

Extremal 楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 群と index19 の Zariski pair

高知大 理 徳永浩雄¹

Introduction

この稿の目的は 2 つの例を通して, Zariski pair という topological な対象と楕円曲面の Mordell-Weil 群という arithmetic な対象の間に関連があることを報告することである.

Zariski pair の定義は E. Artal-Bartolo により [A] で与えられている. ここではその定義を与える前にまず, この名前の由来ともいえる Zariski の例から始めたい.

Example 0.1. (Zariski [Z]) B_1, B_2 は既約な平面 6 次曲線で次の条件を満たすものとする.

- (i) B_1, B_2 の特異点は共に 6 個の cusp のみ.
- (ii) (a) B_1 : 6 個の cusp を通る 2 次曲線 C が存在する. (b) B_2 : 上記のような 2 次曲線は存在しない.

このとき,

$$\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B_1) \not\cong \pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus B_2)$$

この例により, Zariski pair とはどのようなものか大体察しはつくであろう. Zariski pair の正確な定義は以下の通りである.

Definition 0.2. (Artal-Bartolo[A]) 被約な平面代数曲線の pair (B_1, B_2) が次の条件を満たすとき, この pair を Zariski pair と呼ぶ.

- (i) $\deg B_1 = \deg B_2$,
- (ii) B_1 と B_2 の combinatoric data は等しい. ここで combinatoric data とは (a) 既約成分の数, (b) 各既約成分の次数及び特異点のタイプ達, (c) 各既約成分の位置関係 (既約成分がどのように交わっているか), をいう.
- (iii) $\mathbf{P}^2 \setminus B_1$ は $\mathbf{P}^2 \setminus B_2$ と同相でない.

上記の定義で B_1, B_2 が既約な場合は, (ii) は次の条件に置き換えられる.

- (ii)' B_1, B_2 は特異点のタイプに関して同じ data をもつ.

¹この報告の結果は E. Artal-Bartolo 氏との共同研究である.

Zariski による Example 0.1 は Zariski pair の最初の例である. この例以降このような例は殆ど知られておらず 6 次曲線については Zariski pair の第 2 の例は次のものである.

Example 0.3. (E. Artal-Bartolo [A], Degtyarev [D], 徳永 [T1]) B_1, B_2 は既約な平面 6 次曲線で, つぎの条件をみたすものとする.

- (i) B_1, B_2 の共に e_6 型特異点 ($e_6: y^3 + x^4 = 0$).
- (ii) $B_1: B_1$ と各特異点で 4 重に交わる 2 次曲線が存在する.

B_2 : 上記のような 2 次曲線は存在しない.

このとき, $\mathbf{P}^2 \setminus B_1$ と $\mathbf{P}^2 \setminus B_2$ は同相でない.

この例の発見以降, 6 次曲線の Zariski pair は 10 種類以上発見された ([A], [T2], [T3]). また, より次数の高い例については岡, 島田による例 ([O], [Sh]) がある. この稿ではこれらの文献では得ることの出来なかった例を紹介する. そのためまず 6 次曲線の index を定義する.

Definition 0.4. B は 6 次曲線で高々 simple singularity (a_n, d_n, e_n 型) しか持たないとする. このとき, B の index $i(B)$ を

$$i(B) := \text{特異点のタイプにある添字の和.}$$

と定義する.

例えば, Example 0.1 の 6 次曲線の index は 12, Example 0.3 では index は 18 である. また, 6 次曲線の index $i(B)$ については次の事実が成立する.

$$0 \leq i(B) \leq 19.$$

[A], [T1], [T2], [T3] では Example 0.1 や Example 0.3 以外の Zariski pair が与えられているが, それらの index は全て 18 以下である. 従って index 19 の Zariski pair は存在するか? という問題が考えられる. 本稿の第 1 の主題はこの問が Yes であることを主張するものである.

