

REYE 合同の幾何学

高木寛通

本稿では、細野忍氏（東大数理）との一連の共同研究 ([7]–[10]) で明らかになった、Reye 合同型、2 重対称行列式型と我々が呼んでいる Calabi-Yau 3-fold の対の幾何学（導来同値など）について説明する。結論を早く知りたい方は 4 章をまず見てください。

1. 射影双対と直交線形切断の幾何学

射影多様体 $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ に対して、その射影双対 $\Sigma^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ を考えるのは古典的であるが、さらに $\mathbb{P}^n$ の線形部分空間 P を取り、双対ペアリングに関する P の直交 $P^\perp \subset (\mathbb{P}^n)^*$ を考え、 $\Sigma \cap P$ と $\Sigma^* \cap P^\perp$ の関係を組織的に研究するというのは比較的新しい考え方で、おそらく向井先生が始められたものだと思っている。ただし、ここで、 $\Sigma \cap P$ の Σ における余次元は、 P の $\mathbb{P}^n$ における余次元と一致しているとし、 $\Sigma^* \cap P^\perp$ についても同様である。これらを、それぞれ Σ, Σ^* の線形切断と呼び、また、 $\Sigma^* \cap P^\perp$ と $\Sigma \cap P$ は互いに直交線形切断であるという。ただし、以下の例で判明するが、 Σ^* が Σ の射影双対であるとする関係づけがうまく行かない場合もある。それでも、多くの場合、 Σ^* を射影双対の‘近く’で探してやるとうまく行く。経験則に過ぎないが、 $\Sigma \times \Sigma^*$ に都合の良い correspondence が見つかるように修正すればよいようである。

例を見てみることにする。向井先生がこのような視点に至ったのは、Fano 3-fold の新分類法の研究をされていた過程であると思われる ([17])。Fano 3-fold X に対して、その種数 $g(X)$ は $2g(X) - 2 = (-K_X)^3$ を満たす正の整数として定義されるが、反標準因子 $-K_X$ が Picard 群を生成するもの（**prime Fano 3-fold** と呼ばれる）については $2 \leq g(X) \leq 12$ で $g(X) \neq 11$ であることが古くから知られている。それぞれの種数について、双有理写像を介した分類が知られており (Fano-Iskovskih), また、種数 7, 9, 10, 12 の場合を除いては、そのものずばりを記述する方法も知られていた。向井先生は、この残った場合にも以下の通り、そのものずばりを記述する方法を発見したのである。本稿に関係する種数 7, 9, 10 の場合を説明する。向井先生は、これらの場合、 X は次のような Σ と適当な線形部分空間 P を用いて、 $X = \Sigma \cap P$ と記述できることを示したが、驚くべきことに Σ はすべて代数群のコンパクトな等質空間になっている。 Σ^* は、種数 10 の場合を除いて、 Σ の射影双対であるが、いつでも $C = \Sigma^* \cap P^\perp$ は射影曲線になる（種数 10 の場合は、そうなるように Σ^* を選び直しておく）。

- $\Sigma = \text{OG}(5, 10) \subset \mathbb{P}^{15}$ (10 次元直交 Grassmann 多様体)。

X はその余次元 7 の線形切断で、種数 7 の Fano 3-fold。 Σ^* は射影多様体としては Σ と同型、 C はその余次元 9 の線形切断で種数 7 の標準曲線。

- $\Sigma = \text{Sp}(3, 6) \subset \mathbb{P}^{13}$ (6次元 symplectic Grassmann 多様体).
 X はその余次元 3 の線形切断で, 種数 9 の Fano 3-fold. Σ^* は $(\mathbb{P}^{13})^*$ の 4 次超曲面, C はその余次元 11 の線形切断で種数 3 の標準曲線.
- $\Sigma = G_2 \subset \mathbb{P}^{13}$ (5次元 G_2 型随伴等質空間).
 X はその余次元 2 の線形切断で, 種数 10 の Fano 3-fold. Σ の射影双対は $(\mathbb{P}^{13})^*$ の 6 次超曲面であるが, この場合, $P^\perp \simeq \mathbb{P}^1$ であり, Σ の射影双対との交わりは 6 点となってしまう. そこで, Σ^* を 6 次超曲面で分岐する $(\mathbb{P}^{13})^*$ の二重被覆に取り直し, $\Sigma^* \cap P^\perp$ によって, $P^\perp$ を二重被覆に引き戻したものを表すことにする. つまり, $\Sigma^* \cap P^\perp$ は $P^\perp \simeq \mathbb{P}^1$ の 6 点で分岐する二重被覆であり, 種数 2 の曲線になる.

この記述の副産物として, 向井先生は

- X の中間次元 Jacobi 多様体と C の Jacobi 多様体が同型であること,
- C は X 上の安定ベクトル束で変形の次元が 1 のもののモジュライ空間となっていること,
- (種数が 7, 9 の場合) X は C 上のベクトル束のモジュライ空間において, Brill-Noether 軌跡として記述できること

などを示した ([18], [19]).

