

(n, n) 型複素構造の自己同型群

についての一考察

京大 理 成木 勇夫

§ 1. 序

ここではコンパクト多様体上の sub-elliptic な (n, n) 型複素構造の自己同型群が Lie 変換群とすることを証明するのが目的である。道具立ては R. S. Palais の有名な定理 [3] と最近 J. J. Kohn の論文 [2] と L. Hörmander の論文 [1] とにおいて発展させられた sub-elliptic 微分作用素の理論のみであって、証明はすばる簡単である。

本論にはいる前に、よく使う記号を二三あげておく。

S を複素 C^∞ vector bundle とするとき、 $\Gamma(S)$ は S の (大域的な) C^∞ cross-section 全体の空間とする。 S が (前後関係より分る他の) vector bundle T の sub-bundle であるとき、 $S^\perp$ で S の annihilator 全体を作る T^* (T の dual bundle) の sub-bundle を表す。 M が C^∞ 多様体であるとき、 M の tangent bundle を $T(M)$ とかく。又、 $X, Y \in \Gamma(T(M))$ (或は $\Gamma(T(M) \otimes \mathbb{C})$) に対して、 $[X, Y]$ を通常 bracket $(XY - YX)$ とする。

又 $S, T(M)$ 等の p 上の fiber を $S_p, T_p(M)$ で表し、 $X \in \Gamma(S)$ の p での値を X_p とかく。なお、ここでは C^∞ -級の微分可能性を常に仮定する。

§ 2. 準備

M を $2n+n'$ 次元の C^∞ 多様体とし、 S を $T(M) \otimes \mathbb{C}$ の sub-bundle とし、 $\dim_{\mathbb{C}} S_p = n$ ($p \in M$) とする。

定義 1. 次の二つの条件が満たされるとき、対 (M, S) を M 上の (n, n') 型の概複素構造と呼ぶ。

$$(i) S_p \cap \bar{S}_p = (0) \quad (\text{但し、}\bar{S}_p \text{ は } S_p \text{ の complex conjugation, } p \in M)$$

$$(ii) X, Y \in \Gamma(S) \text{ に対し、} [X, Y] \in \Gamma(S \oplus \bar{S})$$

さらに S が completely integrable のときは、よく (M, S) は integrable であるという。

注意、 $n'=0$ のときは、このようは概複素構造は、integrability と共に、通常のものと同じである。 $n'=1$ のときは、これは J. J. Kohn [2] によって考えられ、やはり almost complex structure と命名されたので、筆者もこれに従った。

定義2. $(M, S), (M', S')$ を二つの (n, n) 型複素構造とする

とき、 M から M' 上への diffeomorphism f が (M, S) から (M', S') 上への同型であるとは、 M の全ての点 p に対し、 $(df)_p$ が S_p を $S'_{f(p)}$ 上に同型に写すときいう。とくに $(M, S) = (M', S')$ のとき f は (M, S) の自己同型と呼ばれる。

さて、sub-ellipticity を定義する前に二、三の記号を作っておく。

$\eta \in \Gamma(S^\perp T^*(M))$ のとき、

$$L_p^\eta(s, t) = i \langle (d\eta)_p | s \wedge t \rangle \quad (\text{但し } s, t \in S_p)$$

とおく。 L_p^η は S_p 上の Hermite 形式である。 $\eta = 0$ のときには、

$$\mathcal{L}_p = [L_p^\eta; \eta \in \Gamma(S^\perp T^*(M))]$$

とおけば、 $\mathcal{L}_p$ は Hermite 形式より成る real vector space となる。

定義3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_p = n$ で $\mathcal{L}_p$ は 0 以外に半定値の Hermite 形式

を含むとき、 (M, S) は sub-elliptic であるという。

以後は、 M compact と仮定する。 (M, S) の自己同型全体

の作る群を $A(M, S)$ と記すとし、 $f_t (t \in \mathbb{R})$ を $A(M, S)$ の中で動く

1-parameter subgroup とする。 f_t の generator を Y とすれば、

$A(M, S)$ の定義より明らか。

$$X \in \Gamma(S) \implies \mathcal{L}_Y(X) \in \Gamma(S).$$

但し、 $\mathcal{L}_Y$ は Y に関する Lie-derivative を表す。 $\mathcal{L}_Y(X) = [Y, X]$

$$\mathcal{U}(M, S) = \{ Y \in \Gamma(T(M)) ; \mathcal{L}_Y(X) \in \Gamma(S) \text{ for any } X \in \Gamma(S) \}$$