Example 0.5. (B_1, B_2) は平面 6 次曲線の pair で次の性質を満たすものとする.

- (i) $B_i = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$), $C_j^{(i)}$ は nodal cubic.

(ii) $C_1^{(i)}$ と $C_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は 1 点 x_i で 9 重に交わる. ここで, x_1 は $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ の変曲点, x_2 は $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ の変曲点でない点とする (図 1).

Example 0.6. (B_1, B_2) は平面 6 次曲線の pair で次の条件を満たすものとする.

(i) $B_i = C_1^{(i)} + C_2^{(i)} + C_3^{(i)}$, ($i = 1, 2$), $\deg C_j^{(i)} = j$, $C_2^{(i)}$ は既約, $C_3^{(i)}$ は nodal cubic.

(ii) (a) $C_1^{(i)}$ と $C_2^{(i)}$ は 2 点で交わる.

(b) $C_2^{(i)}$ と $C_3^{(i)}$ は 1 点 $p_{23}^{(i)}$ で 6 重に交わる.

(c) $C_1^{(i)}$ は $C_3^{(i)}$ の変曲点 $p_{13}^{(i)}$ での接線.

(d) $p_{23}^{(1)}$ における接線 l_1 は $p_{13}^{(1)}$ を通るが, $p_{23}^{(2)}$ における接線 l_2 は $p_{13}^{(2)}$ を通らない (図 1).

Theorem 0.7. Examples 0.5, 0.6 の条件を満たす 6 次曲線は存在し, 各 pair は Zariski pair である.

上記の定理のひとつのポイントは 6 次曲線の存在であり, それが一旦わかればあとの主張は次の定理から従う.

Theorem 0.8. (B_1, B_2) は Example 0.5, 0.6 の pair とする. このとき $\mathbf{P}^2$ の Galois covering で B_1 に沿って分岐し, かつ Galois 群が 3 次対称群 S_3 であるものは存在するが, B_2 に関してはそのような Galois covering は存在しない.

さて, ここでこの稿のもうひとつの主題である extremal 楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 群へ話題を移そう.

$\mathcal{E}$ は曲線 C 上の楕円曲面とする. 以下では elliptic fibration $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow C$ は常に次の仮定を満たすものとする.

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \varphi : \mathcal{E} \rightarrow C \text{ は section } s_0 \text{ を持つ.} \\ \text{(ii)} & \varphi \text{ は少なくともひとつの singular fiber を持つ.} \end{array} \right.$$

また, $NS(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ の Néron-Severi 群, T はその部分群で s_0 と φ のファイバーの既約成分で生成されたものとする. また, $MW(\mathcal{E})$ は $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow C$ の Mordell-Weil 群, すなわち, φ の section のなす群とする. このとき, 次が成立する.

Theorem 0.9. (塩田 [S])

$$MW(\mathcal{E}) \cong NS(\mathcal{E})/T$$

次に “extremal” という言葉の定義を与える。

Definition 0.10. 楕円曲面 $\mathcal{E} \rightarrow C$ が次の 2 条件を満たすとき extremal という。

- (i) $\rho(\mathcal{E}) = \text{rank} NS(\mathcal{E}) = h^{1,1}(\mathcal{E})$,
- (ii) $\text{rank} MW = 0$.

従って, extremal 楕円曲面の Mordell-Weil 群は有限であり, それがどのような群であるかについては部分群 T とその $NS(\mathcal{E})$ への埋め込みによる (この入り方も部分群 T によりかなり制限される)。

T は特異ファイバーの configuration が決まれば決まるので次のような問題が考えられる。

Question 0.11. $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow C$ は extremal 楕円曲面とする。 $MW(\mathcal{E})$ は特異ファイバーの configuration で決定されるか?

