

リヤプノフ数と双曲性 — Katok の結果から —

東大 理 笹野一洋

A. Katok, LYAPUNOV EXPONENTS, ENTROPY AND PERIODIC ORBITS FOR
DIFFEOMORPHISMS, Publ. Math. I.H.E.S., 51 (1980), 137-173.

を紹介する。上の文献は、8月頃 Publish され、日本にも着いているので、ここでは、outline を述べるに留める。

M を compact な n -次元多様体とし、滑らかな Riemannian metric を入っている M とする。 $f: M \rightarrow M$ を C^1 -diffeo. とする。

def. $x \in M$ における接ベクトル $v \in T_x M$ に対して、

$$\chi^+(v, f) \equiv \limsup_n \frac{1}{n} \log \|df^n v\|$$

を、 v の upper Lyapunov exponent とする。

この時、次の事実がよく知られている。

Th. 各 $x \in M$ について、 $\lambda(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \dots < \chi_{\lambda(x)}(x)$ なる実数達、 $\phi = L_0(x) \subsetneq L_1(x) \subsetneq \dots \subsetneq L_{\lambda(x)}(x) =$

$T_x M$ ($T_x M$ の subspaces $L_i(x)$ による filtration) が存在して,

$$\forall v \in L_i(x) \setminus L_{i-1}(x) ; \chi^+(v, f) = \lambda_i(x).$$

をみたす。

このとき, $k_i(x) \equiv \dim L_i(x) - \dim L_{i-1}(x) \in \mathbb{R}$, i^{th} exponent $\lambda_i(x)$ の multiplicity となる。

Th. (Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem) [O]

(i) $\exists A \subset M$: a.t. (a) $\forall \mu = f$ -invariant Borel probability measure on M について, $\mu(A) = 1$, (b). $\forall x \in A$, $\forall v \in T_x M$ について,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n v\| \quad (\text{これは } \underline{\text{Lyapunov exponent}} \text{ となる}).$$

(ii) $\chi(x)$, $\lambda_i(x)$, $k_i(x)$ は, μ に関して可測な f -invariant function である。

(iii) さらに μ が ergodic のとき, $\chi(x)$, $k_i(x)$, $\lambda_i(x)$ は全て μ -a.e. で定数になる。このとき, これらをそれぞれ, χ^μ , k_i^μ , λ_i^μ と書くことにする。 (μ -a.e. で定数故, λ_i^μ のことである。

リヤプノフ数 と呼ぶことがある。)

def. μ -a.e. x について, $\lambda_i(x) \neq 0$ ($\forall i$) のとき, $\mu \in$ non-zero Lyapunov exponents を持つ測度 となる。

I. 主結果

$M \in$ 同上とし, $f: M \rightarrow M \in C^{1+d}$ -diffeo. ($d > 0$) とする。(但し f が C^2 ($2 \leq 2$) のときは, $d=1$ と考える)。即ち,

f は C^1 -diffeo. で X の微分 df が α を指数とする Hölder 連続になるとする。 $\text{Per}(f)$ で f の周期点全体を; $P_n(f)$ で f^n の固定点の個数を; $h(f)$ で f の位相的エントロピーを; $h_\mu(f)$ で f の μ に関する測度論的エントロピー (Kolmogorov-Sinai Invariant) を表わすとする。

Th. A. μ が non-zero Lyapunov exponent を持つ f -不変測度ならば,
 $\text{supp } \mu (= \mu \text{ の support }) \subset \overline{\text{Per}(f)}$ 。

Th. B. Th. A の仮定のキとで。さらに, μ が ergodic で, その support が 1 つの周期軌道となるるとき, ある topological Markov shift と同型な f -不変双曲型閉集合が存在する。さらに, $h(f) > 0$ 。

Th. C. M が 2 次元で, $h(f) > 0$ ならば, (Lyapunov exp. に関係なく) Th. B. の様な双曲型閉集合が存在する。

Th. D. Th. A の仮定のキとに,

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h_\mu(f)。$$

Th. E. M が 2 次元のとき, (Lyapunov exp. に関係なく)

