planar and acyclic graphs", SIAM J. Comput., Vol. 15, pp.694-702(1986).
- [12] 程, 増山: "確率付グラフ上の辺素な  $s$ - $t$  路の最大本数の期待値計算問題の計算量について", 信学技報, COMP91-83, pp.53-61(1991-12).

表 1. 確率付グラフ上の点素な  $s$ - $t$  路の期待最大本数の計算問題の計算量

| 複<br>雑<br>度<br>$p_V, p_A, p_{V,A}$ | G     | 平面<br>グラフ | $s$ - $t$ 直並列<br>グラフ | $s$ - $t$ 出入<br>双木 | $s$ - $t$ 多段<br>完全2部<br>グラフ |
|------------------------------------|-------|-----------|----------------------|--------------------|-----------------------------|
|                                    |       |           |                      |                    |                             |
| $\Psi(G, p_V)$                     | :eq.  | !         | ○                    | !                  | ○                           |
|                                    | :neq. | !         | ○                    | !                  | ?                           |
| $\Psi(G, p_A)$                     | :eq.  | !         | ○                    | !                  | ?                           |
|                                    | :neq. | !         | ○                    | !                  | ?                           |
| $\Psi(G, p_{V,A})$                 | :eq.  | !         | ○                    | !                  | ?                           |
|                                    | :neq. | !         | ○                    | !                  | ?                           |

但し, ○: 多項式時間, !: NP 困難, ?: 未知,  
eq: 各要素(節点又は枝)の故障確率が一致する場合,  
neq: 各要素(節点又は枝)の故障確率が一致しない場合.