

Hopf algebra の構造について

東京教育大・理 遠藤 静男

序. 最近 M.E. Sweedler, R.G. Larson 等により, Hopf algebra の構造, 性質について深い考察がなされ, 多くの興味ある結果が得られた. この小論の主たる目的は, その中の一つである Larson-Sweedler [3] で得られた有限次元 Hopf algebra の Frobenius 性, 対称性に関する結果の紹介とその一般化および精密化である. 特に [3] における対称性, 分離性の特徴づけが不完全であることを指摘し, 完全な結果を示す。

体の上の cocommutative Hopf algebra の構造は, Kostant の定理 ([8]), Sweedler の定理 ([7]) により, ある意味で完全に決定されている。しかし一般の可換環上ではこれらに対応するものは知られていない。Dedekind domain 上の cocommutative Hopf algebra の構造を決定する試みとして, [4] の結果を補うことにより, 有限群の group algebra が自明でない Hopf order をもたないための条件を完全に決定する。

§ 1. 準備

この小節を通じて, R を単位元をもつ可換環とする。

R -module A に対し, R -homomorphisms $M_A : A \otimes_R A \rightarrow A$,

$\delta_A : R \rightarrow A$ を, 図形

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R A \otimes_R A & \xrightarrow{M_A \otimes I} & A \otimes_R A \\ \downarrow I \otimes M_A & & \downarrow M_A \\ A \otimes_R A & \xrightarrow{M_A} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R \otimes_R A & \xrightarrow{\delta_A \otimes I} & A \otimes_R A \xleftarrow{I \otimes \delta_A} A \otimes_R R \\ & \searrow & \downarrow M_A \nearrow \\ & & A \end{array}$$

が可換になるものがあるとき, $(A, M_A, \delta_A) \in R$ -algebra と

いい, M_A は A の multiplication, δ_A は A の unit といいよ。以

下において, $M_A(a \otimes a') = aa'$, $a, a' \in A$ を表わすことにする。

これは通常の単位元をもつ associative R -algebra の定義に外

ならない。この κ の dual として, R -coalgebra の定義を

与えよう。

R -module C に対し, R -homomorphisms $\Delta_C : C \rightarrow C \otimes_R C$,

$\eta_C : C \rightarrow R$ を, 図形

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & C \otimes_R C \\ \downarrow \Delta_C & & \downarrow I \otimes \Delta_C \\ C \otimes_R C & \xrightarrow{\Delta_C \otimes I} & C \otimes_R C \otimes_R C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ \swarrow & \downarrow \Delta_C & \searrow \\ R \otimes_R C & \xleftarrow{\eta_C \otimes I} C \otimes_R C \xrightarrow{I \otimes \eta_C} & C \otimes_R R \end{array}$$

が可換になるものがあるとき, $(C, \Delta_C, \eta_C) \in R$ -coalgebra

といい, Δ_C は C の comultiplication, η_C は C の counit とい

よ。 C の元 c に対して $\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ といいよ。こ

R -module B is (M_B, δ_B) is a R -algebra if and only if, $\delta \in$

(Δ_B, η_B) により R -coalgebra $\epsilon \neq 1, 2 \neq 1, 1 \neq M_B,$

$$\delta_B: B \rightarrow B \otimes B \text{ is } R\text{-coalgebra homomorphism } \delta_B(1) = 1 \otimes 1, \delta_B(a) = a \otimes 1.$$

$(B, M_B, s_B, \Delta_B, \eta_B)$ is a R-bialgebra $\mathcal{Z}''$ & $\mathcal{Z} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{S}$. R-

bialgebra B or algebra k is commutative のとき, 単に

commutative $k \parallel \parallel$, $b \in B : \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \Delta_R(b) =$

$$\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum b_{(2)} \otimes b_{(1)} \quad K \text{ は } \Delta \text{ 上の } K \text{ 上の cocommutative 2" あり}$$