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h(f)。$$

II. Main Lemma.

def. $\kappa > 0$, $l \geq 1$ に対して, M の部分集合 $\Lambda_{\kappa, l}$ を次の様に定める;

$$\Lambda_{\alpha, l} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \in M; \quad \exists \text{ decomposition } T_x M = E_x^s \oplus E_x^u \text{ s.t.} \\ \text{for } \forall n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \forall m \in \mathbb{Z}; \\ \textcircled{1} \forall v \in df_x^m E_x^s \quad \|df_{f_x^m} v\| \leq l \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \quad \|df_{f_x^m}^{-n} v\| \geq \bar{l} \cdot e^{n\alpha} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \textcircled{2} \forall v \in df_x^m E_x^u: \quad \|df_{f_x^m} v\| \geq \bar{l} \cdot e^{n\alpha} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \quad \|df_{f_x^m}^{-n} v\| \leq l \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \textcircled{3} \gamma(f_x^m) \geq \bar{l} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \\ \text{但, } \gamma(x) \text{ は } E_x^s \text{ と } E_x^u \text{ とのなす角度。} \end{array} \right\}$$

(注; 10^{-3} には, “十分小さな正数” ぐらいの意味しかない.)

def. $\Lambda_{\alpha, l}^k \equiv \{x \in \Lambda_{\alpha, l}; \dim E_x^s = k\}$, (closed set, f -inv. とは限らない.)

$$\Lambda_{\alpha, l}^k \equiv \bigcup_{l \leq 1} \Lambda_{\alpha, l}^k \quad (f\text{-invariant になる})$$

$$\Lambda \equiv \bigcup_{\alpha, l, k} \Lambda_{\alpha, l}^k$$

次の事実が知られている;

① E_x^s, E_x^u は $x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$ に関して連続.

② $\forall \mu$; non-zero Lyapunov exponents を持つ測度について, $\mu(\Lambda) = 1$

さらに, μ が ergodic なるば, $\mu(\Lambda_{\alpha, l}^k) = 1$. 但, “ $\alpha = 0$ ”

$$\alpha \equiv \min |x_i^\mu|, \quad k \equiv \sum_{k_i^\mu < 0} k_i^\mu.$$

(以上については, [P] を参照されたい.)

Main Lemma compact n -dim. riem. mfd M . と, C^{1+d} -diffeo.

$f: M \rightarrow M$ ($d > 0$) について, 次の成立する;

$\forall k \in \{0, 1, \dots, s\}, \forall \alpha, \delta > 0, \forall l \geq 1$ について, $\Psi = \Psi(k, \alpha, l, \delta)$ なる正数が存在して次をみたす;

$x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$ が $f^m x \in \Lambda_{\alpha, l}^k, d(x, f^m x) < \Psi$ ($\exists m \in \mathbb{Z}$) をみたすならば, $z = z(x)$ なる点で次をみたすものが存在する;

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & f^m z = z, \\ \text{(ii)} & d_m^f(x, z) \equiv \max \{ d(f^i x, f^i z); 0 \leq i < m \} < \delta, \\ \text{(iii)} & z \text{ は双曲型周期点で, } z \text{ の local stable \&unstable mfd.} \end{array} \right.$$

は, admissible $(s, 1)$ -[(u, 1)-] mfd. near x である。
(定義 18 次節).

IV. 記号, 準備.

以後の節で使用する定義と性質を列挙する。性質の証明は殆ど, 「P」の方法が適用できる。

1° f のみによって定まる定数 $\epsilon_0 > 0$ が存在し, 任意の $x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$ のまわりの local chart として, euclidean space の x_0 -ball からのもので, それによって f から induce される euclid. sp. 上の写像 f_x が hyperbolic の様な条件をみたすものがある。詳しく言うと, $\forall x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$ について, $\exists B(x) = \text{mhd. of } x$, $\exists \Phi_x: B_{x_0}^k \times B_{x_0}^{n-k} \rightarrow B(x): \text{diffeo.}$ ($B_{x_0}^*$ は $\mathbb{R}^*$ の x_0 -ball) s.t.

