

対称空間上の line bundle 上の調和解析

東大理 示野信一 (Nobukazu Shimeno)

序. 本稿では、半単純対称空間 G/H の line bundle 上の不変微分作用素の同時固有空間上の G の表現を考える。

G を連結半単純 Lie 群、 σ を G の自己同型で $\sigma^2 = \text{id}$ をみたすもの、 H を σ の固定部分群の開部分群とする。このとき空間 G/H は半単純対称空間と呼ばれ、 G/H 上には左 G 不変測度が存在する。以下 G は単純、 H の center は連続であると仮定する。(このとき、 G/H の noncompact Riemannian form G^d/K^d は Hermite 対称空間。) δ を H の unitary な 1 次元表現、 E_δ を δ に付随した G/H 上の line bundle とすると、 E_δ 上の不変微分作用素の algebra $\mathcal{D}_\delta$ は可換で、不変式環と同型になる (Harish Chandra isomorphism)。 E_δ の C^∞ -切断の空間を、

$$C^\infty(G/H; \delta) = \left\{ f \in C^\infty(G); \begin{aligned} f(gh) &= \delta(h^{-1})f(g) \\ g \in G, h \in H \end{aligned} \right\}$$

と同一視する。 algebra homomorphism

$$\chi: \mathcal{D}_\delta \longrightarrow \mathbb{C}$$

に対して、同時固有空間

$$\mathcal{E}_\chi = \{ f \in C^\infty(G/H; \delta) ; Df = \chi(D)f \quad \forall D \in \mathcal{D}_\delta \}$$

を考える。

問題 I. $\mathcal{E}_\chi$ の元を記述せよ。

II. G の表現空間として $\mathcal{E}_\chi$ はいつ可約か。また $\mathcal{E}_\chi$ のすべての関不変部分空間を記述せよ。

III. $C_c^\infty(G/H; \delta)$ の元を $\mathcal{E}_\chi$ の元を用いて分解せよ。

(Plancherel formula)

特に,

IV. 上の分解に点スペクトル (discrete series) が存在するか。存在する場合、それを決定せよ。

δ が H の trivial 表現のとき、すなわち G/H 上の関数の場合に次のことが知られている。

(a) Riemann 対称空間の場合。

- 任意の同時固有関数 ($\mathcal{E}_\chi$ の元) は Poisson 積分表示される。

(Helgason 予想 [6])

- $\mathcal{E}_\chi$ の可約性の条件、Plancherel measure は、Harish Chandra の C -関数を用いて表される。([5])

- discrete series は存在しない。

(b) 一般の半単純対称空間の場合

- G/H に discrete series が存在する $\Leftrightarrow \text{rank } G/H = \text{rank } K/K \cap H$
(ただし, K は σ -stable な G の極大コンパクト部分群) また discrete series はすべて決定されている。([7] [4])
- Plancherel measure の continuous part は C -関数で与えられる。 C -関数は具体的に計算されている。

G/H が条件 (*) $\text{rank } G/H = \text{rank } K/K \cap H$ をみたす場合、 G/H の vector bundle 上に無限個の discrete series が構成されている ([8]) がすべてではない。 δ が non-trivial なとき条件 (*) をみたさなくても、 $L^2(G/H; \delta)$ に discrete series が存在する場合がある。これは G^d/K^d の line bundle 上では、パラメータが closed positive chamber に入ると Poisson 変換の bijectivity がくずれることがある ([10]) ことと関係している。本稿では上の問題 I ~ IV を解くことができた rank 1 の空間、 $U(p, q)/U(1) \times U(p-1, q)$ ($p, q \geq 1$) について結果を述べる。

§1. Notation $G = U(p, q)$ 、 $H = U(1) \times U(p-1, q)$ とおく。

($SU(p, q)$ のかわりに $U(p, q)$ を考える。) $K = U(p) \times U(q)$ 、

$Y = \begin{bmatrix} & 1 \\ & 0 \\ 1 & \end{bmatrix}$, $\alpha = iRY$, $A = \exp \alpha$, $a_t = \exp tY \in A$ とおく。

