

幾何学的 Association scheme とその部分要因

配置計画への応用について

金沢大 理 藤井 淑夫

§1. 序論および記号

要因配置計画における一部実施法(部分要因配置計画)における分散分析等については多くの研究がある(例えば Box and Hunter 参照[1]).

しかし現在まで association schemes および association algebra 等の代数的な観点からはほとんど考察されていない. ここではその手はじめとして, 新しい型の association schemes 等を定義し, この立場から系統的に部分要因配置計画をみようと考えた. これらの association schemes および対応する association algebras の構造を明らかにし, 部分要因配置計画における別名(alikes)関係, block 擬要因, および block 配置計画における部分混同(partial confounding)等について述べる.

この小論を通じて必要な記号を述べる.

I_n : $n \times n$ の単位行列.

G_n : すべての要素が1である $n \times n$ 行列.

$A \otimes B$: 行列 $A = \|a_{ij}\|$ と B の Kronecker 積, すなわち $A \otimes B = \|a_{ij} B\|$.

$[A_i; i=1, \dots, m]$: 行列 $A_i; i=1, \dots, m$ の linear closure によって生成される実数体上のベクトル空間.

$\{A_i; i=1, \dots, m\}$: 行列 $A_i; i=1, \dots, m$ を生成元とする実数体上の多

元環 (algebra).

$\{A_i; i=1, \dots, m\}$: $A_i; i=1, \dots, m$ を要素とする集合.

$GF(\delta)$: $\delta = 2^u$ 個の元からなる有限体. δ は素数, u は正整数とする.

また $GF(\delta)$ の元 a は座標表現 (多項式表現) として, $a = \langle a^{(1)}, \dots, a^{(u)} \rangle$

, $a^{(i)} \in GF(\delta)$, $i=1, \dots, u$ で表わすことにする.

$EG(k, \delta)$: $GF(\delta)$ 上の k 次元 Euclid 空間.

$PG(k, \delta)$: $GF(\delta)$ 上の k 次元射影空間.

$\mathcal{P}(A)$: $GF(\delta)$ 上の行列 $A (k \times p)$ ($\neq 0$) の p 個の列ベクトルの生成する

$PG(k-1, \delta)$ の部分空間.

$\overline{PG}(k, \delta)$: $PG(k, \delta)$ に零ベクトル $0 (\in EG(k+1, \delta))$ を添加して生ずる

空間. すなわち, $\overline{PG}(k, \delta) = PG(k, \delta) \cup \{0\}$.

$\overline{\mathcal{P}}(A)$: $\overline{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{P}(A) \cup \{0\}$.

$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$: $PG(k, \delta)$ の部分空間 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を同時に含む最小の部分空間.

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$: $PG(k, \delta)$ の部分空間 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ に同時に含まれる最大の部分空間.

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)'$: $EG(k, \delta)$ 上の点. 座標成分はラテン文字で表わす.

$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$: $PG(k-1, \delta)$ 上の点. 座標成分はギリシャ文字で表わす.

1. 代表のものを固定する. また $GF(\delta)$ の座標表現を用いて, 例えば

$EG(k, \delta)$ 上の点 $\underline{a}$ は $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$, $a_i = \langle a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(u)} \rangle$,

$a_i^{(\ell)} \in GF(\delta)$, $i=1, \dots, k$, $\ell=1, \dots, u$ で表わされる.

§2. $PG(k-1, \delta)$ -association scheme

点 $\underline{a}$ ($\in EG(k, \delta)$) を標識とする $v_k = \delta^k$ 個の treatments $\phi(\underline{a}) = \phi(a_1, \dots, a_k)$

を考え、これらの v_k 個の *treatments* の間に次の関係を導入する。

$EG(k, \Delta)$ 上の任意の 2 点 $Q, \underline{Q}$ に対し:

$$(2.1) \quad Q - \underline{Q} = p\alpha; \quad p \in GF(\Delta), \quad p \neq 0, \quad \alpha \in PG(k-1, \Delta)$$

のとき *treatments* $\phi(Q)$ と $\phi(\underline{Q})$ は α -th associate の関係にあるとい

$$\phi(Q) \xrightarrow{\alpha\text{-th}} \phi(\underline{Q})$$

で表わす。便宜上、任意の *treatment* はそれ自身の Q -th associate ($Q' = (0, \dots, 0)$) であるとする。

v_k 個の元の間に導入された *treatments* の間のこの関係は *association scheme* (例えば [2] 参照) のみたすべき条件 (a), (b), (c) を同時に満足することが示される。すなわち

(a) 任意の相異なる 2 つの *treatments* は、いずれかの $\alpha (\in PG(k-1, \Delta))$ -th associate であつて、それに限る。且つ *association* の関係は対称的である。またすべての *treatment* はそれ自身の Q -th associate である。

このことは定義より明らかである。

(b) 任意に固定した *treatment* $\phi(Q)$ と α -th associates である *treatments* $\phi(\underline{Q})$ の個数 n_α は始めに固定した *treatment* $\phi(Q)$ の選び方に無関係は一定値である。