- (i) $\forall y \in B(x)$ について, $T_y M$ の riem. metric から induce される距離と, Φ_x によって, $\mathbb{R}^n$ の euclid. metric から induce される

距離とは、余り遠くない。(*)

(ii) $f_x \equiv \Phi_x^{-1} \circ f \circ \Phi_x : B_{x_0}^k \times B_{x_0}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は次の形;

$$f_x(u, v) = (A_x u + h_{1x}(u, v), B_x v + h_{2x}(u, v)) \quad \begin{pmatrix} u \in \mathbb{R}^k \\ v \in \mathbb{R}^{d-k} \end{pmatrix}$$

但, $\begin{cases} h_{1x}(0,0)=0, h_{2x}(0,0)=0, dh_{1x}(0,0)=0, dh_{2x}(0,0)=0 \\ A_x, B_x \text{ は行列で, } \|A_x\| < e^{-\frac{99}{100}x}, \|B_x\| < e^{-\frac{99}{100}x} \\ (\|\cdot\| \text{ は euclid. metric に関する norm}) \\ \exists M: \text{const}; \text{ s.t. } \|(dh_x)_{z_1} - (dh_x)_{z_2}\| < M \cdot \lambda(x) \cdot \|z_1 - z_2\|^d. \end{cases}$

$$\left(z \sim z', z=(u,v), h_x(z) = (h_{1x}(z), h_{2x}(z)), \lambda(x) = \max \left\{ \frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}x} \right\} \right. \text{ とおいた。}$$

(即ち, f_x は hyperbolic の様な形をしている. ということ).

(iii) その他の付帯条件 (※). △

z^0 $x \in \Lambda_{x,2}^k$ について. $(\delta > 0, \gamma > 0)$

$$\text{def } U_x^{\gamma, \delta, k} \equiv \left\{ \Phi_x(\text{graph of } \varphi); \varphi \in C^1(B_{h\epsilon(x)}^{d-k}, B_{h\epsilon(x)}^k) \right. \\ \left. \|\varphi(0)\| \leq \delta, \|d\varphi(0)\| \leq \gamma \right\}$$

但. $\epsilon(x)$ は x から来る, 或る正定数, $0 < \epsilon \leq 1$.

同様にして, $S_x^{\gamma, \delta, k}$ も定義される。

$$\text{def } \epsilon \equiv \inf \{ \epsilon(x); x \in \Lambda_{x,2}^k \} > 0.$$

$$\lambda(x) \equiv \max \left\{ \frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}x} \right\}, \quad \gamma(x) \equiv \frac{1}{20} (1 - \lambda(x))$$

(※); ~~~~~(※) 部分は, 詳しく書いても煩雑になるばかりなので簡単に書いた。詳しいことは論文を参照されたい。(以下同様).

def $N \in \mathcal{U}_x^{Y(x), \frac{1}{4}\epsilon, h}$ について, $N \cap \Phi_x(B_{\frac{h\epsilon}{2}}^k \times B_{\frac{h\epsilon}{2}}^{\Delta-k})$
admissible (u, h) -mfd. near x といふ。 admissible
 (s, h) -mfd. near x も定義される。

admissible (u, h) - $[(s, h)]$ -mfd は, 以下, local unstable.
 $[(stable)]$ mfd の様な働きをする。 $\triangle$

3° $h, \chi > 0, l \geq 1, \beta < \frac{1}{4}, 0 < h \leq 1$ について,
 $x, y \in \Lambda_{\chi, l}^k$ が 十分に近く, さらに $N \in \mathcal{U}_y^{4\beta Y(x), h\beta\epsilon, h}$ とな
 るば, $N \cap \Phi_x(B_{\frac{h\epsilon}{2}}^k \times B_{\frac{h\epsilon}{2}}^{\Delta-k})$ は admissible (u, h) -mfd.
near x である。 $\triangle$

4° $x \in \Lambda_{\chi, l}^k, 0 < h \leq 1$ について, 任意の admissible
 (s, h) -mfd near x と, 任意の admissible (u, h) -mfd.
near x とは, 1点のみで交わり, かつ, その交わりは 横断
的である。 $\triangle$

V. Main Lemma $\Rightarrow$ 主結果

Main Lemma を仮定して主結果 (I 節) を導く。

Th. A.; $\forall x_0 \in \text{supp } \mu, \forall \epsilon > 0$ について, $z \in \text{Per}(f)$ s.t.
 $d(x_0, z) < \epsilon$ を見つければよい。

$\mu(A) = 1$ 故, $\exists h, l, \chi; \mu(B(x_0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \Lambda_{\chi, l}^k) > 0$. $\psi =$
 $\psi(h, \chi, l, \frac{\epsilon}{2})$ は Main Lemma に表われる正数とある。こ
 のとき, $\exists B \subset B(x_0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \Lambda_{\chi, l}^k; \text{diam } B < \psi$ かつ $\mu(B) > 0$.