R -bialgebra B a R -endomorphism ring $\text{Hom}_R(B, B) :=$

$$f * g = \mu_B(f \otimes g) \delta_B, \quad f, g \in \text{Hom}_R(B, B)$$

により新しく multiplication $*$ を定めると, $*$ に > 112 も,

$\text{Hom}_R(B, B)$ は R -algebra となる。明らかにその単位元は

$\delta_B \eta_B$ 2" 5. R -algebra B に $\gamma \in B$ の恒等写像 1_B が

* 11. $\gamma_B \in \text{Hopf R-algebra}$

(1), $r_B \in K$ の antipode $k(1) = k$ にする。

B is R -bialgebra & $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $J_B = \text{Ker } \eta_B$ is B 's two-sided ideal & $\neq \emptyset$. J_B 's right annihilator is $I_B^{(R)}$, left

同型は $u \otimes h \longrightarrow u \cdot h$, $u \in M^H$, $h \in H$ によって与えられる。

実際 $\rho = g_H(1 \otimes \gamma_H) \psi_H$ とおくと, $\rho(M) \subseteq M^H$ であり,

更に $\alpha = (\rho \otimes 1) \psi_H$ とおくと, α が定理中の map α である map となることを示すことができて, 証明が終る。

これから後は R -module B として有限生成射影的 (R -f.g. projective) であるような R -bialgebra B について考える。

このとき, $B^* = \text{Hom}_R(B, R)$ も R -bialgebra になる。実際

$$M_{B^*} = (\Delta_B)^* : B^* \otimes_R B^* \cong (B \otimes_R B)^* \longrightarrow B^*, \quad S_{B^*} = (\eta_B)^* : R \longrightarrow B^*,$$

$$\Delta_{B^*} = (M_B)^* : B^* \longrightarrow B^* \otimes_R B^* \cong (B \otimes_R B)^*, \quad \eta_{B^*} = (S_B)^* : B^* \longrightarrow R$$

と示すことができる。ここで B , B^* は bialgebra として isomorphic である。また B が Hopf R -algebra ならば, B^* も Hopf R -algebra になる。

B^* の元 f , B の元 b について $(f \circ b)(b') = f(bb')$, $b' \in B$ とおくことにより, B^* は right B -module となる。また

$(\Delta_B)^* : B^* \otimes_R B^* \longrightarrow B^*$ により B^* は left B^* -module となるが,

これはより, $\hat{\psi} : B^* \longrightarrow \text{Hom}_R(B^*, B^*)$ を $\hat{\psi}(f)(g) = g \circ f$ によ

り定め, このとき $\rho^{-1}(f \otimes b)(g) = g(b)f$ によって定まる

isomorphism $\rho : \text{Hom}_R(B^*, B^*) \xrightarrow{\sim} B^* \otimes_R B$ を作成したものを

$\hat{\psi}$ とする。このとき, B^* は right B -comodule となる。このとき

も, B^* が right B -bimodule になることも容易に分かる。

$$B^* \otimes B \ni f \iff \hat{\psi}(f) = \rho^{-1}(f \otimes 1)$$

$$\iff \exists g \in B^* \text{ s.t. } g \cdot f = \eta_{B^*}(g)f = g(1)f$$

$$\iff f \in I_{B^*}^{(u)}$$

よって $B^*B = I_{B^*}^{(u)}$ となる。

これより、>3' の基本定理が示される。

定理 2 ([3]). R -f.g. projective な R -bialgebra B に

対し、>3' の条件は同値である。

(1) B は antipode をもつ。

(2) R の各極大イデール $\mathfrak{p}$ に対して、 $B_{\mathfrak{p}}$ は antipode をもつ。

(3) $I_{B^*}^{(u)}$ は rank 1 の R -projective であり、 $B^* = I_{B^*}^{(u)}B$ 。

(4) right B -bimodule M に対して、 $M^B \otimes_R B \cong M$ 。

(1) $\Rightarrow$ (4) は定理 1, (4) $\Rightarrow$ (3) は上述の考察により。また、

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) は (3) $\Rightarrow$ (1) を $R_{\mathfrak{p}} \subset R = \{1\}$ のときに示せば、これ