このことは $\phi(Q)$ を固定したとき、(2.1) 式をみたす解 $\underline{Q}$ の個数は、 $GF(\Delta) \ni p (\neq 0)$ のとり方が $\Delta-1$ 通りであるから

$$(2.2) \quad n_\alpha = \Delta - 1; \quad \alpha \in PG(k-1, \Delta)$$

である。特に $n_Q = 1$ である。すなわち (b) が成立する。

(C) 任意に固定した2つの treatments $\phi(\alpha)$ と $\phi(\beta)$ とが α -th associate であるとする。このとき $\phi(\alpha)$ と β -th associates であり、同時に $\phi(\beta)$ と γ -th associates である treatments $\phi(\gamma)$ の個数 $p_{\beta\gamma}^{\alpha}$ は最初に固定した treatments pair に無関係である。

このことは $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$ を固定したとき

$$(2.3) \quad \begin{cases} \alpha - \beta = p_{\alpha} \\ \gamma - \alpha = p_{\beta} \\ \gamma - \beta = p_{\gamma} \end{cases}$$

を同時に満足する解 γ の個数が $p_{\beta\gamma}^{\alpha}$ であるが、容易に $\alpha, \beta, \gamma \in PG(k-1, \Delta)$ のとき

$$(2.4) \quad p_{\beta\gamma}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & ; \beta \neq \gamma \text{ で } \alpha, \beta, \gamma \text{ が共線, 且つ } \alpha \neq \beta, \gamma \text{ のとき} \\ \Delta-2 & ; \alpha = \beta = \gamma \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

であることが示される。また特に α, β, γ のうちいずれかが 0 である場合は

$$(2.5) \quad p_{\beta\gamma}^0 = \begin{cases} \Delta-1 & ; \beta = \gamma \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 & ; \beta = \gamma = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(2.6) \quad p_{\alpha\gamma}^0 = \begin{cases} 1 & ; \alpha = \gamma \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

である。したがって α -th associate である treatments $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$ のとり方

に無関係に $P_{\beta\beta}^2$ は一定であるから, (c) が成立することかわかる.

以上のことより v_k 個の treatments $\phi(\alpha)$, $\alpha \in \text{EG}(k, \lambda)$ の間に $m = \frac{\lambda-1}{\lambda-1}$ (

$\text{PG}(k-1, \lambda)$ 上の点の総数) *associate classes* の *association scheme* が導入されたが, これを我々は $\text{PG}(k-1, \lambda)$ -association scheme ということにする.

特に $k=2$ の場合は, 大きさ λ の互に直交する適当な $\lambda-1$ 個のラテン方格によつて構成される $r = \lambda+1$ の場合の OL_r -association scheme ($m = \lambda+1$ *associate classes*) [6] になる.

このように定義された *association scheme* の行列表現とみなされる *association matrices* は treatments $\phi(\alpha)$ に適当に番号をつけて, 次の様に定義する. すなわち

$$(2.7) \quad A_{\alpha} = \| a_{\alpha\beta}^{\frac{\lambda}{2}} \|$$

ここに

$$a_{\alpha\beta}^{\frac{\lambda}{2}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \phi(\alpha) \xrightarrow{\alpha\text{-th}} \phi(\beta) \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. 特に $A_0 = I_{v_k}$ である.

また treatments $\phi(\alpha)$ に辞引的に番号をつけることにより, $\lambda \times \lambda$ の *permutation matrix*

$$(2.8) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて, A_{α} ; $\alpha \in \text{PG}(k-1, \lambda)$ は次の様に表わすことが出来る.

$$(2.9) \quad A_{\alpha} = \sum_{\beta \in \text{GF}(\lambda), \beta \neq 0} P^{\beta\alpha}$$

ここに

$$P^{\rho\alpha} = \prod_{i=1}^k \otimes P^{\rho\alpha_i}, \quad P^{\rho\alpha_i} = \prod_{l=1}^u \otimes P^{\gamma_i^{(l)}}, \quad \rho\alpha_i = \langle \gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_i^{(u)} \rangle$$

$$\gamma_i^{(l)} \in GF(8), \quad i=1, \dots, k, \quad l=1, \dots, u.$$

である.

定義から A_{α} ; $\alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)$ はすべて対称行列であって

$$(2.10) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)} A_{\alpha} = G_{v_k} \\ A_{\alpha} A_{\beta} = A_{\beta} A_{\alpha} = \sum_{\gamma \in \overline{PG}(k-1, \Delta)} p_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma} \end{cases}$$

が成立する. 特に (2.4), (2.5), (2.6) 式から (2.10) 式は

$$(2.11) \quad \begin{cases} A_0 A_{\alpha} = A_{\alpha} A_0 = A_{\alpha} & ; \alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta) \text{ のとき} \\ A_{\alpha}^2 = (\Delta-1) A_0 + (\Delta-2) A_{\alpha} & ; \alpha \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \\ A_{\alpha} A_{\beta} = A_{\beta} A_{\alpha} = \sum_{\substack{\gamma \in \overline{PG}(k-1, \Delta) \\ \gamma \neq \alpha, \beta}} A_{\gamma} & ; \alpha \neq \beta, \text{ 且つ } \alpha, \beta \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \end{cases}$$

である. ここに $\gamma \in \overline{\alpha, \beta}$ は α, β, γ が $PG(k-1, \Delta)$ 上で共線であることを意味する. また (2.11) 式から

$$(2.11') \quad \begin{cases} (A_0 + A_{\alpha})^2 = \Delta(A_0 + A_{\alpha}) & ; \alpha \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \\ (A_0 + A_{\alpha})(A_0 + A_{\beta}) = A_0 + \sum_{\gamma \in \overline{\alpha, \beta}} A_{\gamma} & ; \alpha \neq \beta, \text{ 且つ } \alpha, \beta \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する.