このとき分解 $G = KAH$ が成り立つ。 $M = Z_K(\mathfrak{a})$, $M_0 = M \cap H$ とおく。 $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して H の 1 次元表現 χ_λ を

$$H \ni \begin{pmatrix} u & \\ & A \end{pmatrix} \mapsto u^\lambda \quad (u \in U(1), A \in U(p-1, q))$$

と定める。 $X = \{x \in \mathbb{C}^{p+q}; 1 = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_{p+q}|^2\}$

とおくと、 $X \simeq U(p, q)/U(p-1, q)$ と同一視されるが、

これは $O(2p, 2q)$ の対称空間 $O(2p, 2q)/O(2p-1, 2q)$ と同型である。

$U(1)$ の X への作用を $xu = (x_1 u, \dots, x_{p+q} u)$

($x = (x_1, \dots, x_{p+q}) \in X$, $u \in U(1)$) により定めれば、

$$C^\infty(G/H; \chi_\lambda) \simeq \{f \in C^\infty(X); f(xu) = u^{-\lambda} f(x) \\ x \in X, u \in U(1)\}$$

と同一視される。また $X (\simeq O(2p, 2q)/O(2p-1, 2q))$ 上の

Laplace-Beltrami operator を Δ とおくと、 $C^\infty(G/H; \chi_\lambda)$

上の不変微分作用素環は $\mathbb{C}[\Delta]$ に同型である。 $s \in \mathbb{C}$,

$\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$E_{s, \lambda} = \{f \in C^\infty(G/H; \chi_\lambda); \Delta f = (s^2 - \rho^2)f\}$$

とおく。ただしここで $\rho = p + q - 1$ とおいた。

$$\Sigma = U(p)/U(p-1) \times U(q)/U(q-1)$$

$$\simeq S^{2p-1} \times S^{2q-1}$$

とおく。 Δ_1, Δ_2 をそれぞれ S^{2p-1}, S^{2q-1} 上の Laplacian と

する。 M_0 の表現 $\chi_\lambda|_{M_0}$ に同伴した K/M_0 上の line bundle の

C^∞ -切断の空間 $C^\infty(K/M_0; \chi_\ell)$ は,

$$\{f \in C^\infty(\Sigma); f(\sigma u) = u^{-\ell} f(\sigma), u \in U(1), \sigma \in \Sigma\}$$

と同一視される。 $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathcal{Y}_{j,k} = \left\{ f \in C^\infty(K/M_0; \chi_\ell); \begin{aligned} \Delta_1 f &= -j(j+2p-2)f \\ \Delta_2 f &= -k(k+2q-2)f \end{aligned} \right\}$$

とおく。 $\mathcal{Y}_{j,k} \neq \{0\}$ と存在するための条件は,

$$p, q > 1 \text{ のとき, } j+k \geq |\ell|, j+k \equiv \ell \pmod{2}.$$

$$q=1 \text{ のとき, } j+k \geq |\ell|, j-k \geq -|\ell|, j+k \equiv \ell \pmod{2}.$$

$$p=1 \text{ のとき, } q=1 \text{ の場合で, } j \text{ と } k \text{ を入れかえたもの.}$$

となる。 $\mathcal{Y}_{j,k}$ は K の表現空間としては既約でないので,

$$U(1) \text{ の } S^{2p-1}, S^{2q-1} \text{ の作用がそれぞれ } \ell+m, m \text{ (} m \in \mathbb{Z} \text{)}$$

となる空間に分解すると、それぞれは既約(または $\{0\}$) となる。

パラメータ j, k, m を用いて $C^\infty(K/M_0; \chi_\ell)$ 上の K の既約表

$$\Lambda_\ell = \left\{ (j, k, m); \begin{aligned} j+k &\equiv \ell \pmod{2} \\ k &\equiv m \pmod{2} \\ j &\geq |\ell+m| \\ k &\geq |m|, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