から容易に示せる。よって $R_{\mathfrak{p}} \subset R = \{1\}$ を仮定する。このとき

$I_{B^*}^{(u)} = Rf_0$, $B^* = f_0B = Bf_0$ である。よってある $b_0 \in B$

に対して $b_0 \cdot f_0 = 1_{B^*} = \eta_B$ となるものがあつた。よって $\gamma_{B^*}(g)(b) =$

$f_0(b \cdot (b_0 \leftarrow g))$ となる。よって、 γ_{B^*} は B^* の antipode となる。こ

れより $b_0 \leftarrow g$ は $(b_0 \leftarrow g)(f) = (g \cdot f)(b_0)$, $f \in B^*$ なる B の元を表現

する。よって $\gamma_B = (\gamma_{B^*})^*$ となる。よって γ_B は B の antipode となり

証明は終る。

定理 2 より、 R -f.g. projective な Hopf R -algebra は

local には Frobenius (1. Frobenius) であることがわかる。

A は Frobenius R -algebra となること $A^* = A\lambda^*$ となる A^* の元 $\lambda^* \in A^*$ の non-singular form であること、特に A が Hopf R -algebra なら $R\lambda^* = I_{A^*}^{(e)} (= I_{A^*}^{(o)})$ のこと、 A^* の non-singular left (right) integral であることを示す。

§ 3. Hopf algebra が symmetric となるための条件

A は R -f.g. projective な R -algebra である。いま A^* の元 λ^* なら $\lambda^*(a_1 a_2) = \lambda^*(a_2 a_1)$, $a_1, a_2 \in A$ となるもの $\lambda^* \in A^*$ の symmetric form であること、 A^* に non-singular symmetric form があること、 A は symmetric R -algebra であることを示す。 R の各種 π に関する λ^* の A_m が symmetric R_m -algebra となること、 A は 1. symmetric R -algebra であることを示す。

H は R -f.g. projective な Hopf R -algebra であり、 $h^* \in H^*$, $h \in H$ となること、 $h_r^*(h_1)(h_2) = h^*(h_2 h_1)$ により $h_r^* : H \rightarrow H^*$ であり、 $h_e(h_1^*)(h_2^*) = (h \leftarrow h_1^*)(h_2^*) = h_1^* \cdot h_2^*(h)$ により、 $h_e : H^* \rightarrow H^{**} \cong H$ を定める。いま $I_{H^*}^{(e)} \cong R$ なら、 H^* に non-singular left integral λ^* があり、これに対し $\lambda \cdot \lambda^* = \eta_H$ となるような H の元 λ が定まる。この λ は H の non-singular left integral となることを容易にわかる。更に

$$\lambda^*(h_1, h_2) = [\lambda \varepsilon^1(h_1) \circ \gamma \lambda \varepsilon^1(h_2)](\lambda), \quad h_1, h_2 \in H$$

なる関係式を得る。

定理 3 ([3]). R -f.g. projective な Hopf R -algebra H
に於いて、下記の条件は同値である。

$$(1) \quad \underline{I_H^{(e)} = I_H^{(r)}}$$

$$(2) \quad \underline{I_{H^*}^{(e)} \text{ の元 } \lambda^* \text{ に対して } \gamma \lambda^* = \lambda^*}$$

$$\underline{\lambda^*(h_1, h_2) = \lambda^*(h_2 \gamma^2(h_1)), \quad h_1, h_2 \in H}$$

特に $I_{H^*}^{(e)}$ の元がすべて symmetric となるための必要十分条件は $I_H^{(e)} = I_H^{(r)}$ かつ $\gamma^2 = 1_H$ のことである。

(1) を仮定すると、 R が local の場合に、non-singular な λ^* に対して $\lambda \cdot \lambda^* = \eta_H$ となる λ は right integral でもある。このとき $\gamma(\lambda)$ は left integral となること、および、上述の関係式を用いて (2) が示される。(2) $\Rightarrow$ (1) は比較的容易である。