と置く、 $Y \in \mathcal{U}(M, S)$ なるとき、 Y の生成する 1-parameter subgroup は $A(M, S)$ ^{の中} を動く (M が compact であることに注意)。次は有名な R. S. Palais [3] の定理の直接の系である。

命題 1. $\mathcal{U}(M, S)$ が有限次元ならば、 $A(M, S)$ は M 上に作用する Lie 変換群となる。

さて、これから J. J. Kohn と L. Hörmander の結果を引用しよう。そのために微分作用素 $\mathcal{K}$ を次のように選ぶ。 $X^j (j=1, 2, \dots, \pi)$ を $\Gamma(S)$ の元の組で $X^j (j=1, 2, \dots, \pi)$ が S_p を生成するよう選ぶと、

$$\mathcal{K}u = (X^1 u, \dots, X^\pi u) \quad (\text{但し } u \in C^\infty(M))$$

と置く。

定理 1. (M, S) が sub-elliptic であるとき、またそのときに限って、 $\mathcal{K}$ は sub-elliptic である。(すなわち $\mathcal{K}$ が sub-elliptic であるとは次の不等式の成立することを意味する。)

$$\forall s: \text{real} \quad \exists C_s > 0 \quad \forall u \in C^\infty(M) : \|u\|_{(s+\frac{1}{2})} \leq C_s \left(\sum_{j=1}^{\pi} \|X^j u\|_{(s)} + \|u\|_{(s)} \right)$$

但し $\|_{(s)}$ は $C^\infty(M)$ 上の (適当に選ばれた) Sobolev norm を表す。

注意. この定理は $n'=1$ の場合には J. J. Kohn [2] によって証明された。一般の場合は L. Hörmander [1] の極限一般化定理から直ちに帰結する (Th. 1.1.5, Th. 1.2.4)

§ 3. 定理の証明

さて序に述べた定理の証明にかかる。そのために、次のように、Sobolev norm を $\Gamma(T(M) \otimes \mathbb{C})$ 上にも定義しておく。
 (M, S) を前節同様 (n, n') 型複素構造とし、 ξ^j ($j=1, 2, \dots, p$) を $\Gamma(S^+)$ の元で、 ξ_p^j ($j=1, 2, \dots, p$) が S_p^+ を生成するものとする。
 このとき、定義 1 における条件 (ii) により明らかに $\xi_p^j, \bar{\xi}_p^j$ ($j=1, 2, \dots, p$) は $T_p^*(M) \otimes \mathbb{C}$ を生成する。よって

$$\|x\|_{(S)}^2 = \sum_{j=1}^p (\|\xi^j(x)\|_{(S)}^2 + \|\bar{\xi}^j(x)\|_{(S)}^2) \quad (x \in \Gamma(T(M) \otimes \mathbb{C}))$$
 とおくと、 $\|\cdot\|_{(S)}$ は通常の意味の $\Gamma(T(M) \otimes \mathbb{C})$ 上の Sobolev norm の一つとなる。

定理². M を compact C^∞ 多様体とし、 (M, S) を M 上の sub-elliptic な (n, n') 型複素構造とする。このとき、その自己同型群 $A(M, S)$ は M 上の Lie-transformation group となる。

証明) $Y \in \mathcal{OL}(M, S)$, $X \in \Gamma(S)$, $\xi \in \Gamma(S^\perp)$ とする。

$\xi(X) = 0$ の両辺の Lie derivative をとると、

$$\mathcal{L}_Y(\xi)(X) + \xi(\mathcal{L}_Y(X)) = 0$$

$\mathcal{OL}(M, S)$ の定義により左辺の第 2 項は 0, また $\mathcal{L}_Y(\xi) = Y \lrcorner d\xi + d(Y \lrcorner \xi)$

であるから、

$$X(\xi(Y)) = \langle d\xi | X \wedge Y \rangle$$

そこで X を X^j ($j=1, 2, \dots, n$) とおき, X の sub-ellipticity を考えて

$$\|\xi(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leq C \|Y\|_{(0)}$$

とくに

$$\|\xi^j(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leq C \|Y\|_{(0)} \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