A_{α} ; $\alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)$ を生成元とする実数体上のベクトル空間

$[A_\alpha; \alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)]$ は (2.11) 式によつて実数体上の可換な (linear associative) algebra をつくる. これを

$$\mathcal{O}(PG(k-1, \Delta)) = [A_\alpha; \alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)]$$

と書くことにする. この algebra $\mathcal{O}(PG(k-1, \Delta))$ を $PG(k-1, \Delta)$ -association algebra とよぶことにする. 対称行列から生成される algebra は *completely reducible* であり, 代数的閉体上の可換な algebra の既約表現は 1 次であるから, $\mathcal{O}(PG(k-1, \Delta))$ は順序を度外視して $\frac{\Delta^k - 1}{\Delta - 1} + 1$ 個の既約な両側 ideals の直和として一意的に書き表わされる [2]. これらの ideals の principal idempotents を $A_\alpha^\#$ ($\alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)$, 特に $A_0^\# = \frac{1}{\Delta^k} G_{\Delta^k}$ とすることが出来る) とすると, $\mathcal{O}(PG(k-1, \Delta))$ はこれらの principal idempotents $A_\alpha^\#; \alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)$ の linear closure として

$$\mathcal{O}(PG(k-1, \Delta)) = [A_\alpha^\#; \alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)] = \sum_{\alpha \in \overline{PG}(k-1, \Delta)} \oplus [A_\alpha^\#]$$

で表わされることが知られている (例えば [5] 参照). これらの principal idempotents $A_\alpha^\#$ を具体的に求める方法については § 4. で述べる.

特に $k=1$ のときは

$$(2.12) \quad \begin{cases} A_0 = I_\Delta, & A_1 = G_\Delta - I_\Delta \\ A_0^\# = \frac{1}{\Delta} G_\Delta, & A_1^\# = I_\Delta - \frac{1}{\Delta} G_\Delta \\ \mathcal{O}(PG(0, \Delta)) = [A_0, A_1] = [A_0^\#, A_1^\#] = [A_0^\#] \oplus [A_1^\#] \end{cases}$$

が成立する.

§3. Δ^{k-p} - fractional factorial association scheme

$v_k = \delta^k$ 個の treatments $\phi(a)$, $a \in EG(k, \delta)$ において, いま

$$(3.1) \quad F = \|f_{ij}\| \quad (p \times k) \quad p < k$$

を rank が p の $GF(\delta)$ 上の行列とすると, 関係式

$$(3.2) \quad Fx = f, \quad x = (x_1, \dots, x_k)' \in EG(k, \delta), \quad f = (f_1, \dots, f_p)' \in EG(p, \delta)$$

をみたす δ^{k-p} 個の解 $x \in EG(k, \delta)$ の張る $k-p$ 次元の超平面:

$$(3.3) \quad \mathcal{F}_f^{k-p} = \{x \mid Fx = f, x \in EG(k, \delta)\}$$

を考える.

$\mathcal{F}_f^{k-p} \ni x$ に対応する treatments $\phi(x)$ のみを実施するものとする. 実施した treatments $\phi(x)$, $x \in \mathcal{F}_f^{k-p}$ の間の関係を $PG(k-1, \delta)$ -association scheme によつて induce される関係によつて定義する. すなわち $\mathcal{F}_f^{k-p} \ni x, y$ に対応する 2 つの treatments $\phi(x), \phi(y)$ が $EG(k, \delta)$ 上で $x - y = p\alpha$, $p \neq 0$ のとき, α -th associate であるといい, $\mathcal{F}_f^{k-p} \ni x$ に対応する treatment $\phi(x)$ はそれ自身の 0 -th associate であると定義する. この関係が association scheme の公理をみたすことが次の様にしてわかる.

$\mathcal{F}_f^{k-p} \ni x, y$ に対応する treatments $\phi(x), \phi(y)$ が $EG(k, \delta)$ 上で

$$\phi(x) \xrightarrow{\alpha\text{-th}} \phi(y)$$

であるとき, 勿論 $Fx = f$, $Fy = f$ であるから, したがつて $F(x - y) = 0$ である. 故に association の関係を標示する $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$ は $F\alpha = 0$ をみたすもの全体である. すなわち, この $\alpha (\neq 0)$ の全体は $PG(k-1, \delta)$ における $k-1-p$ 次元超平面を形成する. この超平面を

$$\mathcal{P}^{k-1-p} = \{\alpha \mid F\alpha = 0, \alpha \in PG(k-1, \delta)\}$$

で表わす. また $\overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} = \mathcal{P}^{k-1-p} \cup \{0\}$ とする.