この Question については $\mathcal{E}$ が extremal な有理楕円曲面である場合は Yes であることが知られている ([MP1], [N], [B]) 従って次に問題となるのは $\mathcal{E}$ が extremal な楕円 K3 曲面であるときである。

Miranda, Persson は論文 [MP2] で semi-stable (特異ファイバーはすべて I_n 型) な楕円 K3 曲面の特異ファイバーの configuration を分類し, 続く論文 [MP3] で semi-stable extremal 楕円 K3 曲面の Mordell-Weil 群が特異ファイバーの configuration からどの程度決まるかを調べている。 $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ が semi-stable 楕円 K3 曲面であるとき, φ は I_n 型の特異ファイバーを 6 個持つことが容易にわかる。それらを $I_{n_1}, \dots, I_{n_6}$ (略して, $[n_1, \dots, n_6]$), ただし $\sum_{i=1}^6 n_i = 24$, とおく。 [MP2] の結果によれば semi-stable extremal 楕円 K3 曲面の特異ファイバーの configuration は 112 通りあることがわかっている。さらに, [MP3] では, そのうち 95 通りは 6-tuple $[n_1, \dots, n_6]$ がわかれば, Mordell-Weil 群は決定されることを示している。しかしながら [MP3] では残る場合については, Question 0.11 は未解決であり, また, 反例も与えられていない。ここでは, 6-tuple は同じだが Mordell-Weil 群は異なる例 (すなわち Question 0.11 の反例) を 2 つ挙げる。

Theorem 0.12. (a) 楕円 K3 曲面 $\varphi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1 (i = 1, 2)$ で次の条件を満たすものが存在する.

(i) $\varphi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ の特異ファイバーの configuration は $[18, 2, 1, 1, 1, 1]$ である.

(ii) $MW(\mathcal{E}_1) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}; MW(\mathcal{E}_2) \cong \{0\}$.

(b) 楕円 K3 曲面 $\varphi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1 (i = 1, 2)$ で次の条件を満たすものが存在する.

(i) $\varphi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ の特異ファイバーの configuration は $[12, 6, 2, 2, 1, 1]$ である.

(ii) $MW(\mathcal{E}_1) \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}; MW(\mathcal{E}_2) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

以下この報告の内容は次の通りである.

§1 Example 0.5 及び Example 0.6 の 6 次曲線の構成

§2 Theorem 0.12 の証明

§3 Theorem 0.8 の証明の方針

§4 補足 (曲線の Alexander polynomial)

§1 Example 0.5 及び Example 0.6 の 6 次曲線の構成

[AT] では, 問題の 6 次曲線の explicit な定義方程式を与えているが, ここでは或る種の有理楕円曲面を用いてその存在を証明する.

(I) Example 0.5 の 6 次曲線の構成

X_1, X_2 は有理楕円曲面で次の条件を満たすものとする.

(i) X_1 の特異ファイバーの configuration は II^*, I_1, I_1 .

(ii) X_2 の特異ファイバーの configuration は I_9, I_1, I_1, I_1 . (X_1, X_2 の存在に関しては例えば [MP1] を参照).

X_1, X_2 の特異ファイバーの既約成分に図 2 の様にラベルを付け $s_0, E_1, \dots, E_8$ の巡に blow-down していく. すると得られる曲面は射影平面 $\mathbf{P}^2$ であり, E_9, E_{10} の像はそれぞれ nodal cubic である. そこで, 各場合にこの 2 つの cubic の和集合をとればそれが得るものであることがわかる.

(II) Example 0.6 の 6 次曲線の構成.

X_1, X_2 は有理楕円曲面で次の条件を満たすものとする.

(i) X_1 の特異ファイバーの configuration は III^*, I_2, I_1 .

(ii) X_2 の特異ファイバ-の configuration は I_6, I_3, I_2, I_1 . (X_1, X_2 の存在に関しては例えば [MP1] を参照).

