

Resolution V の balanced fractional 3^m factorial design の information 行列の固有多項式

海上保安大学校 栗田正秀

§ 1. 序.

Resolution $2t+1$ の balanced fractional 2^m factorial (2^m -BFF) design の information 行列の固有多項式は, 山本・白倉・栗田 [8] によつて求められた。 2^m -BFF design の性質等については, 白倉 [5], 白倉・栗田 [6], Srivastava & Chopra [7] 等によつて研究されている。

最近, Hoke [2] は, s nd ordered model における 3^m irregular fraction の information 行列の固有多項式を求めている。また resolution V の 3^m -BFF design と balanced array (B-array) の関係は, 栗田 [4] によつて求められた。

本稿では, multidimensional relationship (MDRS) algebra の直和分解を使つて, resolution V の 3^m -BFF design の固有多項式を求める。

§ 2. Balanced array と balanced design.

m 個の factor $F_1, F_2, \dots, F_m$ をもつ 3^m factorial design を考える。 $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ を処理組合せとある。但し d_r は 0, 1, 2 のいずれかである ($r=1, 2, \dots, m$)。 $y(d_1, d_2, \dots, d_m)$, $\eta(d_1, d_2, \dots, d_m)$ をそれぞれ観測値とこの期待値とあるとき, すべての parameter θ ($3^m \times 1$) は期待値の一次結合で定義される。

3 factor 以上の interaction は無視可能と仮定し, parameter θ_v を次の様に並び変える:

$$(2.1) \quad \theta_v = (\{\theta(\phi)\}, \{\theta(t^1)\}, \{\theta(t^2)\}, \{\theta(t^1 t_2^1)\}, \{\theta(t_2^2 t_2^2)\}, \{\theta(t_3^1 t_4^2)\})$$

但し, $v = 1 + m + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{2} + 2\binom{m}{2} = 1 + 2m^2$, $t_1 < t_2$, $t_3 \neq t_4$ 。

この時, 処理組合せ $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ に対し

$$(2.2) \quad \eta(d_1, d_2, \dots, d_m) = \theta(\phi) + \sum_{\varepsilon=1}^2 \sum_{t=1}^m d_{j_t}(\varepsilon) \theta(t^\varepsilon) \\ + \sum_{\varepsilon=1}^2 \sum_{t_1 < t_2} d_{j_{t_1}}(\varepsilon) d_{j_{t_2}}(\varepsilon) \theta(t_1^\varepsilon t_2^\varepsilon) \\ + \sum_{t_3 \neq t_4} d_{j_{t_3}}(1) d_{j_{t_4}}(2) \theta(t_3^1 t_4^2)$$

と書ける。但し $d_0(0) = d_1(0) = d_2(0) = 1$, $d_0(1) = -1$, $d_1(1) = 0$, $d_2(1) = 1$, $d_0(2) = 1$, $d_1(2) = -2$, $d_2(2) = 1$ 。

T を N 個の処理組合せをもつ fraction とある。この時, 観測値 $y(T)$ は

$$(2.3) \quad y(T) = E_T \theta_v + \varepsilon_T$$

と表わされる。ここ E_T は design 行列, ε_T は平均 0, 無相関で同一分散 σ^2 をもつ order N の error vector である。

$\underline{\theta}_v$ を推定するための normal equation は

$$(2.4) \quad M_T \hat{\underline{\theta}}_v = E_T' y(T)$$

で与えられる。但し $M_T (= E_T' E_T)$ は information 行列で、
各々行、列は $\underline{\theta}_v$ の要素に対応している。 $|M_T| \neq 0$ ならば T は
resolution V の fractional 3^m factorial design といわれ、ま
た $\underline{\theta}_v$ の BLU は、 $\hat{\underline{\theta}}_v = V_T E_T' y(T)$ ($V_T = M_T^{-1}$) で与えられる。

定義 2.1. V_T が m 個の factor の permutation に対して不
変であるとき、 T は balanced であるといわれる (3^m -BFF de-
sign)。