($\begin{matrix} p=1 \\ q=1 \end{matrix}$ のとき等号 $\rightarrow$ にする)

により parametrize され、分解は multiplicity free である。

§2. 結果

分解 $G = KAH$ を用いて、各 $\mu \in \Lambda_\ell$ に対して、微分方

程式 $\Delta f = (s^2 - \rho^2) f$ ($f \in C^\infty(G/H; \chi_\ell)$) を A 上の微分

方程式として具体的に書くことができる。この微分方程式の

解空間の次元が1であることから、 $C^\infty(K/M_0; \chi_\ell)$ と $E_{s,\ell}$ の K -finite parts は K -module として同型であることがわかる。各 $\mu \in \Lambda_\ell$ に対して、左から $\chi_\ell|_M$ に従い K -type μ をもつ $E_{s,\ell}$ の元は定数倍を除いてただ1つ存在する。これらに対する $Y \in \mathfrak{o}$ の作用を具体的に調べることにより、 $E_{s,\ell}$ の不変部分空間を K -type を用いて記述できる。これは $\ell=0$ の場合に [9][12] で行われているのと同じ方法である。

$E_{s,\ell}$ は ℓ, s^2 にしかよらないから、 $\operatorname{Re} s \geq 0$ としてよい。

$s \in \rho + \ell + 2\mathbb{Z}$ のとき、

$$U_s = \{ \mu \in \Lambda_\ell \mid j - k \geq s - \rho + 2q \}$$

$s \in \rho + |\ell| + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$T_s = \{ \mu \in \Lambda_\ell \mid j + k \leq s - \rho \}$$

$$W_s = U_s \cup T_s.$$

$q > 1$, $s \in \rho + \ell + 2\mathbb{Z}$ のとき、

$$V_s = \{ \mu \in \Lambda_\ell \mid k - j \leq s + \rho - 2q \}$$

$p > q = 1$, $s \in \rho + |\ell| + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、

$$W_s^\pm = \{ \mu \in \Lambda_\ell \mid j \pm m \geq s - \rho + 2 \text{ or } j \mp m \leq s - \rho \}$$

$q > p = 1$, $s \in \rho + \ell + 2\mathbb{Z}$ のとき、

$$V_s^\pm = \{ \mu \in \Lambda_\ell \mid k \pm m \leq s - \rho \mp \ell \}.$$

とおく。

Theorem $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ とする。このとき $\mathcal{E}_{s, \ell}$ の G -不変部分空間は、 $\{0\}$, $\mathcal{E}_{s, \ell}$ と、 $U_s, W_s, T_s, V_s, W_s^\pm, V_s^\pm$ に対応する $\mathcal{E}_{s, \ell}$ の G -不変部分空間のいずれかである。

また、 $D_\ell = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} (p=1 \text{ のとき, } s \leq |\ell| - \frac{1}{2}) \\ s > 0, s - \rho + \ell \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right\}$ とおくと、
点スペクトルについて次の結果を得る。証明は [2] と同様。

Theorem $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ とする。 $\mu \in \Lambda_\ell$ に対して $\mathcal{E}_{s, \ell}$ の μ -成分が $L^2(G/H; \chi_\ell)$ に含まれるための必要十分条件は、
 $s \in D_\ell$ かつ $\mu \in U_s$ である。

Plancherel formula, Poisson 変換に関しては、[11] に記したのでここでは繰り返さない。

§3. $U(1, n)/U(1) \times U(n)$ の場合.