これらの treatments $\phi(x)$ ($x \in \mathcal{F}_f^{k-p}$) の間の関係は

(a) 任意の相異なる 2 つの treatments $\phi(x), \phi(y)$ はいずれかの α -th ($\alpha \in \mathcal{P}^{k-1-p}$) associate であって, それに限る. また association の関係は対称的である. 特に $\phi(x)$ はそれ自身の 0 -th associate である.

(b) 任意の treatment $\phi(x)$ ($x \in \mathcal{F}_f^{k-p}$) の α -th associates であるものの個数 n_α は

$$(3.4) \quad n_\alpha = \begin{cases} \Delta-1 & ; \alpha \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \alpha = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

(c) 任意の 2 つの treatments $\phi(x), \phi(y)$ が α -th associate であるとする. そのとき, $\phi(x)$ と β -th associates であり, 同時に $\phi(y)$ と γ -th associates ($\beta, \gamma \in \mathcal{P}^{k-1-p}$) である treatments $\phi(z)$ (このとき自動的に $z \in \mathcal{F}_f^{k-p}$ である) の個数 $p_{\beta\gamma}^\alpha$ は $PG(k-1, \Delta)$ -association scheme の場合と同様に $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ のとき

$$(3.5) \quad p_{\beta\gamma}^\alpha = \begin{cases} 1 & ; \beta \neq \gamma, \alpha \in \overline{\beta, \gamma} \text{ 且つ } \alpha \neq \beta, \gamma \text{ のとき} \\ \Delta-2 & ; \alpha = \beta = \gamma \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する. 特に α, β, γ のうち 0 のものがあるとき

$$(3.6) \quad p_{\beta\gamma}^0 = \begin{cases} \Delta-1 & ; \beta = \gamma \in \mathcal{P}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 1 & ; \beta = \gamma = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(3.7) \quad p_{\underline{\alpha}\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \underline{\alpha} = \underline{\gamma} \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する。以上のことから $p_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$ は最初に選んだ treatments pair $\phi(\underline{x}), \phi(\underline{y})$ の選が方に無関係である。

故にこの treatments $\phi(\underline{x})$ ($\underline{x} \in \mathcal{F}_f^{k-p}$) の間の association の関係は $\frac{\lambda^{k-p}-1}{\lambda-1}$ associate classes ($\mathcal{P}^{k-1-p}$ の点の総数) の association scheme であることがわかる。この association scheme を $PG(k-1, \lambda)$ -association scheme によって induce された λ^{k-p} -fractional factorial association scheme ということにする。以上のことから次の定理を得る。

定理 I. $EG(k, \lambda)$ のある超平面 $\underline{f} = \{\underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f}, \underline{x} \in EG(k, \lambda)\}$ の元に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ の間に $PG(k-1, \lambda)$ -association scheme によって induce される関係は association scheme の公理を満足する。

$\mathcal{F}_f^{k-p}$ の点に適当に番号をつけて、 λ^{k-p} -fractional factorial association scheme の行列表現である association matrices を定義する。すなわち

$$(3.8) \quad B_{\underline{\alpha}} = \|a_{\underline{x}\underline{\alpha}}^{\underline{y}}\|; \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}_f^{k-p}, \quad \underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$$

である。定義から $B_{\underline{\alpha}}$ は $v_{k-p} \times v_{k-p}$ の対称行列で、特に $B_{\underline{0}} = I_{v_{k-p}}$ である。また明らかに次の関係式が成立する。

$$(3.9) \quad \begin{cases} \sum_{\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} B_{\underline{\alpha}} = G_{v_{k-p}} \\ B_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\beta}} = B_{\underline{\beta}} B_{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\gamma} \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} p_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{\underline{\gamma}} B_{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

また、特に

$$(3.10) \quad \begin{cases} B_0 B_\alpha = B_\alpha B_0 = B_\alpha & ; \alpha \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ B_\alpha^2 = (\delta-1) B_0 + (\delta-2) B_\alpha & ; \alpha \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ B_\alpha B_\beta = B_\beta B_\alpha = \sum_{\substack{\gamma \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \\ \gamma \neq \alpha, \beta}} B_\gamma & ; \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \end{cases}$$

である。また (3.10) 式から

$$(3.10') \quad \begin{cases} (B_0 + B_\alpha)^2 = \delta (B_0 + B_\alpha) & ; \alpha \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ (B_0 + B_\alpha)(B_0 + B_\beta) = B_0 + \sum_{\gamma \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}} B_\gamma & ; \alpha, \beta \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}, \alpha \neq \beta \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する。 B_α ; $\alpha \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上のベクトル空間は (3.10) 式によって実数体上の可換な algebra をつくる。これを

$$\mathcal{O}(\delta^{k-p} - F_r) = [B_\alpha ; \alpha \in \overline{\mathcal{P}}^{k-1-p}]$$