Balanced array の概念は、Chakravarti [1] によって最初
に導入された。

定義 2.2. T の t_1, t_2, t_3, t_4 番目の列からなる subarray $T_{t_1 t_2 t_3 t_4}$
において、 $w_r(d_{t_1}, d_{t_2}, d_{t_3}, d_{t_4}) = i_r$ ($r=0, 1, 2$) であるすべての vector
が、いずれも $T_{t_1 t_2 t_3 t_4}$ の行として T 度 $\lambda_{i_0 i_1 i_2}$ 回現われるとき、
 T は index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ といわれる。但
し $w_r(d_{t_1}, d_{t_2}, d_{t_3}, d_{t_4})$ は vector $(d_{t_1}, d_{t_2}, d_{t_3}, d_{t_4})$ における r の個数を表わ
す。

定理 2.1. $F_{t_1}, F_{t_2}, F_{t_3}, F_{t_4}$ に対応する M_T のすべての要素は次
の要素の一次結合で書ける。

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\theta(\phi), \theta(\phi)) = N, \quad \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1)), \quad \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2)), \quad \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1 t_\ell^1)), \\ &\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2 t_\ell^2)), \quad \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1 t_\ell^2)), \quad \varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^1 t_\ell^1)), \quad \varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^2 t_\ell^2)), \end{aligned}$$

$\varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^2 t_k^2)), \varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^1 t_k^2)), \varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1), \theta(t_k^1 t_k^1)), \varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1),$
 $\theta(t_k^2 t_k^2)), \varepsilon(\theta(t_i^2 t_j^2), \theta(t_k^2 t_k^2)), \varepsilon(\theta(t_i^1 t_j^1), \theta(t_k^1 t_k^2)), \varepsilon(\theta(t_i^2 t_j^2), \theta(t_k^1 t_k^2)).$
 但し $\varepsilon(\theta(t_i^1 t_i^2), \theta(t_j^3 t_j^4))$ は M_T の $\theta(t_i^1 t_i^2)$ 行, $\theta(t_j^3 t_j^4)$ 列に対応する要素を表わす。

定理 2.6. T が resolution V の 3^m -BFF design であるための必要十分条件は, $|M_T| \neq 0$ の下で, T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ であることである。(詳しくは栗田 [4] を参照)。

$\gamma_{p_0 p_1 p_2} \in M_T$ の $\theta(t_i^1 t_i^2)$ 行, $\theta(t_j^3 t_j^4)$ 列 ($i \neq j$) に対応し, $w_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = p_r$ ($r=0,1,2$) である要素とすると, $\gamma_{p_0 p_1 p_2}$ と B-array の index $\lambda_{i_0 i_1 i_2}$ の関係は次式で与えられる。

$$(2.5) \quad \gamma_{p_0 p_1 p_2} = \sum \frac{p_0!}{i_0! i_1! i_2!} \cdot \frac{p_1!}{i_1'! i_1''! i_2!} \cdot \frac{p_2!}{i_2'! i_2''! i_2!} \cdot (-1)^{i_0'} \cdot \delta_{0 i_1} \cdot (-2)^{i_1'} \cdot \lambda_{i_0' + i_1' + i_2' \quad i_1' + i_1'' + i_2' \quad i_2' + i_2'' + i_2}$$

§ 3. Parameter の set の間に定義される relation.