X_1, X_2 の特異ファイバ-の既約成分および X_1 の 2-torsion 及び X_2 の 6-torsion に図 3 の様にラベルを付け $s_0, E_1, \dots, E_8$ の巡に blow-down していく. すると得られる曲面は射影平面 $\mathbf{P}^2$ であり, E_9, E_{10}, E_{11} の像はそれぞれ直線, 2 次曲線, nodal cubic である. そこで, 各場合にこの 3 つの和集合をとればそれが得るものであることがわかる.

§2. Theorem 0.12 の証明

まず, 証明に必要ないくつかの補題, 命題を準備する.

Proposition 2.1. (Miranda-Persson [MP1]) $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow C$ は楕円曲面, J はその functional invariant とする. $J \neq \text{constant}$ ならばつぎの不等式が成立する.

$$\deg J \leq 6 \sum_{n \geq 1} (i_n + i_n^*) + 4(ii + iv^*) + 2(iv + ii^*) + 12g(C) - 12$$

ここで i_n は I_n 型特異ファイバーの数を表す. 他も同様. また, $g(C)$ は C の種数.

Proposition 2.2. $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow C$ は extremal な楕円曲面とする. $NS(\mathcal{E})$, T の交点行列の行列式を $\text{disc}(NS(\mathcal{E})), \text{disc}(T)$ で表すとき,

$$|\text{disc}(NS(\mathcal{E}))| \#(MW(\mathcal{E}))^2 = |\text{disc} T|.$$

この主張は Theorem 0.9 から直ちに従う.

Theorem 0.12 (a) の証明に入ろう. W_1, W_2 はそれぞれ, Example 0.5 の 6 次曲線 B_1, B_2 に沿って分岐 double covering とし, $\mu_i : \mathcal{E}_i \rightarrow W_i$ はそれぞれの canonical resolution(定義については [H] を参照) とする. このとき, $\mathcal{E}_i$ は次の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccc} W_i & \leftarrow & \mathcal{E}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^2 & \leftarrow & \Sigma^{(i)} \end{array}$$

ここで $\Sigma^{(i)}$ は $\mathbf{P}^2$ から blow-up を繰り返して得られるものであるが今の場合, 特に次の性質を満たす.

(*) (i) $\Sigma^{(i)}$ は §1, (I) の有理楕円曲面 X_i の 2 つの I_1 型特異ファイバーの node で blow-up して得られる.

(ii) double covering $\mathcal{E}_i \rightarrow \Sigma^{(i)}$ の branch locus は (i) の 2 つの特異ファイバーの proper transform である.

B_i の node をひとつ選び, その点を通る直線のなす pencil が引き起こす $\mathcal{E}_i$ 上の elliptic fibration を $\varphi_i : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ と表す (注意: この elliptic fibration は X_i の elliptic fibration から引き起こされたものとは異なる). このとき,

Lemma 2.3. $i = 1, 2$ 共に $\varphi_i : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ の特異ファイバーの configuration は $[18, 2, 1, 1, 1, 1]$.

証明 canonical resolution の構成及び Proposition 2.1 から主張は容易に check できる.

さて, [MP3] によれば, $\varphi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ について $MW(\mathcal{E}_i)$ は $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ または $\{0\}$ であることに注意する.

Lemma 2.4. $\varphi_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ について $MW(\mathcal{E}) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

証明 x_i の接線は $\varphi_1 : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ の 2 つの section s^+, s^- を決める. [S], Lemma 8.1, Theorem 8.4 または [M] より, この s^+ が $MW(\mathcal{E}_1)$ の 3-torsion を定めることがわかる.

次に $\varphi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{P}^1$ に関して $MW(\mathcal{E}_2) \cong \{0\}$ であることを示す. この方法は城崎の講演時に解説した方法と異なるが, 見通しはよい.

Lemma 2.5. $MW(\mathcal{E}_2) \cong \{0\}$.