で表わし, δ^{k-p} - fractional factorial association algebra ということにする。 $\mathcal{O}(\delta^{k-p} - F_r)$ の $\frac{\delta^{k-p}-1}{\delta-1} + 1$ 個の既約な両側 ideals の principal idempotents を $B_\alpha^\#$ (特に $B_0^\# = \frac{1}{v_{k-p}} G_{v_{k-p}}$ とすることができ) で表わす。これらの principal idempotents $B_\alpha^\#$ を具体的に求める方法については §4. で述べる。

§4. $\mathcal{O}(\text{PG}(k-1, \delta))$ および $\mathcal{O}(\delta^{k-p} - F_r)$ の互に直交する idempotents

§3. で定義した $p \times k$ 行列 F の p 個の行ベクトルに一次独立な $k-p$ 個の一次独立な行ベクトルからなる行列を $\tilde{F}$ とする。すなわち, $r(F'; \tilde{F}') = k$ とする。そのとき $\mathcal{O}(\text{PG}(k-1, \delta))$ および $\mathcal{O}(\delta^{k-p} - F_r)$ の互に直交する principal idempotents $A_\alpha^\#$ ($\alpha \in \overline{\text{PG}}(k-1, \delta)$), および $B_\alpha^\#$ ($\alpha \in \overline{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$) を求

めるために次の Lemmas を述べる.

Lemma 1. $\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha)$; $\alpha \in PG(k-1, \delta)$ は idempotent であつて $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を $PG(k-1, \delta)$ の部分空間とするとき次の関係式が成立する.

$$(4.1) \quad \prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right) = \frac{1}{\delta^{\ell+1}} \left(A_0 + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} A_\alpha \right)$$

$$(4.2) \quad \prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right) \cdot \prod_{\beta \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\beta) \right) = \prod_{\alpha \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right)$$

ここに, ℓ は部分空間 $\mathcal{P}$ の次元数とする. 特に $\mathcal{P} = PG(k-1, \delta)$ のときは

$$(4.3) \quad \prod_{\alpha \in PG(k-1, \delta)} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right) = \frac{1}{\delta^k} (A_0 + \sum_{\alpha \in PG(k-1, \delta)} A_\alpha) = \frac{1}{\delta^k} G_{\delta, k}$$

が成立する.

証明 $\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha)$; $\alpha \in PG(k-1, \delta)$ が idempotents であること, および (4.2) が成立することは (2.11') 式および可換性から明らかである. したがつて (4.1) 式を証明する. 部分空間 $\mathcal{P}$ の次元数についての帰納法で証明する. $\ell=0$ のときは明らかに成立する. $\mathcal{P}$ の次元数が $\ell-1$ ($\ell < k$) のとき (4.1) 式が成立したと仮定する. $\mathcal{P}$ に 1 次独立な点 $\gamma \in PG(k-1, \delta)$ を考えれば (4.2) 式から

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{P} \cup \{\gamma\}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right) = \prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta}(A_0 + A_\alpha) \right) \cdot \frac{1}{\delta}(A_0 + A_\gamma)$$

が成立する. 帰納法の仮定から右辺の式は (2.11) 式を使うことにより

$$\frac{1}{\delta^{\ell}} (A_0 + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} A_\alpha) \cdot \frac{1}{\delta} (A_0 + A_\gamma) = \frac{1}{\delta^{\ell+1}} (A_0 + \sum_{\alpha \in \mathcal{P} \cup \{\gamma\}} A_\alpha)$$

が成立する。故に $\mathcal{P}$ の次元数が 2 のときに (4.1) が成立する。

Lemma 2. $PG(k-1, \delta)$ の部分空間 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ について次のことがらが成立する。

- (i) $\prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta} (A_0 + A_\alpha) \right) - \frac{1}{\delta^k} G_{\delta^k}$ は idempotent である
- (ii) $\prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta} (A_0 + A_\alpha) \right) - \frac{1}{\delta^k} G_{\delta^k}$ と $\prod_{\beta \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{\delta} (A_0 + A_\beta) \right) - \frac{1}{\delta^k} G_{\delta^k}$ とが互に直交するための必要十分条件は $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = PG(k-1, \delta)$ であることである。

証明 Lemma 1. から明らかである。

次の Lemma も, Lemma 1. を用いて証明できる。

Lemma 3. $PG(k-1, \delta)$ の $k-2$ 次元の部分空間 $\mathcal{P}$ に対して

$$A_{\mathcal{P}}^{\#} = \prod_{\alpha \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\delta} (A_0 + A_\alpha) \right) - \frac{1}{\delta^k} G_{\delta^k}$$

とするとき $[A_{\mathcal{P}}^{\#}]$ は $\mathcal{O}(PG(k-1, \delta))$ の既約な両側 ideal であり, その principal idempotent は $A_{\mathcal{P}}^{\#}$ である。また

$$I_{\delta^k} = A_0^{\#} + \sum_{(\mathcal{P})} A_{\mathcal{P}}^{\#} ; A_0^{\#} = \frac{1}{\delta^k} G_{\delta^k}$$