§2. で $\mathcal{E}_{s, \ell}$ の不変部分空間を決定したが、 $p=1$ すなわち G/H が Riemann 対称空間の場合を特に考える。各 K -type に従う固有関数の空間の次元の評価により、 $\mathcal{E}_{s, \ell}$ の K -finite part と、主系列表現の空間は、Grothendieck 群の意味で同型であることがわかる。 $SU(1, n)$ の主系列の組成列は知られているので ([1][13])、固有空間の組成列と比較してみよう。以

下 $(\mathfrak{g}, K)$ -modules の category で考える。 $E_{s, \lambda}$ の K -finite part を $(E_{s, \lambda})_K$ と書く。 $|\lambda| > n$, $s = |\lambda| - n$, $|\lambda| - n - 2, \dots > 0$ のとき、 $(E_{s, \lambda})_K$ は G の discrete series を unique submodule としてもつ。これを π_0 とおく。(これは lowest K -type が 1 次元の holomorphic discrete series.) 対応する主系列を π 、その Langlands quotient を $\bar{\pi}$ とする。 π は、 π_0 ともう 1 つ別の discrete series π_1 の直和を sub に含み、 $\pi_0 \oplus \pi_1$ による quotient が $\bar{\pi}$ である。これを下図のように書く。

$$\pi = \frac{\bar{\pi}}{\pi_0 \pi_1} \quad (E_{s, \lambda})_K = \frac{\pi_1}{\pi_0}$$

これに対し、 $(E_{s, \lambda})_K$ の方は、 π_0 による quotient が unique submodule $\bar{\pi}$ をもち、更に quotient をとると、 π_1 となる。(上図)

Poisson 変換 $\mathcal{P}_{s, \lambda}$ 、境界値写像 $\beta_{s, \lambda}$ 、Knap-Stein intertwining operator A_s との関係は下図のようにな、ている。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \pi_0 \pi_1 \\ \bar{\pi} \\ A_s \uparrow \\ \bar{\pi} \\ \pi_0 \pi_1 \\ \text{principal series} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{P}_{s, \lambda}} \\ \xleftarrow{\beta_{s, \lambda}} \\ \nearrow \mathcal{P}_{-s, \lambda} \end{array} & \begin{array}{c} \pi_1 \\ \bar{\pi} \\ \pi_0 \\ \text{eigenspace} \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Im } \mathcal{P}_{s, \lambda} = \ker \beta_{s, \lambda} = \pi_0 \\
 \text{Im } A_s = \bar{\pi} \\
 \text{Im } \mathcal{P}_{-s, \lambda} = \frac{\bar{\pi}}{\pi_0} \\
 A_s = \beta_{s, \lambda} \circ \mathcal{P}_{-s, \lambda}
 \end{array}$$

REFERENCES

1. D. H. Collingwood, *Representation of rank one Lie groups*, Pitman, 1985.
2. J. Farout, *Distributions Sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. pures et appl. **58** (1979), 369–444.
3. M. Flensted-Jensen, *Spherical function on a simply connected Lie group*. II. The Paley-Wiener theorem for the rank one case, Math. Ann. **228** (1977), 65–92.
4. ———, *Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), 253–311.
5. S. Helgason, *Group and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.
6. M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric spaces*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), 1–39.
7. T. Oshima and T. Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984), 331–390.
8. H. Schlichtkrull, *A series of irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group*, Invent. Math. **68** (1982), 497–516.
9. ———, *Eigenspaces of Laplacian on hyperbolic spaces; composition series and integral transforms*, Funct. Anal. **70** (1987), 194–219.
10. N. Shimeno, *Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. vol 37 (1990), 201–234.
11. ———, *Eigenfunctions of invariant differential operators on $U(p, q)/U(p-1, q)$* , Seminar reports of unitary representation **10** (1990), 73–75.
12. I. I. Shitikov, *Invariant subspaces of functions and the Poisson transformation for hyperboloids*, Siberian Math. J. **29** (1989), 476–482.
13. D. P. Zelobenko, *A description of the quasi-simple irreducible representations of the groups $U(n, 1)$ and $Spin(n, 1)$* , Math. USSR Izvestija **11** (1977), 31–50.