2 個の parameter $\theta(t_i^1 t_i^2), \theta(t_j^3 t_j^4)$ の間に次の様な relation $R_{\underline{\alpha}}^{(a,b),(c,d)}$ を導入する:

且 $a = w_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), b = w_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2), c = w_1(\varepsilon_3, \varepsilon_4), d = w_2(\varepsilon_3, \varepsilon_4), \underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$, (但し $\alpha_{11} = |\{\delta_{1\varepsilon_1} t_1, \delta_{1\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{1\varepsilon_3} t_3, \delta_{1\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{12} = |\{\delta_{1\varepsilon_1} t_1, \delta_{1\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{2\varepsilon_3} t_3, \delta_{2\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{21} = |\{\delta_{2\varepsilon_1} t_1, \delta_{2\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{1\varepsilon_3} t_3, \delta_{1\varepsilon_4} t_4\}|$, $\alpha_{22} = |\{\delta_{2\varepsilon_1} t_1, \delta_{2\varepsilon_2} t_2\} \cap \{\delta_{2\varepsilon_3} t_3, \delta_{2\varepsilon_4} t_4\}|$) なるば

$$(3.1) \quad \theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}} \theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$$

である。但し $|S|$ は, set S の cardinality を示す。

[註]. この relation は MDRS の公理を満足している。

Local relationship (行列) $A_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} = [a(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}; t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})_{\alpha}] \quad (n_{ab} \times n_{cd})$
を次の様に定義する:

$$(3.2) \quad a(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}; t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})_{\alpha} = \begin{cases} 1 & t \in \theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}} \theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

但し $n_{00} = 1$, $n_{10} = n_{01} = m$, $n_{20} = n_{02} = \binom{m}{2}$, $n_{11} = 2\binom{m}{2}$ である。

Ordered relationship (行列) $D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} \quad (v \times v)$ を

$$D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{と定める。}$$

$A_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$, $D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$ は次の様な性質をもっている:

$$(3.3) \quad \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} = G_{n_{ab} \times n_{cd}}$$

$$(3.4) \quad A_{\beta}^{((a,b),(e,f))} \cdot A_{\gamma}^{((e,f),(c,d))} = \sum_{\alpha} f((a,b),(c,d), \alpha; (e,f), \beta, \gamma) A_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$$

$$(3.5) \quad \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\alpha} D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))} = G_{v \times v}$$

$$(3.6) \quad D_{\beta}^{((a,b),(e,f))} \cdot D_{\gamma}^{((e,f),(c,d))} = \delta_{eg} \delta_{fh} \sum_{\alpha} f((a,b),(c,d), \alpha; (e,f), \beta, \gamma) D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$$

すなわち $\mathcal{Q} = [D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}]$ は linear closure である。

§ 4. ある local relationship algebra.

$A_{\alpha}^{((1,1),(1,1))} \quad (\alpha = (1001), (0110), (1000), (0001), (0100), (0010), (0000))$ を

考える。 $H_1 = A_{(1001)}^{((1,1),(1,1))} + A_{(0110)}^{((1,1),(1,1))}$, $H_2 = A_{(1001)}^{((1,1),(1,1))} + A_{(1000)}^{((1,1),(1,1))}$ とすると

補題 4.1. $H_2 H_1 H_2 = G_{2(\frac{m}{2})} + (m-2)H_2$ 。

補題 4.2. $\mathcal{O}^* = [A_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}]$
 $= [I, G, H_1, H_2, H_1 H_2, H_2 H_1, H_1 H_2 H_1]$ 。

$\mathcal{O}^*$ は James [3] によつて示された parameter v, b, r, k, λ をもつ BIB design の relationship algebra の特別な場合になつてゐる。すなわち, $B = H_1$, $T = H_2$, $N = vr = bk = 2(\frac{m}{2})$, $r = m-1$, $k = 2$, $\lambda = 1$ 。

彼の方法を使つて次の定理を得る。

定理 4.1. $\mathcal{O}^*$ は 4 つの two-sided ideal $\mathcal{O}_0^*, \mathcal{O}_1^*, \mathcal{O}_2^*, \mathcal{O}_f^*$ の直和に分解され, 各々の ideal $\mathcal{O}_\beta^*$ ($\beta=0,1,2$), $\mathcal{O}_f^*$ は, 1×1 , 2×2 の完全行列環と isomorphic になり, その basis は各々, $e_0, e_1, e_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ で与えられる。

[注]. e_β ($\beta=0,1,2$), f_{ij} ($i,j=1,2$) は $A_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ の一次結合で表わされ,