Poincaré recurrence theorem により, $\exists x \in B, \exists n(x) \in \mathbb{Z}^+$;
 $f^{n(x)}(x) \in B \subset \Lambda_{n,l}^k$. $\epsilon < 1$. $\therefore n$ とし, $d(x, f^{n(x)}(x)) < \psi$
 である。故に, Main Lemma を用いれば, $\exists z \in \text{Per}(f); d(x, z)$
 $< \frac{\epsilon}{2}$. $\therefore n$ とし, $d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
 故, Th.A. が証明できた。 Th.A.

Th.B.; もしも, $\forall i; \chi_i^\mu < 0$ とすると, f は, 大体, contraction
 と考えられ, ergodicity により $\text{supp } \mu = (\text{single periodic orbit})$ となり仮定に矛盾。 $\forall i; \chi_i^\mu > 0$ とあれば, f^{-1} を考
 えることによって, 矛盾。故に, $\exists i; \chi_i^\mu < 0 < \chi_{i+1}^\mu$ となる。
 $\forall x_0 \in \text{supp } \mu, \forall \epsilon > 0$ ϵ とする。 $\therefore n$ とし, $\exists x_1, x_2 \in M$ s.t.
 $x_1, x_2 \in B(x_0, \frac{\epsilon}{4})$, $\exists k, l; \forall \delta > 0; \mu(\Lambda_{k,l}^k \cap B(x_i, \delta)) > 0$
 $(i=1,2)$, かつ, $d(x_1, x_2)$ は 十分近い。 Th.A. の証明と同様
 にして, x_i に 十分近い hyperbolic periodic point $z_i (i=1,2)$
 がとれ, Main Lemma (iii) 及び IV.4° により, $W^u(z_1) \cap$
 $W^s(z_2) \neq \emptyset$, $W^u(z_2) \cap W^s(z_1) \neq \emptyset$. このような状況が
 あれば, Th.B. の主張が導かれることは, S. Smale が証明し
 ている, [S]. Th.B.

Th.C.; $0 < h(f) = \sup \{h_\mu(f); \forall \mu = \text{ergodic } f\text{-inv. Prob. meas.}\}$
 故, $\exists \mu = \text{ergodic } f\text{-invariant probability measure s.t.}$
 $h_\mu(f) > 0$ かつ, $\text{supp } \mu \neq (\text{single periodic orbit})$.
 f の Lyapunov 数 $\chi_1^\mu \geq \chi_2^\mu$ とする。一般に, Margulis に

より, 次の結果が得られている。(1968年, unpublished).

$$\left[\begin{array}{l} f: M^m \rightarrow M^m : C^1\text{-diffeomorphism}, \mu = \text{Borel prob. } f\text{-inv. meas.} \\ \text{について,} \\ h_\mu(f) \leq \int_M \chi^P(x) d\mu \quad \text{where } \chi^P(x) = \sum_{i: \chi_i(x) > 0} k_i(x) \chi_i(x). \end{array} \right.$$

これを用いた場合に適用すれば, $0 < h_\mu(f) \leq \sum_{i: \chi_i^\mu > 0} \chi_i^\mu$. 故に, $\chi_1^\mu > 0$ である. 同様の議論を $\bar{f}$ に適用すれば, $\chi_2^\mu < 0$ なることが示される. 故に, Th. B. が適用できて, 証明が出来る. Th. C

Th. D. この定理の証明には, (n, ε) -spanning set を用いた $h_\mu(f)$ の定義 (論文の第 I 章で述べられている) を必要とするため, ここでは省略する. Th. D

Th. E. (Th. D. を認めて, Th. E. を証明する.) $h(f) = 0$ ならば, 証明すべきことはない. $h(f) > 0$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ について, $\exists \mu$: ergodic measure s.t. $h_\mu(f) > h(f) \cdot (1 - \varepsilon) > 0$. このとき, Th. C. の証明と同様に, $\chi_2^\mu < 0 < \chi_1^\mu$ とできるから, Th. D. により,

$$\limsup \frac{1}{n} P_n(f) \geq h_\mu(f) > h(f) \cdot (1 - \varepsilon).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば Th. E. が証明される. Th. E.