は $\mathcal{O}(PG(k-1, \delta))$ に応ずる単位元 I_{δ^k} の互に直交する idempotents の分解を与える。ここに和 $\sum_{(\mathcal{P})}$ は $PG(k-1, \delta)$ のすべての $k-2$ 次元部分空間 $\mathcal{P}$ についての総和を意味する。

$PG(k-1, \delta)$ の $k-2$ 次元部分空間 $\mathcal{P}$ は, 適当な点 $\alpha \in PG(k-1, \delta)$ をとって

$$\mathcal{P} = \{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P}'\alpha = 0, \mathcal{P} \in PG(k-1, \delta) \} \equiv (\alpha)$$

で表わすことができるから, Lemma 1, 3. を用いて $\mathcal{O}(PG(k-1, \delta))$ の互に直交する principal idempotents は

$$(4.4) \quad \begin{cases} A_{\alpha}^{\#} (\equiv A_{(\alpha)}^{\#}) = \frac{1}{\Delta^{k-1}} \sum_{\substack{f' \alpha = 0 \\ f \in \overline{PG}(k-1, \Delta)}} A_f - \frac{1}{\Delta^k} G_{\Delta^k} ; \alpha \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \\ \\ = \frac{1}{\Delta^k} \left\{ (\Delta-1) \sum_{\substack{f' \alpha = 0 \\ f \in \overline{PG}(k-1, \Delta)}} A_f - \sum_{\substack{f' \alpha \neq 0 \\ f \in PG(k-1, \Delta)}} A_f \right\} \\ \\ A_0^{\#} = \frac{1}{\Delta^k} G_{\Delta^k} \end{cases}$$

で与えられる。また $\mathcal{O}(\Delta^{k-p} - F_r)$ の場合についても Lemmas 1. 2. 3 と同様の Lemmas が成立するから、 $\mathcal{O}(\Delta^{k-p} - F_r)$ の互に直交する principal idempotents は

$$(4.5) \quad \begin{cases} B_{\alpha}^{\#} = \frac{1}{\Delta^{k-1-p}} \sum_{\substack{f' \alpha = 0 \\ f \in \overline{P}^{k-1-p}}} B_f - \frac{1}{\Delta^{k-p}} G_{\Delta^{k-p}} ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ \\ = \frac{1}{\Delta^{k-p}} \left\{ (\Delta-1) \sum_{\substack{f' \alpha = 0 \\ f \in \overline{P}^{k-1-p}}} B_f - \sum_{\substack{f' \alpha \neq 0 \\ f \in \overline{P}^{k-1-p}}} B_f \right\} \\ \\ B_0^{\#} = \frac{1}{\Delta^{k-p}} G_{\Delta^{k-p}} \end{cases}$$

で与えられることがわかる。idempotents $A_{\alpha}^{\#}$, $B_{\alpha}^{\#}$ の rank はそれぞれ

$$(4.6) \quad r(A_{\alpha}^{\#}) = \begin{cases} \Delta - 1 & ; \alpha \in PG(k-1, \Delta) \text{ のとき} \\ 1 & ; \alpha = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$(4.7) \quad r(B_{\alpha}^{\#}) = \begin{cases} \Delta - 1 & ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ 1 & ; \alpha = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。また $A_{\alpha} = \sum_{\beta \in \overline{PG}(k-1, \Delta)} z_{\beta \alpha} A_{\beta}^{\#}$, $A_{\alpha}^{\#} = \sum_{\beta \in \overline{PG}(k-1, \Delta)} z^{\alpha \beta} A_{\beta}$ とすれば

$$z^{\alpha \beta} = r_{\alpha} z_{\alpha \beta} / (v_k n_{\beta}) ; r_{\alpha} = r(A_{\alpha}^{\#})$$

であるから, (4.4)式を A_α について解けば

$$(4.8) \quad \begin{cases} A_\alpha = (\lambda - 1) \sum_{\substack{f' : \alpha = 0 \\ f \in \overline{PG}(k-1, \lambda)}} A_f^\# - \sum_{\substack{f' : \alpha \neq 0 \\ f \in PG(k-1, \lambda)}} A_f^\# ; \alpha \in PG(k-1, \lambda) \text{ のとき} \\ A_0 = \sum_{f \in \overline{PG}(k-1, \lambda)} A_f^\# \end{cases}$$

が得られる. 同様に (4.5)式を B_α について解けば

$$(4.9) \quad \begin{cases} B_\alpha = (\lambda - 1) \sum_{\substack{f' : \alpha = 0 \\ f \in \overline{P}(\tilde{F})}} B_f^\# - \sum_{\substack{f' : \alpha \neq 0 \\ f \in P(\tilde{F})}} B_f^\# ; \alpha \in P^{k-1-p} \text{ のとき} \\ B_0 = \sum_{f \in \overline{P}(\tilde{F})} B_f^\# \end{cases}$$

が得られる.

