

## 25. 揺動スペクトルおよび一般化時間（空間） 相関関数によるカオスの特徴づけ

鹿大・理 藤坂 博一, 井上 政義

I. 我々は最近, 文献1)において一変数定常揺ぎの大局的ふるまいをとらえる新しい方法を開発した。定常一変数時系列を

$$\{u_n\} = u_0, u_1, u_2, \dots \quad (1)$$

とすると, 我々の扱いでは局所的時間平均

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} u_j \quad (2)$$

を考える。 $\alpha_n$  は平均する時間の広がり  $n$  を大きくしていくと, アンサンブル平均  $\alpha_\infty = \langle u_j \rangle$  に近づくが, 我々の方法では  $\alpha_n$  がどのように  $\alpha_\infty$  に近づくかを調べ, その近づき方の相違によって  $\{u_n\}$  を特徴づける。

$\alpha_n$  が  $\alpha'$  と  $\alpha' + d\alpha'$  の間にある確率密度を  $\rho_n(\alpha')$  とおき,

$$\rho_n(\alpha') \sim e^{-n\sigma(\alpha')} \quad (3)$$

を仮定すると, 揺動スペクトル  $\sigma(\alpha')$  は  $\rho_\infty(\alpha') = \delta(\alpha' - \alpha_\infty)$  への近づき方を表わす重要な量である。 $\sigma(\alpha)$  は  $q$  次モーメント

$$M_n(q) = \langle \exp(qn\alpha_n) \rangle \quad (4)$$

を用いて定義される特性関数

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln M_n(q) \quad (5)$$

の Legendre 変換

$$\alpha = \frac{d}{dq}(q\lambda_q), \quad \sigma(\alpha) = q^2 \frac{d\lambda_q}{dq} \quad (6)$$

で与えられ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda_q$  および  $\sigma(\alpha)$  は熱力学形式を構成し, それぞれ逆温度, 内部エネルギー, Helmholtz の自由エネルギーおよびエントロピーに対応する量であることが明確になってい

る<sup>1)</sup>

揺動スペクトル  $\sigma(\alpha)$  はパワースペクトルを用いた時系列解析では得ることのできない全く新しい時系列の大局的ふるまいをとらえ得る有効な量である。時系列は一般に  $\sigma(\alpha)$  だけではとらえられない。(4), (5) よりモーメントは一般に

$$M_n(q) = Q_n^{(q)} e^{q\lambda_q n} \quad (7)$$

とおける。ただし,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Q_n^{(q)} = 0, \quad (8)$$

つまり、指数関数的に抜き出される因子より  $\lambda_q$  即ち  $\sigma(\alpha)$  の情報が得られるが、これで記述できない部分は  $Q_n^{(q)}$  に入っており、 $Q_n^{(q)}$  は  $\sigma(\alpha)$  と異なる情報を与える。文献 2) で示したように、 $\{u_n\}$  が一次元カオス写像で生成される時系列のときは、 $Q_n^{(q)}$  や  $\lambda_q$ 、即ち、 $M_n(q)$  は拡張された Frobenius-Perron 演算子  $H_q$  の固有値問題を解くことにより得られる。特に  $\lambda_q$  は最大固有値によって決定される。一般に、 $\{u_n\}$  が任意の時系列のとき、 $M_n(q)$  は連分数展開の方法 (文献 3)) を用いて実験データから得ることができる。

一般に、 $Q_n^{(q)}$  は

$$Q_n^{(q)} = Q_\infty^{(q)} + \sum_l J_q^{(l)} \exp [-(i\omega_q^{(l)} + r_q^{(l)})n] \quad (9)$$

と展開できる。 $\omega_q^{(l)}$  および  $r_q^{(l)}$  は  $H_q$  の固有値或いは連分数展開の極によって決定され、時系列の特性振動の、それぞれ、振動数および減衰率と解釈できる。重要なことは、通常のパワースペクトル解析で得られる特性振動数等は一つの組  $\{\omega_0^{(l)}, r_0^{(l)}\}$  であるのに対し、我々の理論では一般に連続無限個の特性量の組  $\{\omega_q^{(l)}, r_q^{(l)}: -\infty < q < \infty\}$  がある。この事実は次のように解釈できる。一般に  $\{u_n\}$  は無限個の運動形態が存在し、それぞれは一つのパラメータ  $q$  を用いて抜き出すことができる。つまり、パラメータ  $q$  によって抜き出される振動数は  $\omega_q^{(l)}$ 、減衰率は  $r_q^{(l)}$  ということになる。特に  $q = 0$  は通常のパワースペクトルによって記述される運動になっており、一般にパワースペクトルによって記述され得ない運動が連続無限個存在することになる。詳細については、文献 2), 3) を参照して貰いたい。