$\mathcal{E}_2$ は X_2 の elliptic fibration から引き起こされた elliptic fibration ψ を持つ. この fibration の特異ファイバーの configuration はこの節の注意 (*) より $[9, 9, 2, 2, 1, 1]$ である. 有理楕円曲面 X_2 の Mordell-Weil 群は $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ であるから, X_2 から引き起こされた ψ に関する Mordell-Weil 群は位数 3 の元をもつ. ところが, [MP3] より ψ の Mordell-Weil 群は $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ か $\{0\}$ である. 従って ψ の Mordell-Weil 群は $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ である. 故に Proposition 2.2 より $\text{disc}(NS(\mathcal{E})) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2}{9} = 36$. 従って再び Proposition 2.2 を φ_2 に適用して $MW(\mathcal{E}_2) = \{0\}$ を得る.

以上を合わせて Theorem 0.12 (a) を得る. Theorem 0.12 (b) は Example 0.6 の 6 次曲線 B_1, B_2 に沿って分岐する double covering に対して上記と同じ議論を繰り返せばよいので詳しくは省略する.

§3. Theorem 0.8 の証明の方針

Theorem 0.8 を証明するには次の Theorem を証明すればよい.

Theorem 3.1. (B_1, B_2) は Example 0.5 または Example 0.6 の 6 次曲線とする. このとき B_i に沿って分岐する Galois covering で, Galois 群が $\mathcal{S}_3$ であるものが存在するための必要かつ十分な条件は $MW(\mathcal{E}_i)$ が位数 3 の元をもつことである.

この Theorem の証明は 2 年前の城崎で報告した dihedral Galois covering の手法をつかえば証明できるのでその idea については 1994 年度の城崎の報告集または [T4] に譲ってここでは省略する.

§4 補足

Theorem 0.7 は 6 次曲線の Alexander polynomial を計算することによっても証明できる. Alexander polynomial は $\mathbf{P}^2 \setminus B_i$ ($i = 1, 2$) の位相的不変量である (詳しくは [L] または [D] を参照). 従って Theorem 0.7 は次の Theorem から従う.

Theorem 4.1. Example 0.5, 0.6 の 6 次曲線について, B_1 の Alexander polynomial は $t^4 + t^2 + 1$, B_2 の Alexander polynomial は 1 である.

本稿では Zariski pair と Mordell-Weil 群の関係を報告することが主な目的なのでここでは省略する. 詳しくは [AT] を参照.

References:

- [A] E. Artal Bartolo: Sur les couples de Zariski, J. Algebraic Geom. **3**, 223-247 (1994)
- [AT] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: Zariski pairs of index 19 and the Mordell-Weil groups of extremal elliptic K3 surfaces, preprint.
- [D] A. Degtyarev: Alexander polynomial of a curve of degree six, J. Knot

Theory Ramifications **3**, 439-454 (1994)

[H] E. Horikawa: On deformation of quintic surfaces, *Invent. Math.* **31**, 43 - 85 (1975).

[L] A. Libgober: Alexander polynomials of plane algebraic curves and cyclic multiple planes, *Duke Math. J.* **49**, 833-851 (1982)

[M] R. Miranda: Component Numbers for Torsion Sections of Semistable Elliptic Surfaces, *Contemporary Math.*, **162**, 293 - 311 (1994).

[MP1] R. Miranda and U. Persson: On extremal rational elliptic surfaces, *Math. Z.* **193**, 537 -558 (1986).

[MP2] R. Miranda and U. Persson: Configurations of I_n fibers on elliptic K3 surfaces *Math. Z.* **201**, 339 - 361(1989).

[MP3] R. Miranda and U. Persson: Mordell-Weil Groups of extremal elliptic K3 surfaces, *Symposia Mathematica*, XXXII, 167-192 (1991).

[O] M. Oka: Two transformations of plane curves and their fundamental groups, preprint.

[S] T. Shioda: On the Mordell-Weil lattices, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli* **39**, 211 - 240 (1990).

[Sh] I. Shimada: A note on Zariski pairs, preprint.