(4.1) $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha$, $e_\alpha f_{ij} = f_{ij} e_\alpha = 0$, $f_{ik} f_{kj} = \delta_{kl} f_{ij}$ を満たす。

定理 4.2. Local relationship 行列 $A_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ は e_β ($\beta=0,1,2$), f_{ij} ($i,j=1,2$) の一次結合で次の様に書ける。

$$\begin{cases} A_{(1001)}^{((1,1),(1,1))} = & e_0 + e_1 + e_2 & + f_{11} & + f_{22}, \\ A_{(0110)}^{((1,1),(1,1))} = & e_0 + e_1 - e_2 & - f_{11} & + f_{22}, \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} A_{(1000)}^{((1,1),(1,1))} = (m-2)e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2}f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2}f_{22}, \\ A_{(0001)}^{((1,1),(1,1))} = (m-2)e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2}f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2}f_{22}, \\ A_{(0100)}^{((1,1),(1,1))} = (m-2)e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2}f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2}f_{22}, \\ A_{(0010)}^{((1,1),(1,1))} = (m-2)e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2}f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2}f_{22}, \\ A_{(0000)}^{((1,1),(1,1))} = 2\binom{m-2}{2}e_0 + 2e_1 - 2(m-3)f_{12}. \end{cases}$$

§ 5. Multidimensional relationship algebra.

$$D_{\beta}^{((1,1),(1,1))\#} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & e_{\beta} \end{array} \right], \quad D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & f_{ij} \end{array} \right] \quad \text{とすると, } \mathcal{R}$$

$= [D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))\#}]$ は linear closure $\mathcal{Z}$, $D_{\beta}^{((1,1),(1,1))\#}$, $D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#}$ は $D_{\alpha}^{((1,1),(1,1))\#}$ の一次結合で書ける $\mathcal{Z}$, $D_{\alpha}^{((1,1),(1,1))\#}$ 以外の行列 $D_{\gamma}^{((a,b),(c,d))\#}$ も, $D_{\beta}^{((1,1),(1,1))\#}$ ($\beta=0,1,2$), $D_{f_{ij}}^{((1,1),(1,1))\#}$ ($i,j=1,2$) と $D_{\delta}^{((a,b),(c,d))\#}$, $D_{\delta}^{((1,1),(c,d))\#}$ の積の和で書けることを示す。

$D_{\alpha}^{((a,b),(c,f))\#} D_{\beta}^{((g,h),(c,d))\#} = \delta_{eg} \delta_{fh} \delta_{\alpha\beta} D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))\#}$, $D_{\alpha}^{((a,b),(c,f))\#} D_{f_{ij}}^{((g,h),(c,d))\#} = D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#} D_{\alpha}^{((g,h),(c,d))\#} = 0$, $D_{f_{ik}}^{((a,b),(c,f))\#} D_{f_{jl}}^{((g,h),(c,d))\#} = \delta_{eg} \delta_{fh} \delta_{kl} D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#}$ となる様に $D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))\#}$, $D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#}$ を定めると, $\mathcal{R} = [D_{\beta}^{((a,b),(c,d))\#}, D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#}]$ となり, $\mathcal{Z}$ の ordered relationship 行列 $D_{\alpha}^{((a,b),(c,d))\#}$ は $D_{\beta}^{((a,b),(c,d))\#}$ と $D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#}$ の一次結合で表わされる。