なお, 種数 8 の prime Fano 3-fold X についても, $\Sigma = G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ (Grassmann 多様体) として, X は Σ の余次元 5 の線形切断であることが知られていた. この場合, Σ の射影双対 Σ^* は $(\mathbb{P}^{14})^*$ の 3 次超曲面で, $P^\perp \simeq \mathbb{P}^4$ であるから, $Y := \Sigma^* \cap P^\perp$ は $\mathbb{P}^4$ の 3 次超曲面である. この場合は Σ^* を修正しても射影曲線は出てこないのだが, X と Y は双有理同値で結ばれていることが分かる.

2. 直交線形切断と導来圏

上記の記述法の証明にはベクトル束が使われる. この際, 上記の Fano 3-fold X の反標準因子である非特異 $K3$ 曲面 S に注目して, $K3$ 曲面のベクトル束の理論を適用する (この理論は向井先生自身によって整備されていた).

それについては述べないが, $K3$ 曲面 S について注目する. X を上記の通り射影空間に埋め込むとき, 反標準因子は超平面切断であるから, S も Σ における線形切断で, X より余次元が 1 だけ大きいものになる. このとき, 直交線形切断は, C より余次元が 1 小さい線形切断になり, 結果的に $K3$ 曲面になる. これを S^* と書くことにする.

この S と S^* の関係は導来圏を用いると明解に表現される. 一般に射影多様体 Σ の連接層の導来圏を $\mathcal{D}^b(\Sigma)$ で表す. 種数 7 の場合が最もきれいな関係があり, $\mathcal{D}^b(S)$ と $\mathcal{D}^b(S^*)$ は (三角圏として) 同値となる. このような関係で結ばれる二つの多様体を一般に**導来同値**という. 実は S と S^* は同型ではないことも分かる ([20], [21]). 種数 9, 10 の場合には, S^* の導来圏を少し修正したもの (twisted sheaf の導来圏) を考えれば, やはりその修正した圏と $\mathcal{D}^b(S)$ の同値が言える ([3, §5.5], [20]). いずれの場合も, S^* は S のある安定層のモジュライ空間になっているが, 普遍族が存在するのは種数 7 の場合に限られる. 種数 7 の場合はこの普遍族を核とする **Fourier-向井関手** (FM 関手) $\mathcal{D}^b(S^*) \rightarrow \mathcal{D}^b(S)$ が同値を与える. 種数 9, 10 の場合に必要な修正は, この普遍族が存在するような修正であって (普遍族の存在のための障害が Brauer 群

の元を定め、それによる twist を考える), ひとたびそのような修正を行えば, 同様に FM 関手が同値を与える.

このような導来圏の視点から多様体の関係を見るというのも向井先生の別の仕事—Abel 多様体に対する FM 関手の発見—に端を発している. $K3$ 曲面の場合に見たような直交切断の間の導来圏の関係は, 導来圏の専門家 Kuznetsov 氏によって, **ホモロジー的射影双対 (HPD) の理論**として整備された ([13]). 直交線形切断が $K3$ 曲面の場合には, HPD 理論の帰結として, まさに上記の導来同値を得る (ただし, 導来圏の修正としては, 適当な Azumaya 代数の右加群の連接層の導来圏を考えている) が, Fano 3-fold X と曲線 C の場合にも $\mathcal{D}^b(C)$ と $\mathcal{D}^b(X)$ の関係が確立する. 例えば, 種数 7 の場合, $\mathcal{D}^b(C)$ から $\mathcal{D}^b(X)$ への充満忠実な関手 Φ が存在して, $\Phi(\mathcal{D}^b(C))$ が $\mathcal{D}^b(X)$ の半直交成分となり, 残りの部分も完全に決定される. HPD 理論は, 各余次元の直交線形切断の導来圏の関係を一挙に与えるものなのである.

射影多様体 Σ に対して Σ^* が HPD であるというのは, 射影双対とは異なり, 多様体を指定するのではなく, 「各直交線形切断の導来圏の関係がうまくいくもの」という風に性質でもって定義する. 従って, Σ の HPD がいつでも存在するかは分かっていない. しかし, HPD の方が射影双対より根源的な視点で, それが時に射影双対として実現されたり, 射影双対で分岐する二重被覆になったりという風に変化すると見るべきなのだと思う.

HPD 理論の適用例として, 種数 8 の Fano 3-fold を考える. この場合, 直交線形切断として, $\mathbb{P}^4$ の 3 次超曲面 Y が得られることを述べたが, この導来圏の間の関係も HPD 理論で分かる. ここではそれを述べる代わり, 種数 8 の Fano 3-fold より余次元が一つ大きい線形切断である $K3$ 曲面 S と, その直交線形切断 $V \rightarrow \mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面—の導来圏の関係を述べておく;

$\mathcal{D}^b(S)$ から $\mathcal{D}^b(V)$ への充満忠実な関手 Φ が存在して,

$$\mathcal{D}^b(V) = \langle \Phi(\mathcal{D}^b(S)), \mathcal{O}_V(1), \mathcal{O}_V(2) \rangle$$

なる半直交分解が存在する ([14]).

