

超幾何微分方程式の幾何学的一般化

九州大学 理学部 吉田正章

Masaaki YOSHIDA

超幾何微分方程式は、様々な方向で一般化が考えられている。本稿では、Gauß によって発見された、だ円曲線の族と超幾何微分方程式 (HGDE) の関係を復習し、だ円曲線の族の代りに、色々な代数多様体の族を考えることにより、HGDE の一般化を試みる。

だ円曲線の族と HGDE の関係： 記号を用意。

$C(x) : \Delta^2 = t(1-t)(1-xt)$ だ円曲線

$X := \mathbb{C} - \{0, 1\} : \text{パラメタ } x \text{ の空間}$

$\eta(x) : C(x) \text{ 上の 1 つの正則微分, } x \text{ に正則に依存}$

$\gamma_1(x), \gamma_2(x) : H_1(C(x), \mathbb{Z}) \text{ の基底で交点行列が}$
 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるもの, } x \text{ に連続に依存}$

$\omega_i(x) = \int_{\gamma_i(x)} \eta(x) : \text{周期 } i=1, 2$

このとき, $\omega_1(x), \omega_2(x)$ は HGDE

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

($a=b=1/2$, $c=1$) の線型独立解である。写像

$$\mathcal{G}: X \ni x \mapsto \omega_1(x): \omega_2(x) \in \mathbb{P}^1$$

の像は上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ で、Monodromy 群は

$$\Gamma(2) := \{X \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid X \equiv \mathbb{1}_2 \pmod{2}\}$$

に共役で、

$$\pi := \mathcal{G}^{-1}: H \longrightarrow X \quad (\text{projection}) \quad \text{は mod } \Gamma(2).$$

一般化の試み: だ円曲線の代りに色々な代数多様体をもってきて、HGDEの代りにどんなものが出てくるかを調べよう。何をもってきても、ある線型微分方程式が出てくるとは分っているが、その方程式がよく分らないと、何の為にやってるんだか分らない。成功例:

(i) 特殊な曲線の特殊な族, 方程式は, Appell-Lauricella の超幾何微分方程式 FD . Picard-寺田-Deligne-Mostow による.

(ii) K3 曲面の特殊な族, 方程式は 同士の FD . 志賀弘典による.

(iii) 2次元 Abel 多様体の族, 方程式は 2つの FD (3変数) の“外積”. 佐々木武との共同研究

本稿では, (ii) とは異なる, $K3$ 曲面の特殊な族を扱う. 記号:

$l_j := \{ (t^1, t^2, t^3) \in \mathbb{P}^2 \mid v_{1j} t^1 + v_{2j} t^2 + v_{3j} t^3 = 0 \}$
 $(1 \leq j \leq 6)$: $\mathbb{P}^2$ 上の 6 本の直線

$l := \{ l_1, \dots, l_6 \}$

X : 一般の位置にある配置 l の全体 (4次元)

$S(l)$: l で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 枚の cover の 15 個の特異点を解消して得られる $K3$ 曲面.

$\eta(l) := \prod_{j=1}^6 (v_{1j} s^1 + v_{2j} s^2 + v_{3j} s^3)^{-\frac{1}{2}} ds^1 \wedge ds^2 : S(l)$
 上の 1 つの正則 2 次微分. l に正則に依存.

$\gamma'_i(l), \dots, \gamma'_6(l) \in H_2(S(l), \mathbb{Z})$: 任意の代数的 cycle と直交し, 交点行列 $I = (I_{ij})$, $I_{ij} = \gamma'_i(l) \cdot \gamma'_j(l)$ が l に依存せずかつ, $\gamma_i(l), \dots, \gamma_6(l) \in H_2(S(l), \mathbb{Z})$ があって $\gamma'_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}$ となっているもの. l に連続に依存. I は対称で符号が $(2+, 4-)$ である.

$\omega_j(l) := \int_{\gamma_j(l)} \eta(l) : \text{周期} \quad j = 1, 2, \dots, 6.$

$Q := \{ (z^1, \dots, z^6) \in \mathbb{CP}^5 \mid \sum_{i,j} I_{ij} z^i \bar{z}^j = 0 \} : \text{2次超曲面.}$

さて 周期 $\omega_j(l)$ は Riemann の関係式と不等式をみたす:

$$\sum_{i,j} I_{ij} \omega_i(l) \bar{\omega}_j(l) = 0,$$

$$\sum_{i,j} I_{ij} \omega_i(l) \overline{\omega_j(l)} > 0.$$

写像 φ を

$$l \mapsto \omega_1(l) : \cdots : \omega_6(l) \in \mathbb{P}^5$$

と定義すると φ による X の像は $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}^5$ 内の領域であることが分る. いわゆる 4次元の IV 型領域である.

Monodromy 群は

$$\{X \in GL(6, \mathbb{Z}) \mid {}^t X I X = I, X \equiv \mathbb{1}_6 \pmod{2}\}$$

である.

さて, 6本の一般の位置にある直線のうち, 4本は勝手な所にもってこれるから, l を決める (v_{ij}) を以下のように取る.

$$(v_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}.$$

すると, $\omega_1, \dots, \omega_6$ は x の関数として, 次の偏微分方程式系の線型独立解である.

$$(E): \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = g_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^4} + \sum_k^3 a_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} + a_{ij}^0 u$$

$$1 \leq i, j \leq 6.$$

ここに,

$$g_{ii} = \frac{x^2 x^3 - x^4}{x^1 (1 - x^1)} - \frac{x^3 (x^4 - x^2)}{x^1 (x^1 - x^3)} - \frac{x^2 (x^4 - x^3)}{x^1 (x^1 - x^2)}$$

等 (他の係数は略す) となる.

$Q \subset \mathbb{P}^5$ は 2 次超曲面故, Q 上に flat conformal structure が canonical に存在している. それの g による X へのひきもどしが

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

に conformal である. とくに, g は flat である. 実質, (E) の他の係数 α_{**}^* は g から決まることか一般的に分っている.

微分方程式 (E) は新しいものでなく, 青本 - Gel'fand の超幾何方程式 $E(k, n; \alpha_1, \dots, \alpha_6)$ の特別な場合 $E(3, 6; 1/2, \dots, 1/2)$ に一致している.

以上述べたことの, もう少しくわしいことは, 松本 - 佐々木 - 吉田: The period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gel'fand hyp. geom. fn. of type (3, 6). Proc. J. Acad. (1988).

にあり, くわしいことは

松本 - 佐々木 - 吉田: On the Aomoto-Gel'fand HGE of type (3, 6) に書く予定である.