§5. $\mathcal{O}(PG(k-1, \lambda))$ と $\mathcal{O}(\lambda^{k-p} - F_r)$ の間の関係

$\mathcal{O}(PG(k-1, \lambda))$ および $\mathcal{O}(\lambda^{k-p} - F_r)$ の幾何学的意味を考へて, 我々は実数体上の v_k 次元 Euclid 空間から v_{k-p} 次元 Euclid 空間への線型写像 σ を与える operator 重を次の様に定義する.

$$(5.1) \quad \Phi (\equiv \Phi(F; \underline{x})) = \|\varphi_{\underline{x}\underline{a}}\| (\lambda^{k-p} \times \lambda^k), \quad \underline{x} \in \tilde{F}_f^{k-p}, \quad \underline{a} \in EG(k, \lambda)$$

ここに

$$\varphi_{\underline{x}\underline{a}} = \begin{cases} 1 & ; \quad \underline{x} = \underline{a} \text{ のとき} \\ 0 & ; \quad \underline{x} \neq \underline{a} \text{ のとき} \end{cases}$$

とする. Φ による $\mathcal{O}(PG(k-1, \lambda))$ の線型写像:

$$\sigma: A \longrightarrow \Phi A \Phi' \quad (A \in \mathcal{O}(PG(k-1, \lambda)))$$

を考へる. $\Phi A_{\alpha} \Phi'$ は明らかに

$$(5.2) \quad \Phi A_{\alpha} \Phi' = \begin{cases} B_{\alpha} & ; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p} \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

である. (4.4) 式および (4.5) 式から

$$(5.3) \quad \Phi A_{\alpha}^{\#} \Phi' = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^p} B_{\alpha}^{\#} & ; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}') \text{ のとき} \\ \frac{\Delta-1}{\Delta^p} B_0^{\#} & ; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する.

係数 $\frac{1}{\Delta^p}$, $\frac{\Delta-1}{\Delta^p}$ を度外視して (5.3) 式を満たす, Φ によって定義される $\mathcal{O}(\text{PG}(k-1, \Delta))$ の線型写像 σ を 一部 (実施) 相似写像 (fractionally similar mapping) ということにする.

任意の $\alpha \in \overline{\text{PG}}(k-1, \Delta)$ に対して

$$\alpha = \xi \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}'), \alpha_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F'), \xi \in GF(\Delta))$$

として一意的に書き表わされるから, 簡単な計算で, $\alpha \neq 0$ のとき

$$(5.4) \quad \Phi A_{\alpha}^{\#} \Phi' = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^p} B_{\alpha_1}^{\#} & ; \xi \neq 0 \text{ のとき} \\ \frac{\Delta-1}{\Delta^p} B_0^{\#} & ; \xi = 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \alpha = \xi \alpha_1 + \alpha_2$$

であることがわかる. 以上のことより線型写像 τ :

$$(5.5) \quad \tau(A_{\alpha}^{\#}) = \begin{cases} \frac{\Delta^p}{\Delta-1} \sigma(A_{\alpha}^{\#}) & ; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \\ \Delta^p \sigma(A_{\alpha}^{\#}) & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すれば

$$(5.6) \quad \tau(A_{\alpha}^{\#}) = \begin{cases} B_{\alpha_1}^{\#} & ; \alpha = \xi \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}'), \alpha_2 \in \bar{\mathcal{P}}(F'), \xi \neq 0 \\ & \text{のとき} \\ B_0^{\#} & ; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}(F') \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する.

以上のことより次の定理を得る.

定理 II. (5.5) 式によって定義される $\mathcal{O}(PG(k-1, \lambda))$ から $\mathcal{O}(\lambda^{k-p} - F_r)$ への線型写像では (5.6) 式によって, $\mathcal{O}(PG(k-1, \lambda))$ の $\frac{\lambda^p - 1}{\lambda - 1} + 1$ 個の idempotents $A_{\alpha_2}^\#$; $\alpha_2 \in \bar{P}(F')$ が $\mathcal{O}(\lambda^{k-p} - F_r)$ の同一の idempotent $B_0^\#$ に対応し, λ^p 個の idempotents $A_{\xi\alpha_1 + \alpha_2}^\#$; $\alpha_1 \in \bar{P}(\hat{F}')$, α_1 個定, $\xi \neq 0$, $\alpha_2 \in \bar{P}(F')$, が $\mathcal{O}(\lambda^{k-p} - F_r)$ の同一の idempotent $B_{\alpha_1}^\#$ に対応する.

§6. Block design と Relationship algebra

λ^k 個の treatments $\phi(\underline{a})$, $\underline{a} \in EG(k, \lambda)$ のどの treatments を実施するかを指定するために用いた $GF(\lambda)$ 上の行列 $F(p \times k)$, および実施した treatments $\phi(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{F}_f^{k-p}$, をどのように blocks に配置するかの仕方を指定するために r 個の $GF(\lambda)$ 上の $l \times k$ 行列 B_i ; $i = 1, \dots, r$ を導入する. ここに F, B_i ; $i = 1, \dots, r$ は次の条件をみたすものとする.

$$(6.1) \quad r(F'; B_1'; \dots; B_r') = p + rl \leq k$$

$EG(k, \lambda)$ 上の $k - p - l$ 次元超平面:

$$(6.2) \quad \mathcal{B}_{i\underline{u}} = \{ \underline{x} \mid F\underline{x} = \underline{f}, B_i \underline{x} = \underline{u} \}, \quad \underline{u} \in EG(l, \lambda)$$

を考える. 明らかに $\mathcal{B}_{i\underline{u}}$ の点の個数 k は

$$k = \lambda^{k-p-l}$$

である.