ここで得られる V は $\mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面の中では特別なものであり有理的なことが知られているが, この分解は次のような Kuznetsov 氏による「導来圏を用いた $\mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面の有理性判定予想」と関連して興味深い ($\mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面は, 知られているものはすべて有理的であるが, 非有理的なものも存在するであろうと信じられている);

$\mathbb{P}^5$ の任意の 3 次超曲面 V に対して, $\mathcal{D}^b(V)$ における $\langle \mathcal{O}_V(1), \mathcal{O}_V(2) \rangle$ の右直交を $\mathcal{A}_V$ とする. つまり

$$\mathcal{D}^b(V) = \langle \mathcal{A}_V, \mathcal{O}_V(1), \mathcal{O}_V(2) \rangle$$

なる半直交分解によって, 三角圏 $\mathcal{A}_V$ を定義する. このとき, $\mathcal{A}_V$ が $K3$ 曲面の導来圏と類似の性質を持つこと (Serre 関手が 2 シフトであることなど) が知られているが, $\mathcal{A}_V$ が実際, ある $K3$ 曲面の導来圏と同値であることと, V が有理的であることは同値であろうというのが予想である.

論文 [16] において, 上の場合の他, いくつかの有理的な V について, $\mathcal{A}_V$ がある $K3$ 曲面の導来圏と同値なことが確かめてある.

3. 直交線形切断として得られる Calabi-Yau 3-fold のミラー対称性と導来同値

さて、導来同値な $K3$ 曲面の例を上で見たが、Calabi-Yau 3-fold (CY 3-fold) について、導来同値だが双有理同値ではない例が、ミラー対称性の観点から研究されてきた。それは、まさに直交線形切断として得られるものである； $\Sigma := G(2, 7) \subset \mathbb{P}^{20}$, Σ の射影双対を Σ^* とする。 Σ^* は 7×7 交代行列の 7 つの小 6×6 Pfaffian で定義される, $(\mathbb{P}^{20})^*$ の余次元 3 の多様体である。このとき、余次元 7 の線形切断 X とその直交線形切断 Y はともに CY 3-fold となり、ともに Picard 数が 1 であって次数は異なるので双有理同値ではない。後述するが、ミラー対称性の観点から、 X と Y は導来同値であると予想され、最終的に、Borisov と Caldararu が、 $X \times Y$ の中に Y でパラメーター付けられる X 内の種数 14, 次数 20 の曲線の平坦族 (correspondence) を構成し、その平坦族のイデアル層を用いた FM 関手によって、この予想が正しいことを示した ([4])。また、Kuznetsov 氏による HPD 理論による別証明もある ([14])。

なぜミラー対称性の観点からこのような同値が予想されたのかを説明する。基本にある考え方は、Kontsevich の提唱したホモロジー的ミラー対称性である。それにおいては、接続層のなす導来圏と深谷圏の導来圏が互いに入れ替わる CY 3-fold の対が互いにミラー対称的であると考えられている。従って、もし、CY 3-fold X, Y がミラー族を共有するならば、それらは導来同値であろうと予想される。

そこで、まず、 X と Y という対がミラー族においてどのように示唆されるかという点についてだが、 X のミラー族 $\mathcal{X}^\vee \rightarrow \mathbb{P}^1$ (ミラー族とは、一般ファイバーが X のホッジ数を入れ替えた CY 3-fold であるという意味とする) を構成すると、その周期積分は Picard-Fuchs 微分方程式を満たす。このとき、微分方程式は $\mathbb{P}^1$ の点 0 と ∞ に極大べき単モノドロミーを持つことが観察される。ミラー対称性を作業仮説にすると、ミラー族の複素構造の変形は、 X の複素ケーラー構造の変形と見なされる。さらに物理的考察と合わせると、極大べき単モノドロミーを表す行列から、 X のオイラー数、次数、第 2 Chern 類の次数などの幾何学的不変量が読み取れる。ところが、極大べき単モノドロミーを持つ点が 2 つあることから、その 1 つから X の不変量を読み取るとき、他方からは、もう 1 つの CY 多様体の不変量が読み取れ、それが Y のものであることが判明するのである。

X のミラー族 $\mathcal{X}^\vee \rightarrow \mathbb{P}^1$ の極大べき単モノドロミーを持つ一つの点から Y の不変量が読み取れるというのも、 X と Y のミラー共有の示唆ではあるが、実はさらに、 Y のミラー族 $\mathcal{Y}^\vee \rightarrow \mathbb{P}^1$ も構成でき、その周期積分は X のミラー族と同じ Picard-Fuchs 微分方程式を満たすことが分かるのである。そして、極大べき単モノドロミーを持つ点の 1 つから Y の不変量を読み取るとき、他方からは、 X の不変量が読み取れる。