$$\begin{cases} D_{(0000)}^{((0,0),(0,0))\#} = D_0^{((0,0),(0,0))\#}, & D_{(0000)}^{((0,0),(c,d))\#} = \sqrt{m} D_0^{((0,0),(c,d))\#}, \\ D_{(0000)}^{((0,0),(c,f))\#} = \sqrt{\frac{m}{2}} D_0^{((0,0),(c,f))\#}, & D_{(0000)}^{((0,0),(1,1))\#} = \sqrt{2\binom{m}{2}} D_0^{((0,0),(1,1))\#}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha_0}^{((a,b),(c,d))} &= D_0^{((a,b),(c,d))\#} + D_f^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{(0000)}^{((a,b),(c,d))} &= (m-1) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - D_f^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\beta_0}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{2(m-1)} D_0^{((a,b),(c,d))\#} + \sqrt{m-2} D_{f_{12} f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{(0000)}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{\frac{m-1}{2}} (m-2) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - \sqrt{m-2} D_{f_{12} f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\gamma_0}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{m-1} D_0^{((a,b),(c,d))\#} + \sqrt{\frac{m}{2}} D_{f_{11} f_{21}}^{((a,b),(c,d))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}} D_{f_{12} f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\gamma_1}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{m-1} D_0^{((a,b),(c,d))\#} - \sqrt{\frac{m}{2}} D_{f_{11} f_{21}}^{((a,b),(c,d))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}} D_{f_{12} f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{(0000)}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{m-1} (m-2) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - \sqrt{2(m-2)} D_{f_{12} f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\mu_0}^{((a,b),(c,d))} &= D_0^{((a,b),(c,d))\#} + D_1^{((a,b),(c,d))\#} + D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\mu_1}^{((a,b),(c,d))} &= 2(m-2) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - 2 D_1^{((a,b),(c,d))\#} + (m-4) D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{(0000)}^{((a,b),(c,d))} &= \left(\frac{m-2}{2}\right) D_0^{((a,b),(c,d))\#} + D_1^{((a,b),(c,d))\#} - (m-3) D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#}, \\
 D_{\xi_0}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{2} \left\{ D_0^{((a,b),(c,d))\#} + D_1^{((a,b),(c,d))\#} + D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#} \right\}, \\
 D_{\xi_1}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{2} \left\{ (m-2) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - D_1^{((a,b),(c,d))\#} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a,b),(c,d))\#} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#} \right\}, \\
 D_{\xi_2}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{2} \left\{ (m-2) D_0^{((a,b),(c,d))\#} - D_1^{((a,b),(c,d))\#} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a,b),(c,d))\#} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#} \right\}, \\
 D_{(0000)}^{((a,b),(c,d))} &= \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{m-2}{2}\right) D_0^{((a,b),(c,d))\#} + D_1^{((a,b),(c,d))\#} - (m-3) D_{f_{22}}^{((a,b),(c,d))\#} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_0 = [D_0^{((a,b),(c,d))\#}], \quad \mathcal{O}_1 = [D_1^{((a,b),(c,d))\#}], \quad \mathcal{O}_2 = [D_2^{((a,b),(c,d))\#}], \quad \mathcal{O}_f = [D_{f_{ij}}^{((a,b),(c,d))\#}] \text{ とあると,}$$

補題 5.1. $\mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{O}_\alpha$, $\mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_f = \mathcal{O}_f \mathcal{O}_\alpha = 0$.

定理 5.1. $\mathcal{O}$ は 4 つの two-sided ideal $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_f$ の直和に分解し, 各々の ideal $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_f$ は,

6×6 , 3×3 , 1×1 の完全行列環と isomorphic になり,
 各 λ の既約表現の重複度は, $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = \frac{m(m-3)}{2}$, $\phi_2 = \binom{m-1}{2}$,
 $\phi_3 = m-1$ である。

§ 6. Information 行列の固有方程式.

$T \in \text{index set } \{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\} \in \mathcal{O} \supset B\text{-array } [N, m, 3, 4]$ とする。 M_T
 の $\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2})$ 行, $\theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$ 列に対応する要素を $P_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$ とする。但し
 $a = w_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $b = w_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $c = w_1(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $d = w_2(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $\theta(t_1^{\varepsilon_1} t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}}$
 $\rightarrow \theta(t_3^{\varepsilon_3} t_4^{\varepsilon_4})$ である。 $P_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$ は $\gamma_{p_0 p_1 p_2}$ の一次結合で書ける。