もし $I_{H^*}^{(e)} \cong R$ ならば (2) は γ^2 が H^* の left non-singular integral λ^* に属する Nakayama automorphism α であることを意味している。このことに注意すると、下記の定理が容易に導かれる。

定理 4. R -f.g. projective な Hopf R -algebra H に対して、下記の条件は同値である。

$$(1) \quad \underline{I_H^{(e)} = I_H^{(r)} \text{ であり、かつ } \gamma^2 \text{ が local に inner}}$$

automorphism γ^2 がある。

(2) H が 1. symmetric である。

これは R が local ring のとき示せばよい。(1) $\Rightarrow$ (2) は定理 3 と上の注意から容易にわかる。いま (2) を仮定すると、 H^* に non-singular symmetric form μ^* がある。 $I_H^{(n)}$ の元 λ に対し γ^2 , $\mu^*(\lambda, h_1 h_2) = \mu^*(h_1 h_2 \lambda) = \mu^*(\mu_H(h_1) \mu_H(h_2) \lambda) = \mu^*(\mu_H(h_1) \lambda h_2)$ より $\lambda h_1 = \mu_H(h_1) \lambda$, よって $\lambda \in I_H^{(n)}$ 。すると定理 3 より、 H^* の non-singular left integral に対応する automorphism は γ^2 であり、 H が symmetric より γ^2 は inner γ^2 なくともなる。
 11. これは (2) $\Rightarrow$ (1) が示された。

H が commutative または cocommutative のときには、 $\gamma_H^2 = 1_H$ となることを知られている ([8])。しかし一般には、 γ_H は $\mathbb{C}$ のような order 2 を持つようなことを知られている ([5])。上の証明に関連して antipode について、上記の結果が示すことを注意しておく。 $I_H^{(n)} = I_H^{(n)}$ より $I_{H^*}^{(n)} = I_{H^*}^{(n)}$ なるから、 $\gamma_H^4 = 1_H$ 。

§ 4. Semi-simple Hopf algebras

R -algebra A について、 A -modules の monomorphism γ , R -split である γ のとき、 γ は A -split であるとき、 A は semi-simple R -algebra である。semi-simple R -algebra A について、

任意の commutative R -algebra S に対して $S \otimes_R A$ が S 上 semi-simple となる A は, separable R -algebra である。 A は separable R -algebra, C は A の center かつ $C \neq 0$, $\text{Tr}_{A/C}(1)$ が C の unit となるならば, A は strongly separable R -algebra である。

定理 5 ([3]). R -f.g. projective Hopf R -algebra H に対して, 以下の条件は同値である。

(1) R が left H -module として projective.

(2) $\eta_H(I_H^{(e)}) = R$.

(3) H が semi-simple.

(4) H が separable.

(2) $\Rightarrow$ (3) のみを示す。 (2) が仮定すると, H の left integral λ として $\eta_H(\lambda) = 1$ となるものが存在する。 $i: R \rightarrow M$ は H -modules の monomorphism として R -split であるものとする。 R -homomorphism $p: M \rightarrow N$ として $p \circ i = 1_N$ となるものが存在する。 $\therefore$

$$E(p)(m) = \sum p(m \lambda_{ij}) \gamma(\lambda_{ij}), \quad m \in M$$

と定めると, $E(p)$ は H -homomorphism として $E(p) \circ i = 1_N$ となり i が H -split するからである。

Frobenius R -algebra の左, 右正則表現は同値であるため, それらの trace は一致する。したがって 1. Frobenius R -

algebra $\mathcal{A}$ も一致し, それを $\text{Tr}_{\mathcal{A}/R}$ のように表わすことにする。

$H \in R$ -f.g. projective な Hopf R -algebra $\mathcal{A}$, $\gamma^2 = 1_H$ なるものがあるとき, $\text{Tr}_{H/R}$ が H^* の two-sided integral であることを示される ([3])。

定理 6. R -f.g. projective Hopf R -algebra H に対し, 下記の条件は同値である。

- (1) $\text{Tr}_{H/R}$ が H^* の non-singular left integral.
- (2) $\text{Tr}_{H/R}(H) = R$, かつ $\gamma_H^2 = 1_H$.
- (3) H が strongly separable, かつ $\gamma_H^2 = 1_H$.