[T2] H. Tokunaga: A remark on Artal's paper, *Kodai Math. Journal* **19** 207-217 (1996).

[T2] H. Tokunaga: Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces, to appear in *Math. Z.*

[T3] H. Tokunaga: Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic K3 surfaces II, MPI-Preprint 96-12.

[T4] H. Tokunaga: Dihedral coverings branched along maximizing sextics, to appear in *Math. Ann.*

[Z] O. Zariski: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.* **51**, 305-328 (1929).

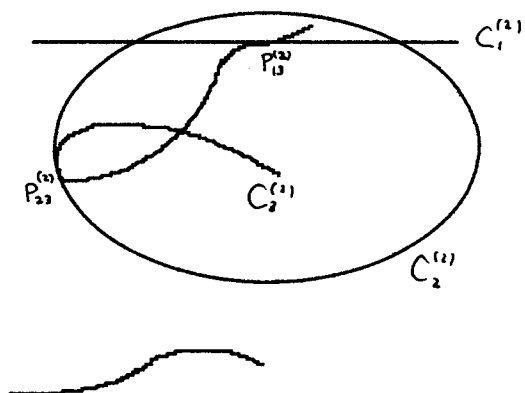
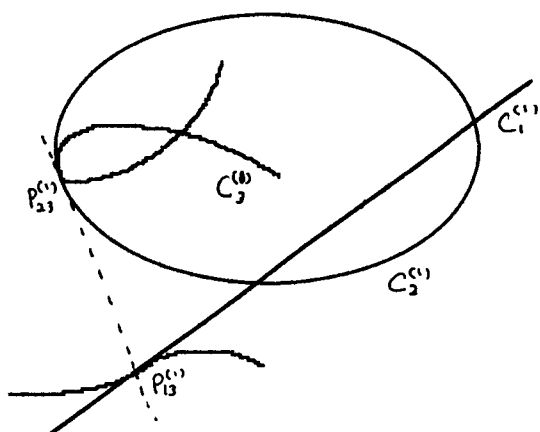
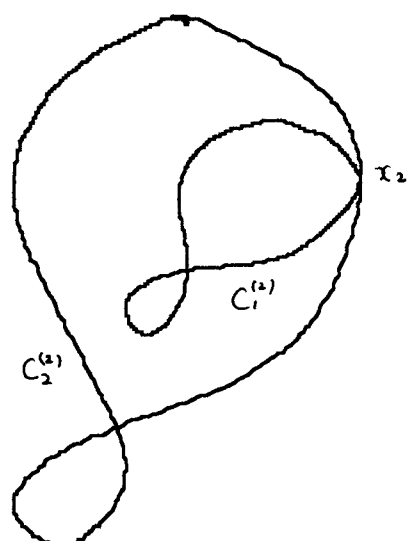
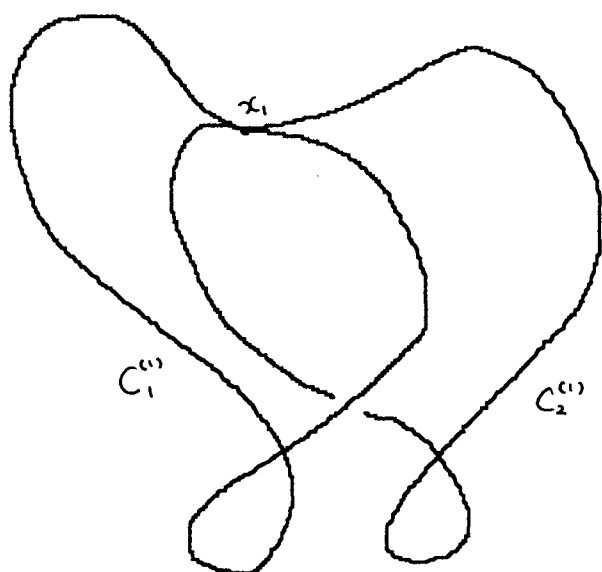


