

第41回 大阪科学賞・記念講演

高次元代数多様体の双有理分類を目指して

京都大学 大学院理学研究科 教授

藤野 修 氏



研究業績

「小平消滅定理の一般化と代数幾何学への応用」

代数多様体とは、大雑把に言うと、有限個の多項式の共通零点集合のことです。古くから研究されてきた素朴な幾何学的対象です。高校の教科書に出てくる直線、円、楕円、放物線なども代数多様体です。日本人フィールズ賞受賞者3名の仕事も代数多様体に関するものです。一般の代数多様体の形はとても複雑であり、残念ながら絵に描いたりすることはできません。現在も代数多様体論の究極目標の一つである双有理分類を目指して世界中で様々な研究がなされています。ここでは、高次元代数多様体の研究の雰囲気や少しでも伝えることができればと思います。

1. 代数多様体とは？

すでに述べましたが、代数多様体とは、大雑把に言うと、有限個の多項式の共通零点集合のことです。高校の教科書に出てくる円、楕円、放物線などは代数多様体です。放物線のグラフや平面に描かれた円や楕円の図を想像してください。これらは2次元の空間内で1次元の代数多様体を考えていることになります。高校の教科書では出てきませんが、いろいろな多項式の零点集合を考えると、自分自身と交わる曲線や、尖った点がある曲線なども出てきます。平面上の直線も1次元代数多様体です。中学受験の算数でお馴染みの鶴亀算は、中学生になると、連立一次方程式として扱われます。鶴亀算を連立一次方程式で書くと、変数が二つで一次式が二つの場合になります。鶴亀算の答えを求める話は、幾何学的に言うと、平面上で二つの直線が交わるただ一つの交点の座標を求めることに他なりません。高校の数学では立体図形も少し学ぶと思います。3次元空間の中にある球面も代数多様体です。球面を平面で切った切り口も

代数多様体です。変数をどんどん増やすともっと高次元の幾何学図形を考えることになります。もちろん絵には描けなくなりますが、頭の中で図形を想像してみてください。連立一次方程式で変数の数を増やしたものは、大学一年生の線形代数学の講義で詳しく扱われます。線形代数学は経済学や機械学習でも日常的に使われており、さまざまな学問の基礎になっています。高次元の代数多様体は上で述べたように素朴な幾何学的対象ですが、何度も言いますが、残念ながら絵に描いたりすることはできません。そこで我々は抽象的な数学理論を駆使し、代数多様体の形を理解するために研究を続けております。高次元代数多様体論の究極目標の一つは双有理分類という大雑把な分類を完成させることです。

2. 代数幾何学の歴史

先に進む前に少し歴史について見てみましょう。代数幾何学の歴史は古いです。デカルトの方法序説（17世紀です！）にはじまると言われることもあります。19世紀にはリーマンによるリーマン面の理論、19世紀から20世紀にかけてはイタリア学派による代数曲面論があります。これら古典的な仕事はとても価値のあるものですが、直感に頼る部分もあり、現代の視点からは不十分な研究でした。20世紀半ばにはグロタンディークによる代数幾何学の基礎の刷新が実行され、代数幾何学はとても抽象的な理論になってしまいました。その一方で、小平邦彦による複素解析曲面論、1960年代には広中平祐による特異点解消定理、1970年代には飯高茂による飯高プログラム、1980年代には森理論と代数多様体の双有理分類に関する重要な仕事が続きます。21世紀に入ってから発展も凄まじい状態です。ちなみに、小平、広中、森の3名は数学の最高の賞であるフィールズ賞を受賞しています。代数多様体の研究は日本のお家芸の一つでありました。