このように、 $\lambda_q$  は Helmholtz 自由エネルギーと対応していることからわかるように、 $\{u_n\}$  の静的側面に対する情報を与え、 $Q_n^{(q)}$  は  $\{u_n\}$  の時間相関を記述しており、この意味で  $\{u_n\}$  の動的ふるまいに対する情報を与える。このようにして、モーメント  $M_n(q)$  を考えることにより、 $\{u_n\}$  の二つの側面を組織的に、明確に抜き出すことができる。

Ⅱ. 一方, 多くの物理系は空間自由度を持つ場の量として定義されることがある。例えば図1のように二つの値(黒点と無印)が分布しているとき, この分布の状態をどう特徴づけるかという問題がある。

$d$ 次元の大きな系を考え, 点 $\underline{r}$ に一変数揺らぎ $u(\underline{r})$ が分布しているとき, この揺らぎをどうとらえるか。 $u(\underline{r})$ の統計的性質は空間的に均質であるとする。よく知られた解析法として二点相関関数を求める方法がある。[1]でみたように, 時系列の大局的ふるまいは二時間相関関数では測れず, 又, 相関にしても, 二時間相関関数では絶対にみえない無限に多

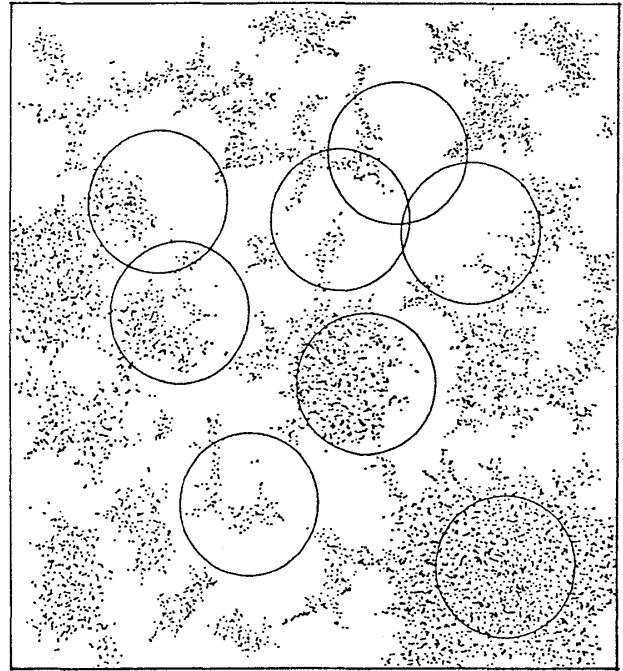


図1

くの側面があることを考えると, 空間的揺動の特徴づけにしても二点相関関数では記述できない多くの側面が存在することが予想される。ここでは, 最近文献4)で開発した, 空間揺動の多彩な側面を統一的に記述する新しい方法について報告する。

位置 $\underline{r}_0$ を中心とする半径 $r$ の $d$ 次元球内( $R_r$ )で平均した $u(\underline{r})$ の平均値を $\alpha_r(\underline{r}_0)$ とする。即ち,

$$\alpha_r(\underline{r}_0) = \frac{1}{V_r} \int_{|\underline{r}'| < r} u(\underline{r}' + \underline{r}_0) d\underline{r}'. \quad (10)$$

$V_r (= \pi^{\frac{d}{2}} r^d / \Gamma(1 + \frac{d}{2}))$ は $R_r$ の体積である。 $R_r$ の半径を次第に大きくしていくと,  $\alpha_r(\underline{r}_0)$ は $\underline{r}_0$ に依らない一定値(アンサンブル平均)に近づく。即ち,

$$\alpha_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_r} \int_{|\underline{r}'| < r} u(\underline{r}' + \underline{r}_0) d\underline{r}' \quad (11)$$

はもはや $\underline{r}_0$ に依らない。このように平均する領域を次第に大きくしていったとき, どのように平均値 $\alpha_\infty$ に近づくか, 別の言い方をすると,  $\alpha_r$ の平均値 $\alpha_\infty$ からのずれがどのように減少していくかをみることによって $u(\underline{r})$ の統計的性質を特徴づけることを目的とする。