[註]. $\gamma_{p_0 p_1 p_2}$ と $\lambda_{i_0 i_1 i_2}$ の関係は (2.5) 式で与えられている。

T に関する M_T は

$$(6.1) \quad M_T = \sum_{\alpha} \sum_{a,b_1} \sum_{c,d_1} P_{\alpha}^{((a,b_1),(c,d_1))} D_{\alpha}^{((a,b_1),(c,d_1))}$$

と書くことが出来る。また

$$(6.2) \quad B_{\rho}^{((a,b),(c,d))\#} = \begin{cases} D_{\rho}^{((a,b),(a,b))\#} & \text{if } L(a,b) = (c,d) \\ D_{\rho}^{((a,b),(c,d))\#} + D_{\rho}^{((c,d),(a,b))\#} & \text{if } L(a,b) \neq (c,d) \end{cases}$$

$$B_{\{t_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#} = \begin{cases} D_{\{t_{ij}\}}^{((a,b),(a,b))\#} & \text{if } L(a,b) = (c,d) \\ D_{\{t_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#} + D_{\{t_{ij}\}}^{((c,d),(a,b))\#} & \text{if } L(a,b) \neq (c,d) \end{cases}$$

とすると, M_T は

$$M_T = \sum_{\rho} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \kappa_{\rho}^{ab,cd} B_{\rho}^{((a,b),(c,d))\#} + \sum_{\{t_{ij}\}} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \kappa_{\{t_{ij}\}}^{ab,cd} B_{\{t_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}$$

と書ける。但し $\kappa_{\rho}^{ab,cd}$, $\kappa_{\{t_{ij}\}}^{ab,cd}$ は $P_{\alpha}^{((a,b),(c,d))}$ (すなわち $\lambda_{i_0 i_1 i_2}$) の

一次結合で書き表わされる。

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_f$ に関する M_T の既約表現は, $K_0 (6 \times 6)$, $K_1 (3 \times 3)$, $K_2 (1 \times 1)$, $K_f (6 \times 6)$ である。すなわち

$$(6.3) \quad \begin{cases} M_T \xrightarrow{(\beta)} K_\beta = \| \kappa_\beta^{ab,cd} \| \\ M_T \xrightarrow{(\gamma)} K_f = \| \kappa_{\{f,ij\}}^{ab,cd} \| \end{cases}$$

$I_\nu \in \Omega$ なる

$$(6.4) \quad \begin{cases} M_T - \lambda I_\nu \xrightarrow{(\beta)} K_\beta - \lambda I \\ M_T - \lambda I_\nu \xrightarrow{(\gamma)} K_f - \lambda I_6 \end{cases}$$

である。よって

定理 6.1. Resolution $\mathcal{D}$ の 3^m -BFF design T の information 行列 M_T の固有値多項式 $\psi(\lambda)$ は次式で与えられる:

$$(6.5) \quad \psi(\lambda) = |M_T - \lambda I_\nu| = |K_0 - \lambda I_6|^{\phi_0} \cdot |K_1 - \lambda I_3|^{\phi_1} \cdot |K_2 - \lambda|^{\phi_2} \cdot |K_f - \lambda I_6|^{\phi_f}.$$

REFERENCES

- [1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā 17 143-164.
- [2] Hoke, A. T. (1975). The characteristic polynomial of the information matrix for second-order models. Ann. Statist. 3 780-786.

- [3] James, A. T. (1957). The relationship algebra of an experimental designs. Ann. Math. Statist. 28 993-1002.
- [4] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to J. Statist. Planning Inf.
- [5] Shirakura, T. (1977). Contributions to balanced fractional 2^m factorial designs derived from balanced arrays of strength 2ℓ . Hiroshima Math. J. 217-285.
- [6] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. Ann. Inst. Statist. Math. 27 377-386.
- [7] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist. 42 722-734.
- [8] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. "Essays in Probability and Statistics" in honor of Professor J. Ogawa's 60-th birthday (Ed., S. Ikeda et al.).