特に $\gamma_H^2 = 1_H$ のとき, 下記の条件は同値である。

- (1)' $\text{rank}_R H$ が R の unit.
- (2)' H, H^* がともに strongly separable.

H が strongly separable であるのは $H^* = H \text{Tr}$ のことに限ることから知られている。Tr は symmetric form であるため, (1) $\Rightarrow$ (3) は定理 3 から直接示される。(3) $\Rightarrow$ (2) はほとんど自明。また (2) $\Rightarrow$ (1) は定理の前に述べたことから示される。

§ 5. 体 α 上の Hopf algebra が symmetric となるための条件については Kostant の定理, Sweedler の定理を紹介しよう。

pointed, irreducible Hopf k -algebra H がある系列 ${}^0h, {}^1h, \dots$
 $\dots, {}^th$ (t は $\mathbb{P}A$ の元 t の次数) nh , $0 \leq n \leq t$ について $\Delta({}^nh) = \sum_{i=0}^n {}^ih \otimes {}^{n-i}h$ となるような h は, t 個の divided powers の系列 ih である。明らかに ${}^0h = 1$, ${}^1h \in P(H)$ であり, $i \geq 1$ のときは $\eta_H({}^ih) = 0$ である。restricted Lie algebra L の restricted universal enveloping $U(L)$ を表わすことにする ([2])。

このとき有限次元の場合の Sweedler の構造定理は次のようになる。

定理 8 ([7]). k は標数 $p > 0$ の完全体, H は k 上有限次元の cocommutative, pointed, irreducible Hopf algebra であり, $d = \dim_k P(H) < \infty$ であるとき H は divided powers の系列 $\{ {}^0h_j, {}^1h_j, \dots, {}^{p^j-1}h_j \}, 1 \leq j \leq d$ を $\{ {}^{k_1}h_1, {}^{k_2}h_2, \dots, {}^{k_d}h_d \}, 0 \leq k_j \leq p^{j_d}-1$ として H の k -basis となるものが存在する。特に $H \cong U(P(H))$ となるのは H が algebra $U(P(H))$ として生成されることに限る。

これは 0h の対称性の問題に帰する。体 k 上有限次元の cocommutative Hopf algebra H について symmetric であることは調べるには, k の代数包 $\bar{k}$ をとり, $\bar{k} \otimes_k H$ について調べることはよい。 $\bar{k}$ は cocommutative Hopf algebra として pointed であるので, 定理 7 を利用できる。定理 7 の状態では, H が symmetric

であるための必要十分条件は H^1 が symmetric である、および H^1 の non-singular symmetric form λ^* により $\lambda^*(h) = \lambda^*(gh'g^{-1})$, $h' \in H^1$, $g \in G(H)$ となることである。また H 定理 8 に与えられたようなものとするとき、定理 8 より I_{H^1} を具体的に求めることが可能である。実際

$$\lambda^*(k_1 h_1 k_2 \dots k_d h_d) = \begin{cases} 1 & : k_1 = p^{s_1-1}, \dots, k_d = p^{s_d-1} \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

とある。 $I_{H^1} = k \lambda^*$ となる。 [6] により restricted Lie algebra L により $V(L)$ が symmetric であるのは L の各元 x により $\text{Tr}_L([x, \cdot]) = 0$ のときに限ることから示される。このことと上述の考察を合わせると、定理 9 が示される。

定理 9. k を標数 $p > 0$ の代数的閉体、 H を k 上有限次元の cocommutative Hopf algebra とし $[J(H^*)]^p = 0$ であるとき、定理 9 の条件は同値である。

(1) H が symmetric.