以上から、 X, Y はミラー族を共有すると期待されるが、これは未解決の問題である。しかし、次のように考えることもできる。接続層の導来圏の自己同値は、ミラーのシンプレクティック微分同相によって引き起こされる深谷圏の導来圏の自己同値に対応する。ミラー族 $\mathcal{X}^\vee$ の底空間である $\mathbb{P}^1$ 内の上半平面内の道に沿って、微分方程式の解を解析接続すると、極大べき単モノドロミーを持つ 2 つの点における解の整基底の間に非自明な変換が起こる。そ

れがミラーのシンプレクティック微分同相に由来するのならば、微分同相は X の接続層の導来圏の自己同値に対応し、 X 以外の CY 3-fold の存在を示唆しないが、そうでない場合、その微分同相は X の接続層の導来圏から別の CY 3-fold の接続層の導来圏への同値に対応すると考えられる。

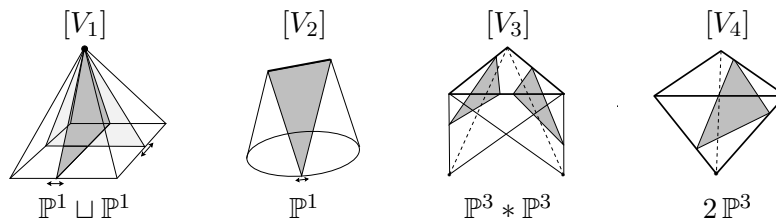
4. 新しい例

他にこのような CY 3-fold の例はないだろうか？と考えたのは、共同研究者の細野さんである。K3 曲面の場合の導来同値は、Torelli の定理を向井格子に拡張した Orlov の定理で完全に判定できるが CY 3-fold の場合、対応する格子の理論がなく手掛かりがなくなる。そこで上述のようにミラー対称性を 1 つの指導原理として試行錯誤を繰り返し、以下のような CY 3-fold の対に辿り着いた。その構成の起源は **Reye 合同型 Enriques 曲面** と呼ばれる古典的なものである。その場合も含めて少し一般的に説明する。

$\mathbb{P}^n$ の 2 次超曲面全体は 0 でない $n+1$ 次対称行列の上半成分を斉次座標とする $\binom{n+2}{2} - 1$ 次元射影空間でパラメーター付けられる。その n 次元部分射影空間 P に対応する 2 次超曲面の部分族を考えると、その射影幾何から興味深い多様体が対になって現れる。 $n=3$ の場合には、Enriques 曲面と特異 Fano 3-fold が現れるが、その研究の歴史は古い。ここに現れる Enriques 曲面が Reye 合同型と呼ばれるもので、1882 年 Reye によって発見された ([2])。一方で、特異 Fano 3-fold は **Artin-Mumford の 2 重 4 次 3 様体** と呼ばれ、単有理的だが有理的でない 3-fold の重要な例を与えるものとして知られている ([1])。

以下、 $\binom{n+2}{2} - 1$ 次元射影空間の n 次元部分射影空間 P を一般的に選ぶことにする。 $n=4$ のとき、 P でパラメーター付けられる 2 次超曲面族を出発点にして、我々が遭遇した新しい CY 3-fold の対は次のように定義される。

P において特異な 2 次超曲面全体は、5 次対称行列の行列式の零点集合である 5 次超曲面 H でパラメーター付けられる。 P を一般的に選んでいるため、 H は階数 3 と 4 の 5 次対称行列に対応する点のみを含み、階数 3 の 5 次対称行列に対応する点の集合 C は、次数 20、種数 26 の曲線であることが分かる。階数 4 の 5 次対称行列が定める 2 次超曲面は、 $\mathbb{P}^3$ の非特異 2 次曲面 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の錐に同型であるから、連結な平面族を 2 つ持つ。これに対して階数 3 の 5 次対称行列が定める 2 次超曲面は、連結な平面族を 1 つしか持たない。



$\mathbb{P}^4$ の特異 2 次超曲面 Q とその中の平面族の図。 Q の頂点集合は k 次元線形部分空間 $V_k (k := 5 - \text{rk } Q)$ を用いて $[V_k]$ で表す。平面族のパラメーター空間も記す。

これによって、2次超曲面とそれに含まれる連結な平面族の対をパラメーター付ける空間を Y とすれば、 C で分岐している H の2重被覆 $Y \rightarrow H$ が定まる。 Y は (非特異) CY 3-fold であることが示され、不変量

$$\deg Y := M_Y^3 = 10, c_2 \cdot M_Y = 40, h^{1,1}(Y) = 1, h^{2,1}(Y) = 26$$

を持つことが分かる ([7])。ここで M_Y は $\mathcal{O}_H(1)$ の引き戻しである。我々は Y を **2重対称行列式型 CY 3-fold** と呼んだ。