3. 代数多様体の双有理分類

代数多様体論の究極目標の一つは、代数多様体を双有理的に分類することです。二つの代数多様体が双有理同値であるとは、大体のところで同じものであり、一部分だけ少し異なるという感じです。一般に代数多様体 X が与えられると、 X には特異点と呼ばれる潰れた点や重なった点が現れます。広中の特異点解消定理によると、 X に有限回爆発と呼ばれる操作を施すと X と双有理同値な代数多様体 Y で特異点のない物を作ることができます。特異点のない代数多様体を非特異代数多様体と呼びます。非特異代数多様体はつるつるすべすべな感じです。非特異な代数多様体 Y が与えられると、有限回のフリップと因子収縮と呼ばれる操作の後、森ファイバー空間か極小モデルになると予想されています。この部分は極小モデル理論や森理論と呼ばれ、多くの場合に予想は解決されていますが、まだまだ未解決の部分も多い話です。爆発、フリップ、因子収縮は双有理同値を引き起こすことに注意してください。広中の特異点解消定理は、代数多様体のぐちゃぐちゃに潰れたり重なった部分を爆発することにより、図形を膨らませるイメージです。有限回の爆発のあと、どんな代数多様体もつるつるすべすべの非特異と呼ばれる状態になります。非特異な代数多様体には森理論を適用し、不必要に膨らんだ部分を潰していきます。まだ完全には解決していませんが、有限回の操作の後、不必要な膨らみがなくなった森ファイバー空間か極小モデルに到達すると考えられています。森ファイバー空間と極小モデルは比較的良好な性質を持った代数多様体なので、上の予想が解決できれば、代数多様体の双有理分類の研究はこのような良好な性質を持った幾何学図形の研究に帰着できるわけです。高次元代数多様体論ではいろいろな研究がなされていますが、森理論や極小モデル理論と呼ばれる理論を完成させることが一つの目標になっています。

4. 数学者の日常

だんだんと数学の話が難しくなってきたので、ここでちょっと話をかえます。数学者は一体全体日々どんな感じで研究しているのだろうか？と疑問に思わないでしょうか。大抵の大学の数学教室では准教授以上は個室が与えられております。教授を頂点とした「藤野研究室」というようなグループは存在しません。私は何度か大学を移っていますが、研究室の本棚の本を段ボールにつめて送るだけです。私のオフィスの写真を見てください。



数学では研究室の立ち上げや実験装置の整備などは必要ありません。数学者のオフィスには大抵黒板があります。本棚には大量の書籍が積んであります。もちろん全部読んだわけではありませんが、数学の研究では大量に文献を読む必要があります。パソコンは論文執筆やメールのやり取り、ネットでの情報収集に使いますが、私はそれ以上のことには使いません。私の場合はオフィスで研究が進むことは皆無で、通勤電車の中や歩いているとき、あるいは自宅でごろごろしているときにうまいアイデアが浮かぶことが多いです。大学数学科の日常を知るには絹田村子さんの『数字であそぼ』なる漫画がお勧めです。NHKで毎週放送されている『笑わない数学』は現代数学の雰囲気味わうにはお勧めです。

5. 小平の消滅定理

小平の消滅定理の一般化を述べる前に、小平先生について見てみましょう。右の写真はウィキペディアに載っている小平先生の写真です。小平先生は1915年生まれで、1954年に日本人として初めてフィールズ賞を受賞しています。自身による調和積分論の応用として、小平の消滅定理と呼ばれるコホモロジー群の消滅定理を証明し、それをを用いて小平の埋め込み定理を証明しました。フィールズ賞受賞後もスペンサーとの共同研究による複素構造の変形理論やイタリア学派の代数曲面論をこえる複素解析曲面論など多くの重要な仕事をされています。



6. 広中の特異点解消

広中の特異点解消についても少し見えておきましょう。写真はこれもウィキペディアからとってきました。広中の特異点解消定理の論文は200ページをこえる長大なものであり、広中の電話帳と呼ばれていました。



広中の特異点解消により、代数多様体は有限回の爆発という双有理変換を繰り返せば必ず非特異にできます。これは我々の高次元代数多様体論の出発点と言っている結果です。広中の特異点解消はその後いろいろな精密化や簡略化がなされています。