图 1

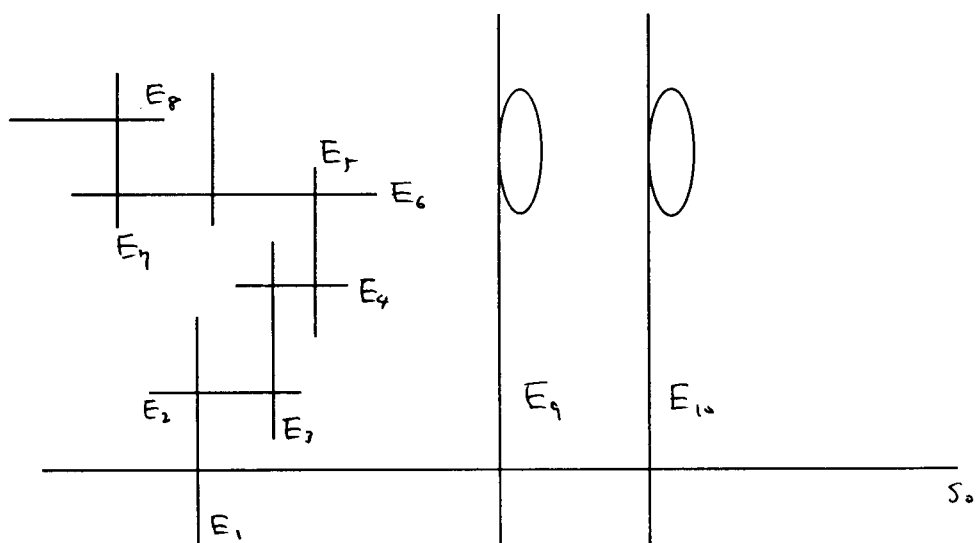
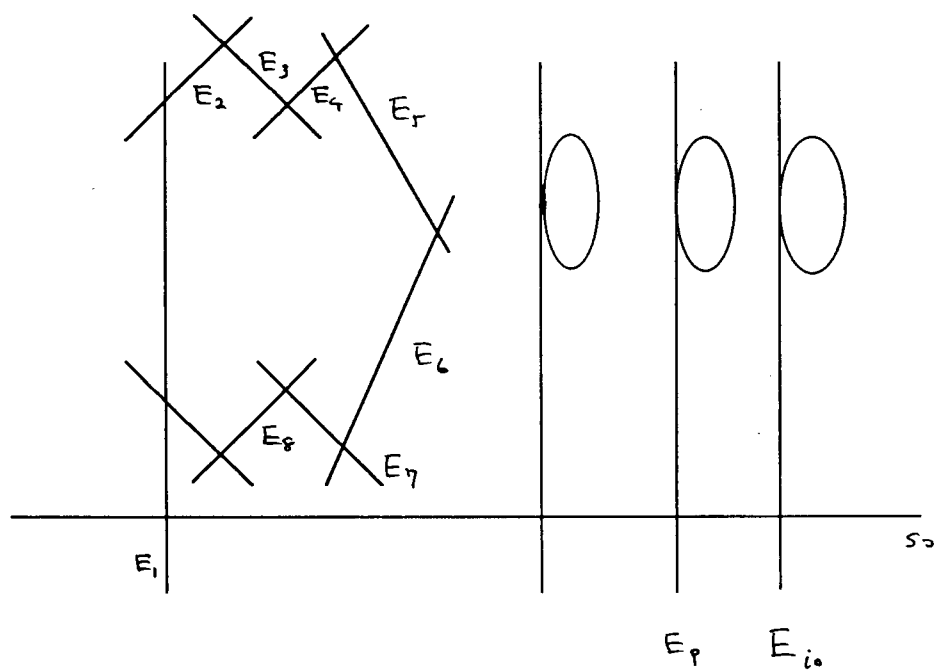