VI. Main Lemma の証明の概略

適当な admissible (ρ, h) -mfd near x の族 $\{A_m\}_{m \geq 0}$, 及び

admissible (u, h) -mfd. near x の族 $\{B_m\}_{m \geq 0}$ を構成し、
 この (横断的な) 交点達の点列の極限として、求める hyperbolic
 periodic point を得る。即ち、詳しく言えば次の様;

$$B_0 \equiv \Phi_x \left(\{0\} \times B_{\frac{h}{2}}^{\frac{1-k}{2}} \right). \quad \text{と置き, inductive に,}$$

$$B_0^i \equiv f \left(B_0^{i-1} \cap C(f^{i-1}x, h) \right) \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \quad \text{と置く。}$$

$$\text{但, } C(x, h) \equiv \Phi_x \left(B_{h \in(x)}^k \times B_{h \in(x)}^{1-k} \right) \quad \text{for } x \in \Lambda_{x,2}^k.$$

よして,

$$B_1 \equiv f B_0^{n-1} \cap \Phi_x \left(B_{\frac{h}{2}}^k \times B_{\frac{h}{2}}^{\frac{1-k}{2}} \right).$$

(次々の図を参照)。

B_0 から B_1 を構成したのと同様に, inductive に, B_m ($m=1, 2, \dots$)
 を構成する。一方, f^{-1} を用いて, $B_{\frac{h}{2}}^k \times \{0\}$ から, inductive
 に, A_m ($m=0, 1, 2, \dots$) を構成する。

このとき, 適当な条件のもとで (即ち, ψ etc. を小さくする
 ことで,) $\forall m=1, 2, \dots$; A_m は admissible (u, h) -mfd near x
 & B_m は admissible (u, h) -mfd near x . なることが証明で
 きる。よって,

$$Z_{k,l} \equiv A_k \cap B_l$$

$$\text{と置く。 (NB: } f^m Z_{k,l} = Z_{k-1, l+1}).$$

このとき, IV. 1° 等を用いて, 次の2式が示される;

$$\textcircled{1} \dots \lim_{k \rightarrow \infty} d'_x(Z_{k, k-1}, Z_{k+1, k}) = 0$$

$$\textcircled{2} \dots \sum_{k=1}^{\infty} d'_x(Z_{k+1, k}, Z_{k, k-1}) < \infty.$$

(ここで, d_x^2 は, euclidean metric を表わす.)

② 下り,

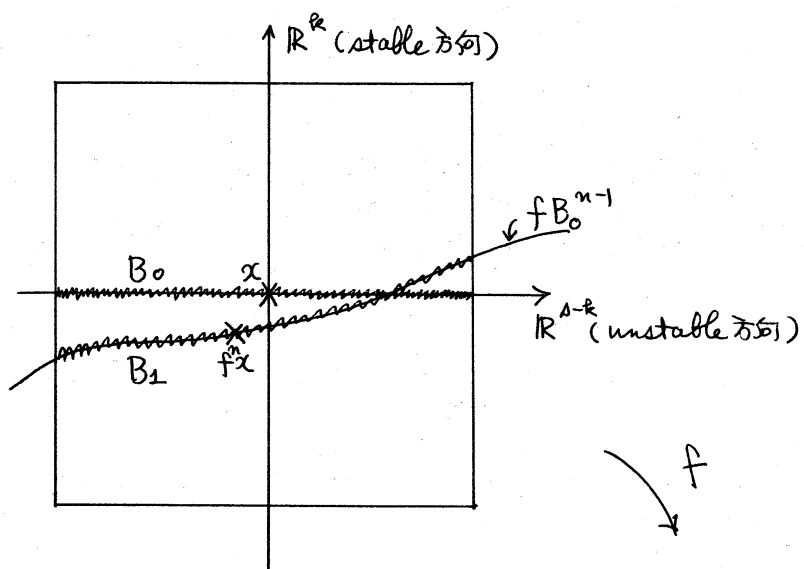
$$\exists \lim_k Z_{k, k+1} \Rightarrow Z.$$