7. 森理論、極小モデル理論

ウィキペディアからとった森先生の写真はごく最近の写真のように見えます。

森先生は驚異的なアイデアでハーツホーン予想と呼ばれる予想を解決し、その流れで端射線の理論を創始しました。3次元以上の代数多様体論はなにをすればよいかよくわからなかったのですが、森先生のこのお仕事で目指すべき方向が明らかになりました。その後、森先生は力技で3次元で極小モデルの存在を示しました。この森先生のアイデアから始まる研究分野は森理論や極小モデル理論と呼ばれることが多いです。極小モデル理論は4次元以上ではまだ未完成の理論です。



8. 私の研究

やっと私の仕事について説明できるところまでできました。私が1990年代後半に大学院に進学して極小モデル理論の勉強を始めた頃は、冬の時代でした。3次元の極小モデル理論関連の重要な問題はほぼ全て解決され、4次元以上では理論の枠組みだけが完成しているという状態でした。3次元での森先生の力技は4次元以上への一般化は絶望視されており、4次元以上の極小モデル理論の研究には手がかりが皆無という状況でした。私が研究を始めた頃は、この分野を専攻する学生はほとんどいませんでした。ちょうど2000年ごろ、極小モデル理論の初期の頃から活躍していたロシアのショクロフが数々の新しいアイデアが詰まったプレプリントを発表しました。プレプリントとは正式な論文として雑誌に掲載される前の原稿のことで、数学の世界ではプレプリントという形で最新の結果がやり取りされています。このショクロフのプレプリントが引き金の一つとなり、21世紀に入って4次元以上の極小モデル理論の大発展が始まりました。研究に使う主な道具は小平の消滅定理と広中の特異点解消でした。極小モデル理論関連の研究者はすでに小平の消滅定理と広中の特異点解消定理を自由自在に扱っていたのですが、さらに巧妙に使うことにより、重要な問題が解決されていきました。私もこの流れに乗り、この一連の発展に少しは貢献できたと思っています。2006年の秋に海外

の研究者4名の共著のプレプリントで極小モデル理論の目標の一つであった大予想の解決が宣言されました。すぐに仲間とプレプリントを解読し、私は絶望したわけでした。数学者としてこれから最も充実した時期を迎えるであろう32歳の秋に、私は人生の目標の一つと考えていた予想を同業者に先に解かれてしまったのです。21世紀に入ってから極小モデル理論の発展は理論を前に前にと進める感じの発展でした。2006年の大予想の解決の宣言以降、同じ路線で数々の未解決問題が次々に解決されていくことになります。私もその路線でいくつかの仕事をすることになるのですが、2006年に絶望した天邪鬼の私は流行に乗るより独自路線をいく方がよいと思ったのです。2006年の冬から2007年の春にかけて小平の消滅定理の真に強力な一般化に辿り着くことができ、それを用いて極小モデル理論の適用範囲を究極的に広げる方向に研究を変えました。理論を前に進めるのではなく、横に広げていく感じです。極小モデル理論の研究者は小平の消滅定理を巧妙に使う技術に長けていましたが、小平の消滅定理そのものを一般化して強力な研究の道具を新たに作り、従来の壁を突き破って枠組みを拡張するという方向にはあまり興味がなかったようです。2006年以降10年間ほどは極小モデル理論の大発展の時代で、一昔前には到底解けないと考えられていた予想が次々と解決されていきました。主な道具は小平の消滅定理と広中の特異点解消でした。一方、私は他の極小モデル理論の専門家とは違う路線で、ほぼ一人で行った新しい道具の開発とその応用としての極小モデル理論の拡張を続けていました。有名な未解決問題を解いたというような派手な仕事ではないですが、荒地を開墾して次の世代が研究する場合は提供できたかな？と自身の仕事を振り返っています。私の作った道具を自由自在に操る研究者は私以外にもまだいませんが、最近では徐々に私の作った枠組みを利用する人も増えてきております。自分の作ったものが今度どのようになって行くのか楽しみです。

9. 最後に

代数多様体論に興味を持たれた若者はぜひ数学の世界に来てください。数学の研究はうまくいかないことの繰り返しばかりなのですが、たまにうまく出来ることがあり、そのときはとっても楽しいです。