他方、 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の点を5次元ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を用いて $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と書くことにすると、5次対称行列 A に付随する対称双線形形式は、 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の因子 $D_A := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0\}$ を定める。 P の基底となる対称行列 $A_1, \dots, A_5$ を選ぶことで、 P に属する対称行列に対応する $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の因子すべての交わりは、 $D_{A_1}, \dots, D_{A_5}$ の完全交叉であることが分かる。これは CY 3-fold であるが、 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の成分の入れ替えで定まる対合写像 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ で不変であるから、その商を取ると、再び CY 3-fold X が得られて、不変量

$$\deg X := H_X^3 = 35, c_2 \cdot H_X = 50, h^{1,1}(X) = 1, h^{2,1}(X) = 26$$

を持つことが分かる。ここで H_X は $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の対称的な $(1, 1)$ 因子から決まる X 上の因子である。これを **Reye 合同型 CY 3-fold** と呼ぶ。

実は Reye 合同型 CY 3-fold のミラー族とその Picard-Fuchs 微分方程式は、“CY 微分方程式” と呼ばれる微分方程式の大きなリストに含まれている。我々は、 X のミラー族を Borisov-Batyrev のトーリック多様体における完全交叉 CY 3-fold に対するミラー構成法によって構成し、その極大べき単モノドロミーの性質を詳細に調べることで、 Y の存在について示唆を得ていたのであった ([7])。

なお、 Y のミラー族の構成は完成していないが、論文 [8] において X のミラー族をオービフォールド構成法によって構成しており、その構成法から Y のオービフォールド構成法によるミラー族の構成も可能と期待している ([8, §7 参照])。

次の結果は、論文 [7] で予想し、最終的に論文 [9], [10] で示された。

定理 1 (Hosono-T). X と Y は導来同値である。

X, Y の上の定義をよく見れば、実はそれらがある多様体の直交線形切断になっていることを見ていきたい。実はこの視点は導来同値を示す上で大切である。

上で出てきた Σ と Σ^* の例は、少なくとも一方は代数群のコンパクトな等質空間であったが、ここで出てくるのはいずれも等質空間のコンパクト化である。このため、それらを調べる上で技術的困難が生ずる。

まず、Reye 合同型 CY 3-fold X について考える。写像 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ を次のように定める：

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の双斉次座標を $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$, $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ の斉次座標を w_{ij} ($1 \leq i \leq j \leq n+1$) とするとき、点 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_n))$ の像を $w_{ii} = x_i y_i$ ($1 \leq i \leq n$), $w_{ij} = x_i y_j + x_j y_i$ ($1 \leq i < j \leq n$) を斉次座標に持つ点 $w_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ とする。ここで考えている $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ は、 $\mathbb{P}^n$ の二次超曲面のパラメーター空間と区別したいので、 $\mathbf{P}$ で表すことにする。この写像の像 $\mathcal{X}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の成分の入れ替えで定まる対合写像による商であることが容易に

確かめられる．簡単な計算により， $\mathcal{X}$ の点に対応する対称行列のすべての 3 次小行列式が消えていることが分かる．実は， $\mathcal{X}$ は $\mathbf{P}$ において，3 次小行列式の共通零点集合，言い換えれば，階数 2 以下の対称行列全体に対応する部分集合であることが分かる．また， $\mathcal{X}$ は $\mathbb{P}^n$ の次数 2 の 0-サイクルをパラメータ付けている Chow 多様体であることも知られている．

写像 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ を対角線集合 $\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{P}^n\} \simeq \mathbb{P}^n$ に制限すると，それは像への同型写像になる．これは $\mathbb{P}^n$ の 2 次 Veronese 埋め込みに他ならない．その像を $v_2(\mathbb{P}^n)$ で表す．これは対称行列の 2 次小行列式の共通零点集合，言い換えれば，階数 1 の対称行列全体に対応する部分集合であることが分かる．

射影幾何的に言えば， $\mathcal{X}$ は $v_2(\mathbb{P}^n)$ の 2 点を結ぶ直線全体の和集合（割線多様体）である．これは，対称行列の階数による $\mathcal{X}$ 及び $v_2(\mathbb{P}^n)$ の特徴付けから従う．

$\mathcal{X}$ には $\mathbb{P}^n$ の自己同型群 $\mathrm{PGL}(n+1)$ が自然に作用しており，階数 1 に対応する部分，つまり $v_2(\mathbb{P}^n)$ と，階数 2 に対応する部分，それぞれに等質的に作用している（階数 2 の部分のコンパクト化である）．また， $v_2(\mathbb{P}^n)$ は $\mathcal{X}$ の特異点集合になっている．

$A = (a_{ij})$ を $n+1$ 次対称行列とすると， A と対称行列 $w = (w_{ij})$ の内積を $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} a_{ij} w_{ij}$ で定めれば， $\mathbf{P}$ と $n+1$ 次対称行列をパラメータ付ける $\binom{n+2}{2} - 1$ 次元射影空間は互いに双対になる．以下，後者を $\mathbf{P}^*$ で表す．ここで， $A = (a_{ij})$ ， $w_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (w_{ij})$ に対して，簡単な計算から

$$(4.1) \quad {}^t \mathbf{x} A \mathbf{y} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} a_{ij} w_{ij}$$