$V_r \alpha_r(\underline{r}_0)$ が相加量であることを考慮し,  $q$ 次のモーメント

$$M(q; r) = \langle \exp(q V_r \alpha_r) \rangle \quad (12)$$

を定義する。 $\alpha_r(\underline{r}_0)$ が $\alpha'$ と $\alpha' + d\alpha'$ の間にある確率密度を

$$\rho(\alpha'; r) \sim \exp[-\sigma(\alpha')V_r] \quad (13)$$

と仮定すると, (12) に (13) を用いると,

$$M(q; r) = \exp[q\{\lambda_q - q\phi_q(r)\}V_r] \quad (14)$$

と書ける。ただし,

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_r} \ln M(q; r) \quad (15)$$

は I. のそれと同様に熱力学形式の Helmholtz の自由エネルギーの役割を果し, (13) に現れる揺動スペクトル  $\sigma(\alpha)$  は  $\lambda_q$  の Legendre 変換で得られる。 $\phi_q(r)$  は (14) で定義され,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_q(r) = 0 \quad (16)$$

を満す。もし,  $u(r)$  が空間的に独立な揺ぎならば, どのような  $q, r$  に対しても  $\phi_q(r) = 0$  となるが, 一般に,  $\phi_q(r)$  は 0 ではなく,  $\phi_q(r)$  は  $u(r)$  の直接的な空間相関を見積る量であることがわかる。 $\phi_q(r)$  は 一般化相関関数, 或いは  $q$  次の相関関数 と呼ばれるべきものである。 $\lambda_q$  或いは  $\sigma(\alpha)$  は二点相関関数では全くとらえることのできない揺ぎの性質をとらえることは I. と同様であり, 又, 多様な空間相関は  $\phi_q(r)$  によって記述される。特に,  $\phi_0(r)$  は二点相関関数と直接結びついている。

Ⅲ. I. および II. でみたように, 定常一変数時系列或いは均質空間揺動は 揺動スペクトル および 一般化時間 (空間) 相関関数 で明確にとらえ得ることがわかった。本理論は単にカオス挙動の多面的解析に有効であるばかりでなく, 種々の実験データの解析に用いることができる。カオス研究に関していえば, 今まで主にパワースペクトルによる時系列解析がいかに貧弱な手段であるかが明らかになった。パワースペクトル自体は, 勿論有用であるが, それはあくまでもカオス揺動の一側面しかとらえ得ない。

我々の理論により, カオス揺動の多彩さ, 多様さを非常に自然にとらえ得る方法が確立した。これらを用いてカオス転移点近傍のスケーリング則を研究すべき新しい段階が来たと言えるだろう。

## 文 献

- 1) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 1334.

- 2) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. **78** (1987) 268.
- 3) H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. **78** (1987) 1203.
- 4) H. Fujisaka and M. Inoue, to appear in Prog. Theor. Phys.

(Characterization of Statistically Homogeneous Fluctuations-Fluctuation Spectrum and Spatial Correlation-).

## 26. 規格化ピアソン表示を用いた一次元非定常カオスの解析

麻布大・獣医 永井喜則, 山梨学院大・経営情報 市村 純  
アドバンス・自然研 土屋 尚, 早大・理工 相沢洋二

われわれは, “一定距離進んだらランダムに方向変換をする”二次元ランダムウォークである所のピアソンウォークを利用して, 一次元カオスを視覚化することを試みた<sup>1)</sup>。この結果, 周期状態, カオス状態を, すべての初期値を原則的に含む単位円を一次元写像により発展させて生ずる視覚像(ピアソンイメージとわれわれは名付けた)の相異として見ることもできた。

文献1)ではピアソンイメージの定性的性質を考察した。さらにわれわれはピアソンイメージの定量的研究を行い, 従来のカオス研究で調べられている物理量とピアソンイメージの関係を考察し, 次の関係式が成り立つことを見出した<sup>2)</sup>。

もともとのピアソンイメージ  $Z_n(\alpha, x_0)$  を規格化したイメージ  $Z_n(\alpha, x_0)/n$  は,

$$\frac{Z_n(\alpha, x_0)}{n} = \int_0^1 e^{i\alpha x} \rho_n(x, x_0) dx \quad (I)$$

という形で測度  $\rho_n(x, x_0)$  と結びつく。言い換えると規格化ピアソンイメージは測度  $\rho_n(x, x_0)$  の特性関数を視覚化したものになっている。ここで  $Z_n(\alpha, x_0)$  の  $n$  はウォークのステップ数,  $\alpha$  は方向変換するときの最大転回角, そして  $x_0$  はウォーカーが出発する一次元写像の初期点を表わしている。また  $\rho_n(x, x_0)$  は, 一次元写像を  $f$  として,

$$\rho_n(x, x_0) \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(x - f^k(x_0)) \quad (II)$$

で定義されている。

(I)式から判ることは, 一次元写像  $f$  がエルゴード的不変測度  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x, x_0) = \rho(x)$  をもつ