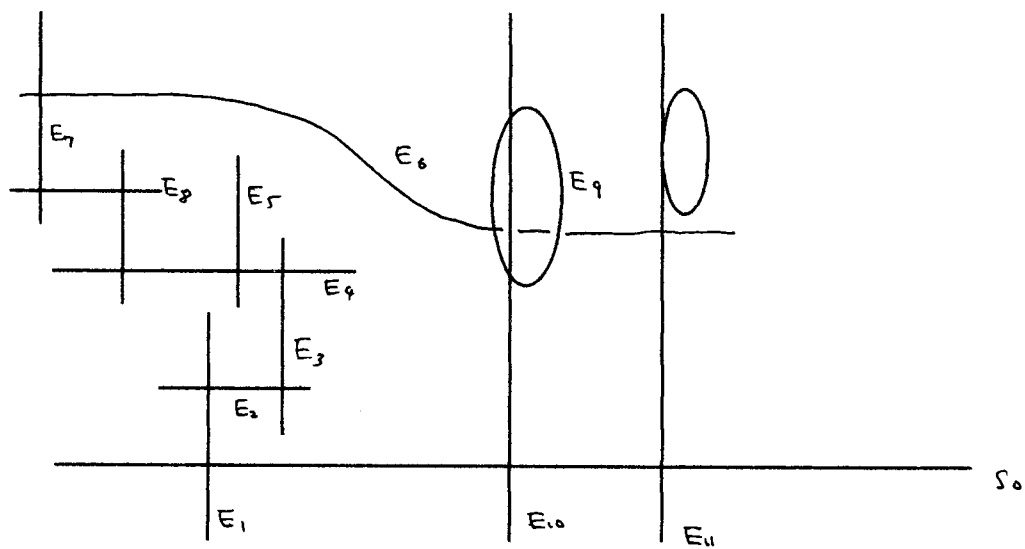
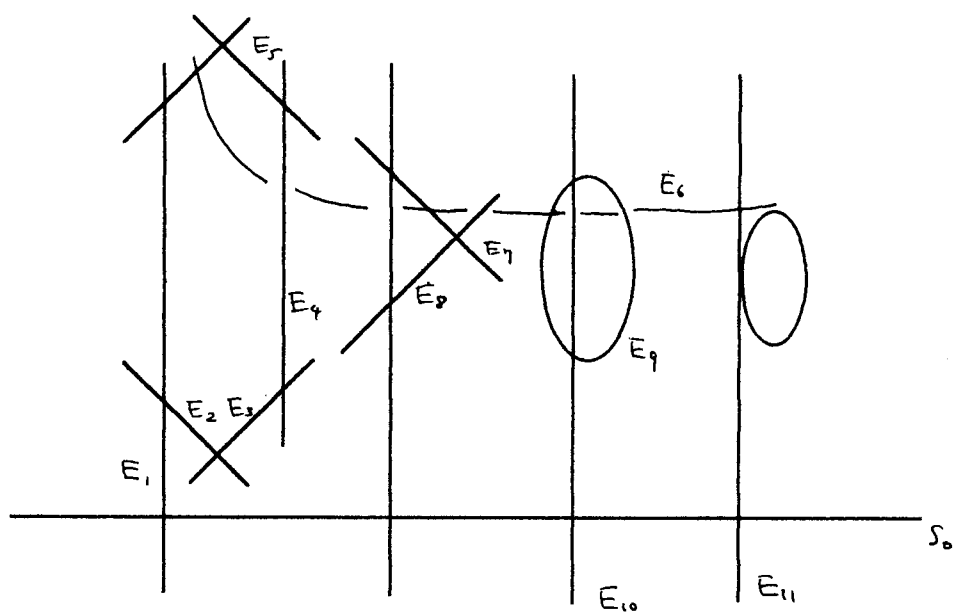


图 2



□ 3