が成り立つことが分かる．

$\mathbf{P}^*$ の一般的な n 次元部分射影空間 P を選ぶとき，その直交空間 $P^\perp \subset \mathbf{P}$ により， $\mathcal{X}$ の線形切断 $X := \mathcal{X} \cap P^\perp$ が定まる．

$n = 4$ のとき，これがまさに上で定義した Reye 合同型 CY 3-fold に他ならないことが (4.1) によって分かる． $n = 3$ のとき， X は古典的な Reye 合同型 Enriques 曲面である．

次に 2 重対称行列式型 CY 3-fold Y について考える．($\mathbf{P}^*$ において，階数 n 以下の対称行列をパラメータ付ける多様体は，対称行列の行列式の零点集合である $n+1$ 次超曲面 $\mathcal{H}$ であるが，これは $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbf{P}$ の射影双対であることが分かる．しかし， $\mathcal{H}$ と $v_2(\mathbb{P}^n)$ を対と見るよりも， $\mathcal{H}$ と $\mathcal{X}$ を対と見る方が話がうまくいく（種数 10 の Fano 3-fold と類似）．これは，Bondal-Orlov 氏 ([5], [6]) や Kuznetsov 氏 ([15]) による $v_2(\mathbb{P}^n)$ のホモロジー的射影双対の決定によってもすでに示唆されていた．

n が偶数のとき，階数 n の対称行列の定める 2 次超曲面は $\mathbb{P}^{\frac{n}{2}}$ の連結族を 2 つ持つ．これによって $\mathcal{H}$ の 2 重被覆 $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$ が構成できる．これは階数 $n-1$ 以下の対称行列に対応する部分集合で分岐している． $\mathcal{Y}$ の階数 n の部分は $\mathrm{PGL}(n+1)$ に関して等質的であり， $\mathcal{Y}$ はその部分のコンパクト化になっている． $\mathcal{H}$ の P への制限を H ，その $\mathcal{Y}$ への引き戻しを Y とする． $n = 4$ のとき，これが上で定義した 2 重対称行列式型 CY 3-fold に他ならない．

なお, n が奇数のときは事情が異なり, 階数 $n+1$ の対称行列の定める 2 次超曲面が $\mathbb{P}^{\frac{n-1}{2}}$ の連結族を 2 つ持つことから, $\mathcal{H}$ で分岐する $\mathbf{P}^*$ の 2 重被覆が構成できる. $\mathcal{Y}$ の階数 $n+1$ の部分は $\mathrm{PGL}(n+1)$ に関して等質的であり, $\mathcal{Y}$ はその部分のコンパクト化になっている. $n=3$ のとき, 2 重被覆を P に制限して, 4 次曲面 $P \cap \mathcal{H}$ で分岐する $P \simeq \mathbb{P}^3$ の 2 重被覆が得られるが, これが先に触れた Artin-Mumford の 2 重 4 次 3 様体である.

5. BPS 数と FM 関手

X と Y の導来同値の証明の方針は Borisov-Caldararu の方法の類似である. X でパラメーター付けられる Y 内の種数 3, 次数 5 の曲線の平坦族を構成し, そのイデアル層を用いた FM 関手によって X と Y が導来同値であることを示した ([10]).

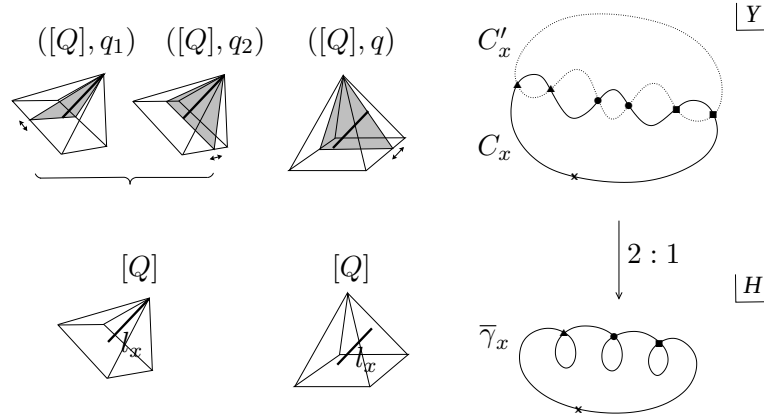
実は, この曲線族の存在は Y の一つの BPS 数によって示唆されていた (この点は Borisov-Caldararu と異なっている). 一般に, CY 3-fold において, 与えられたホモロジー類を持つ曲線のパラメーター空間のオイラー数を符号付きで表すと考えられているのが, **BPS 数** (Gopakumar-Vafa 不変量) である. ミラー対称性を用いて, X と Y 上の様々な曲線の BPS 数を計算することができる ([7, §4]). それによると, 種数 3, 次数 5 の曲線の BPS 数は 100 となっており, これは負号を考慮すると X のオイラー数の 2 倍である. これは「 X でパラメーター付けられる Y 内の種数 3, 次数 5 の曲線の平坦族が二つ」あることを示唆している (なお, 他のいくつかの BPS 数も X と Y の射影幾何を用いて解釈できて興味深い. この示唆が正しいことを説明する).