このとき,

$$\begin{aligned} f^m Z &= f^m \left(\lim_k Z_{k, k+1} \right) = \lim_k (f^m Z_{k, k+1}) = \lim_k Z_{k+1, k} \\ &= \lim_k Z_{k, k+1} \quad (\text{ここで ① を用いる}) \\ &= Z \end{aligned}$$

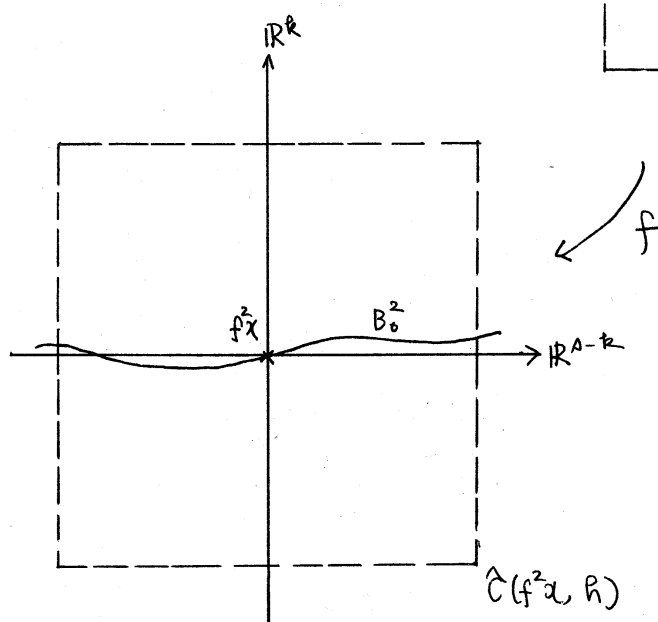
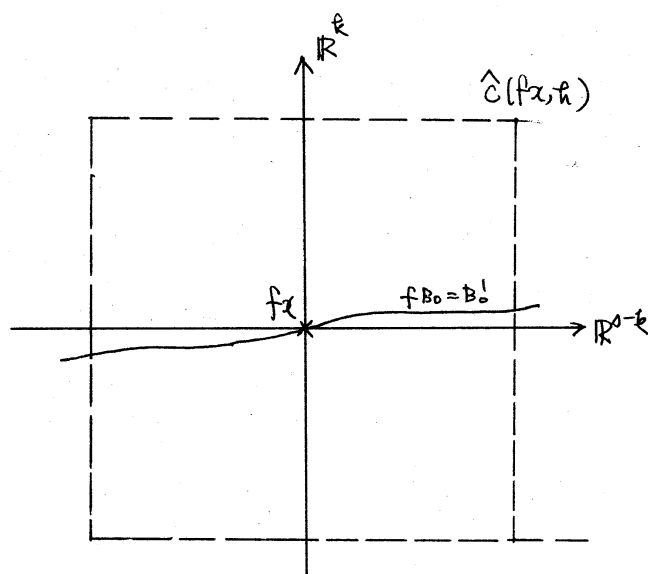
故, Main Lemma の (i) (ii) が示された。

さらに, より注意深く考察すれば, $\exists \lim_m A_m$ がわかり, これが求まる local stable mfd となる。unstable mfd についても同様で, (iii) が示された。 Main Lemma



f

f^{n-2}



REFERENCES.

- [P] Pesin, Ja. B., Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents, *Math. of the USSR - Izvestija*, 10 (1976), 6, 1261-1305.
- , Characteristic Lyapunov exponents and smooth Ergodic theory, *Russian Math. Surveys*, 32 (1977), 4, 55-114.
- [O] Oseledec, V. I., Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19 (1968), 197-221.
- [S] Smale, S., *Diffeomorphisms with many periodic points*, *Diff. and Comb. Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965, 63-80.