一方, Y は real vector field であるから $\bar{\xi}^j(Y) = \overline{\xi^j(Y)}$ 即ち

$$\|\bar{\xi}^j(Y)\|_{(\frac{1}{2})} \leq C \|Y\|_{(0)}$$

よって $\|\cdot\|_{(\frac{1}{2})}$ の定義から

$$\|Y\|_{(\frac{1}{2})} \leq \sqrt{2p} C \|Y\|_{(0)} \quad (\text{但し } Y \in \mathcal{OL}(M, S))$$

したがって、 $\mathcal{OL}(M, S)$ は有限次元, 定理 1 により証明了。

§ 3. 定理 2 の意義, 今後の問題

初めに、 (M, S) を (n, n) -型複素構造とする。 M の任意の点

p, q に対して $f(p) = q$ とする $f \in A(M, S)$ が存在するとき、 (M, S)

は均質であるということにすれば、定理 2 から compact 且 sub-

elliptic 正均質 (n, n) -型複素構造のほゝる多様体は G/H (G : Lie 群, H : G の closed subgroup) とかけることが直ちに分る。 G と H を自己同型群ととり、 H として一点の isotropy group ととれる。こうして、この種の複素構造の分類は古典的には Lie 群の理論に帰着せられる。

今度は M の複素多様体 V の実部分多様体であるとする。

$$S_p = T_p(M) \otimes \mathbb{C} \cap T_p^{(0,1)}(V) \quad (p \in M)$$

と置く。但し、 $T_p(M) \subset T_p(V)$ と考える。このとき $\dim_{\mathbb{C}} S_p$ は

M 上一定であれば、 S_p は p 上の fiber として持つ $T(M) \otimes \mathbb{C}$ の

subbundle が一意的に定まり、 (n, n) を適当に定めてやると (M, S)

は M 上の integrable な (n, n) -型複素構造となる。この場合、

(M, S) は M の V への埋め込まれ方を代表していると考えたい。

が、果してどれ程正確なのかという疑問が起ってくる。それは

次のように言つてよい。 M の V への埋め込まれ方を適

当の変換 (即ち M を M 上に写す微分同相で M の近傍間の

holomorphic isomorphism に拡張できるもの) 全体の群

$P(M, V)$ は $A(M, S)$ にどれ程近いだろうか? M が real analytic

ならば $P(M, V) = A(M, S)$ である。又、 M が V の超曲面であつて

(M, S) が sub-elliptic ならばやはり $P(M, V) = A(M, S)$ である。そ

の他の場合は、何も分らない。それは今後の問題である。

が、結局正則的拡張の問題が M に対して解けるかどうかと

いうことにかかっている。話は横道にそれたが、いずれに
 して、 $P(M, V) \subseteq A(M, S)$ は明らかだから、定理2は $P(M, V)$
 の有限性のための一つの十分条件を与えていると言える。又、
 定理2とは直接何の関係もないが、次のような問題も極めて
 重要である。即ち、integrable (n, n) 型複素構造 (M, S) を与え
 たとき、その構造から上述の如く M の複素多様体の中への埋め
 込みによって導かれるか？ ということである。 $n=0$ のとき
 は有名な Newlander-Nirenberg の定理によって肯定的に解決
 されているが、 $n \geq 1$ の場合は同様の議論を進めるには大きな
 困難がある。非常に精密な偏微分方程式の理論が必要とな
 る。これ、前に言ったように M が G/H とかける場合は
 代数的、微分幾何学的方法によって肯定的に解決される。
 もし (M, S) が sub-elliptic かつ compact な場合は、 M を Stein 多様体
 に埋め込むことができることを注意しておく。定理1によ
 って、正則関数の M 上への制限全体の空間は有限次元で表け
 ればいいからである。

References

1. L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary value problems. *Ann. of Math.* 84 (1966). 129-209.
2. J. J. Kohn, Boundaries of complex manifolds. *Proc. Minnesota Conference on Complex Analysis*, 81-94 Springer - Verlag, Berlin, 1965.
3. R.S. Palais, A global formulation of the Lie theory of transformation groups. *Mem. Amer. Math. Soc.* 22. 1957.