このような曲線族は, 射影幾何的に次のように構成される. X は $\mathcal{X}$ の中で完全交叉であり, 特異点を持たないから, $\mathcal{X}$ の特異点集合 $v_2(\mathbb{P}^4)$ と交わらない. $v_2(\mathbb{P}^4)$ は $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の対角線集合の像でもあるから, X の点 x は $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) と言う形の点の像 $w_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ であり, 従って, x から $\mathbb{P}^4$ の $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を通る直線が決まる. これを l_x で表す. $\mathbb{P}^4$ の直線をパラメーター付ける多様体は, $\mathbb{C}^5$ の 2 次元部分ベクトル空間をパラメーター付ける多様体 $G(2, 5)$ に他ならないことに注意すると, $x \mapsto l_x$ によって, X から $G(2, 5)$ への写像が得られる. 実はこれは像への同型写像になっている事が分かる. よって, x と $[l_x] \in G(2, 5)$ を同一視して, $X \subset G(2, 5)$ と考えることにする.

このとき, X は, P に属する対称行列の定める 2 次超曲面で明確に捉えることが出来る. P に属する対称行列 A の定める 2 次超曲面 Q_A が l_x を含むのは, ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t\mathbf{y}A\mathbf{y} = 0$ が成り立つときである. ここで, 式 (4.1) により, $w_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \in X = \mathcal{X} \cap P^\perp$, $[A] \in P$ であることから, ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{y} = 0$ という条件はいつでも成り立つ. よって, $l_x \subset Q_A$ となる A は, P において ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t\mathbf{y}A\mathbf{y} = 0$ で定義される射影平面 P_x でパラメーター付けられることが分かる. 実は, $\mathbb{P}^4$ の直線に対応する点 $[l] \in G(2, 5)$ が X に含まれることと, $l \subset Q_A$ となる $[A] \in P$ が射影平面でパラメーター付けられることは同値であることが分かる.

P_x と H の交わり $\bar{\gamma}_x$ を考えると, これは, 射影平面 P_x における 5 次曲線である. 詳しく調べてみると, この Y における逆像は 2 つの曲線 C_x と C'_x に分解していて, それぞれ $\bar{\gamma}_x$ と双有理同値であることが分かる. さらに, X の一般点 x に対しては, $\bar{\gamma}_x$ は通常 2 重点を 3 つ持ち, C_x と C'_x はその非特異モ

デルであることも分かる．よって、 C_x と C'_x の種数は 3 である． $\bar{\gamma}_x$ が 5 次曲線なので、 C_x と C'_x の次数も 5 である．こうして、 X によってパラメーター付けられる 2 つの種数 3、次数 5 の曲線族 $\{C_x\}_{x \in X}$ と $\{C'_x\}_{x \in X}$ が得られた．この平坦族の 1 つを用いた FM 関手によって、 X と Y が導来同値であることが示される．



曲線 C_x と C'_x の図． 左は直線 l_x を含む 2 次超曲面 Q を表す． q は Q の平面族で l_x を含む平面が属するもの． C_x は $([Q], q)$ なる点からなる．もし l_x が Q の頂点を通るならば、2 点 $([Q], q_1), ([Q], q_2) \in C_x$ が $[Q] \in \bar{\gamma}_x$ に移る（このような Q が三つある）．そうでなければ $([Q], q) \in C_x$ は $[Q] \in \bar{\gamma}_x$ から一意に決まる．

導来同値を示すための設定は、 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を考えるまでもなく X と Y で十分なように見える．しかし、導来同値を示すには、平坦族に属する異なる曲線のイデアル層どうしの Ext が消えていることを言わなければならない．そのために曲線のイデアル層の局所自由解消を構成しなくてはならない．それは $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の視点で見ると自然にできることが判明する．特に、局所自由解消に現れる局所自由層は $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の双有理幾何学を調べると自然に得られるし、それらの間の Ext を計算することも可能になる． $\mathcal{Y}$ の双有理幾何を詳しく調べることでこれらを実行することが出来た．詳しくは論文 [9] を見られたい．

将来的には、 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の適切な特異点解消（圏論的、非可換的）がホモロジー的射影双対であることが示せればよいと思っている．

6. $\mathcal{Y}$ の双有理幾何

最後に $n = 4$ の場合の $\mathcal{Y}$ の双有理幾何について簡単に触れておく． V を 5 次元ベクトル空間として $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(V)$ と書くことにする．先に述べたように、 $\mathbb{P}(V)$ の階数 4 の 2 次超曲面 Q は平面族を二つ含むが、その各々が、平面のパラメーター空間である $G(3, V)$ の中の 2 次曲線を定めることが分かる．その一つを $q \subset G(3, V)$ とする．さらに Q は頂点を持ち、それを V の 1 次元ベクトル空間を用いて $[V_1] \in \mathbb{P}(V)$ と書くことにすると、 Q に含まれる平面はすべて $[V_1]$ を通る．よって、自然に $G(2, V/V_1) \subset G(3, V)$ と見なすとき、 $q \subset G(2, V/V_1) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V/V_1)$ となっている． q の $\mathbb{P}(\wedge^2 V/V_1)$ において張る平面を $\mathbb{P}_q$ とすると、