(2) $G(H)$ の $P(H)$ 上の表現 $R(g)$ があるとき、 $|R(g)|^{p-1} = 1$,

$g \in G(H)$ であり、 $\text{Tr}_{P(H)}([h, \cdot]) = 0$, $h' \in H^1$.

一般の場合には、以下に述べような十分条件しかない。

H を代数的閉体 k 上有限次元の cocommutative, irreducible

Hopf algebra とある。"また $J_H = J(H)$ は J_H は H の unique maximal left & right ideal" あり, H の Frobenius 性より $I_H^{(e)} = I_H^{(r)}$ のことになり。あると定理より H は symmetric となる。 $J_H = J(H)$ となるのは $P(H)$ が restricted nilpotent のときに限ることから知られてゐる ([3], [7])。

§ 6. Dedekind domain 上の Hopf algebra

この節では R は Dedekind domain, K は R の商体とある。まず group algebra による結果の拡張として, 次の定理がある。

定理 10. R -f.g. projective Hopf R -algebra H による結果の拡張
条件は同じである。

- (1) H は hereditary ring である。
- (2) H は separable R -algebra である。

H が hereditary とあると, $K \otimes_R H$ も hereditary. L が $K \otimes_R H$ は Frobenius であること, $K \otimes_R H$ は K -separable となる。このとき R が H -projective のことから, 定理 5 より, H は R -separable となる。(2) $\Rightarrow$ (1) は自明。

R 上の cocommutative Hopf algebra の構造を決定することは困難な問題であるが, かなり重要な問題に思われる。Larson は [4] にあつて, この方向への試みとして, 有限群 G の

group algebra KG に RG 以外には Hopf order が存在しない
 ための十分条件を与えた。ところが、実は、これは必要条
 件もあり、標数 $p > 0$ の場合にも一般化できることがわ
 った ([1])。

定理 11. Dedekind domain R , 有限群 G に対して,

次の条件は同値である。

(1) KG に Hopf K -order は RG だけしかない。

(2) (i) R の標数 0 のとき, R における分岐指数 $\geq q-1$ となる

ような各素数 q に対して G は non-trivial normal

q -subgroup をもたない。 (ii) R の標数 $p > 0$ のとき, G

は non-trivial normal p -subgroup をもたない。

(1) $\Rightarrow$ (2) は (2) であることと仮定して実際 KG と一致しない

Hopf order を構成することによって示す。(2) $\Rightarrow$ (1) についても

に、まず G が 1 であるか $cyclic$ group の場合に帰着できることが

重要な point である。証明はここは省略する。

なお (1) $\Rightarrow$ (2) の証明中に 1. symmetric であるか symmetric

でない Hopf R -algebra の具体例が与えられることに注意

しておく。

この定理の特別の場合として, G が non-abelian simple

group のときには, 任意の Dedekind domain R に対して

KG に RG 以外には Hopf R -order は存在しないことが

わかるし、また $R = \mathbb{Z}$ のときには G が normal 2-subgroup
をもたないときにもおき、同様のことが起こることがわかる。

最後にこの小論中のいくつかの結果は、光道隆君(東教大
入学生)の協力のもとに得られたことを記しておく。

References.

- [1] S. Endo, On Hopf orders in group algebras, In preparation.
- [2] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, New York, 1962.
- [3] R. G. Larson and M. E. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math., 91(1969), 75-94.
- [4] R. G. Larson, Group rings over Dedekind domains, I, J. Algebra 5 (1967), 358-361, II, Ibid. 7(1967), 278-279.
- [5] _____, The order of the antipode of a Hopf algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 21(1969), 167-170.
- [6] J. R. Schue, Symmetry for the enveloping algebra of a restricted Lie algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 1123-1124.
- [7] M. E. Sweedler, Hopf algebras with one grouplike element, Trans. A. M. S., 127(1967), 515-526.
- [8] _____, Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.