それに対応する $G(3, \wedge^2 V/V_1)$ の点 $[\mathbb{P}_q]$ が定まる. こうして, Q とその平面族の一つ q に対して $G(3, \wedge^2 V/V_1)$ の点 $[\mathbb{P}_q]$ が定まった. $G(3, \wedge^2 V/V_1)$ が $G(3, 6)$ 束 $G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ の $[V_1] \in \mathbb{P}(V)$ 上のファイバーであることに注意すれば, これにより有理写像 $\mathcal{Y} \dashrightarrow G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$ が定まる. ところがさらに, $\mathbb{P}(\wedge^2 V/V_1)$ において一般の平面 $\mathbb{P}$ を取ると, $G(2, V/V_1) \cap \mathbb{P}$ として $G(2, V/V_1)$ の 2 次曲線が定まることから, $\mathcal{Y} \dashrightarrow G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1))$ は双有理的であることも分かる.

逆に $G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ からスタートして, 双有理幾何 (2-ray game とか Sarkisov link とか呼ばれる) を展開すると, 次のような図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) & \dashrightarrow & \widetilde{\mathcal{Y}} & & \\ \downarrow & \searrow & \swarrow & \downarrow & \\ \mathbb{P}(V) & & \overline{\mathcal{Y}} & & \mathcal{Y}. \end{array}$$

ここで, $G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) \rightarrow \overline{\mathcal{Y}}$ は $G(2, V/V_1) \subset G(3, V)$ に応じて引き起こされる写像であり ($\overline{\mathcal{Y}} \subset G(3, \wedge^3 V)$ である), フリップ型の縮小写像である. $G(3, \wedge^2 T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{Y}}$ はそのフリップ, $\widetilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ は因子型の縮小写像である. これらの写像はすべて具体的に記述することができる.

この双有理幾何の具体的な記述のおかげで, 先に述べた X と Y の導来同値を与える曲線族のイデアル層の局所自由分解が求められる. それは, 特に $G(3, 6)$ の幾何を非常によく反映している.

REFERENCES

- [1] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 75–95.
- [2] F. Cossec, *Reye congruences*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 737–751.
- [3] A. Caldararu, *Derived categories of twisted sheaves on Calabi-Yau manifolds*, Ph.D. Thesis, Cornell University, available at <http://www.math.wisc.edu/~andrei/>
- [4] L. Borisov and A. Caldararu, *The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 2, 201–222.
- [5] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, arXiv:alg-geom/9506012
- [6] ———, *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 47–56, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [7] S. Hosono and H. Takagi, *Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I*, J. of Alg. Geom. posted on July 15, 2013, PII S 1056-3911(2013)00618-9 (to appear in print), arXiv:1101.2746.
- [8] ———, *Determinantal quintics and mirror symmetry of Reye congruences*, arXiv:1208.1813, to appear in Commun. Math. Phys.
- [9] ———, *Duality between $S^2\mathbb{P}^4$ and the double symmetric determinantal quintic*, preprint, arXiv:1302.5881.
- [10] ———, *Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence*, preprint, arXiv:1302.5883.
- [11] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zurich, 1994) Birkhauser (1995) pp. 120–139.

- [12] A. Kuznetsov, *Hyperplane sections and derived categories*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 70 (2006), no. 3, 23–128; translation in Izv. Math. 70 (2006), no. 3, 447–547.
- [13] ———, *Homological projective duality*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 105 (2007), 157–220.
- [14] ———, *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, arXiv:math/0610957.
- [15] ———, *Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics*, Advances in Mathematics **218** (2008) 1340–1369
- [16] ———, *Derived Categories of Cubic Fourfolds*, Cohomological and Geometric Approaches to Rationality Problems Progress in Mathematics **282** (2010), 219–243
- [17] 向井茂, *Fano 多様体論の新展開—ベクトル束法とモジュライ問題を巡って—*, 数学 47 (1995), 122–145.
- [18] ———, *Brill-Noether 理論の非可換化と 3 次元 Fano 多様体*, 数学 49 (1997), 1–24.
- [19] ———, *3 次元 Fano 多様体のモジュライとモジュライ論的記述*, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集
- [20] S. Mukai, *Duality of polarized K3 surfaces*, New Trends in Algebraic Geometry EuroConference on Algebraic Geometry Warwick, July 1996, London Mathematical Society Lecture Note Series **264**, 311–326
- [21] K. Oguiso, *K3 surfaces via almost-primes*, Mathematical Research Letters **9**, 47–63 (2002)
- [22] E.A. Rodland, *The Pfaffian Calabi-Yau, its Mirror and their link to the Grassmannian $G(2, 7)$* , Compositio Math. 122 (2000), no. 2, 135–149.
- [23] A. N. Tjurin, *On intersections of quadrics*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 51–105.