$\mathcal{B}_{i\underline{u}} \ni \underline{x}$ に対応する treatments $\phi(\underline{x})$ によって block $\phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}})$

$$(6.3) \quad \phi(\mathcal{B}_{i\underline{u}}) = \{ \phi(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathcal{B}_{i\underline{u}} \}$$

を構成する.

このように $v = \lambda^{k-p}$ 個の *treatments* を $r\lambda^l$ 個の *blocks* $\phi(B_{iu})$, $i = 1, \dots, r$, $u \in EG(l, \lambda)$ に配置するときの *design* の *incidence matrix* を N で表わす. すなわち

$$(6.4) \quad N = \|n_{\underline{x}, i\underline{u}}\| \quad (\lambda^{k-p} \times r\lambda^l)$$

である. ここに

$$n_{\underline{x}, i\underline{u}} = \begin{cases} 1 & ; \underline{x} \in B_{i\underline{u}} \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. N は $v \times \theta$ 行列 ($v = \lambda^{k-p}$, $\theta = r\lambda^l$) であつて, *block* の大きさ, および反復数はそれぞれ $k = \lambda^{k-p-l}$, r であることがわかる.

いま $B_{i\underline{\alpha}} = 0$, $\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}$ をみたす i を $i = i_1, \dots, i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ とし, $i \neq i_1, \dots, i_{\lambda_{\underline{\alpha}}}$ に対しては $B_{i\underline{\alpha}} \neq 0$ とする. $\lambda_{\underline{\alpha}}$ は明らかに $\underline{\alpha}$ だけに関係する. すなわち互に $\underline{\alpha}$ -th *associate* である 2 つの *treatments* $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の会合数は $\lambda_{\underline{\alpha}}$ であることが容易にわかるが, 会合数 $\lambda_{\underline{\alpha}}$ は互に $\underline{\alpha}$ -th *associate* である *treatments* $\phi(\underline{x})$, $\phi(\underline{y})$ の選び方に無関係である. よつてこの *design* は λ^{k-p} -fractional factorial association scheme を有する PBIB design (Partially balanced incomplete block design) である. したがつて, 行列 N について次の関係式が成立する.

$$(6.5) \quad NN' = rB_0 + \sum_{\underline{\alpha} \in \mathcal{P}^{k-1-p}} \lambda_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\alpha}}$$

また $\mathcal{M}(\lambda^{k-p} - F_r)$ の互に直交する *idempotents* $B_{\underline{\alpha}}^{\#}$; $\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\widehat{F})$ を用いて

$$(6.6) \quad NN' = \sum_{\underline{\alpha} \in \overline{\mathcal{P}}(\widehat{F})} \mu_{\underline{\alpha}} B_{\underline{\alpha}}^{\#}$$

と表わされる。ここに

$$(6.7) \quad \begin{cases} \mu_0 = rR = r + (\Delta - 1) \sum_{\beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}} \lambda_\beta \\ \mu_\alpha = r + (\Delta - 1) \sum_{\substack{\beta: \alpha=0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_\beta - \sum_{\substack{\beta: \alpha \neq 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_\beta ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}') \end{cases} \text{ のとき}$$

である。 NN' が positive semi definite であることおよび (6.7) 式から既知の不等式:

$$(6.8) \quad 0 \leq \mu_\alpha \leq rR ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$$

が成立する。(6.7) 式よりまた

$$(6.9) \quad \mu_\alpha = \Delta \sum_{\substack{\beta: \alpha=0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_\beta - r \frac{R-\Delta}{\Delta-1} ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$$

と書くことができる。 $B_\alpha^\# ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$ に対応する treatment contrast の confounding coefficient c_α は

$$(6.10) \quad c_\alpha = \frac{1}{rR} \mu_\alpha ; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')$$

である[5].

$n (= rv = bR = r\Delta^{k-p})$ 個の plots に適当に番号をつけて次の incidence matrices を定義する.

$$(a) \text{ treatment : } \Phi_T = \|\varphi_{fx}^T\| (n \times v)$$

$$(b) \text{ block : } \Phi_B = \|\varphi_{fu}^B\| (n \times b)$$

ここに

$$\varphi_{fx}^T = \begin{cases} 1 ; \text{ plots } f \text{ に treatment } \phi(x) \text{ が施されるとき} \\ 0 ; \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_{f, iu}^B = \begin{cases} 1; & \text{plot } f \text{ が block } \phi(B_{iu}) \text{ に含まれるとき} \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. そのとき design の incidence matrix N について, $N = \Phi_T' \Phi_B$ が成立する. Treatments $\phi(x)$; $x \in \mathcal{F}_+^{k-p}$ の間に定義された association scheme の行列表現としての association matrices を導入したと同いように, plots の間の relationship の行列表現とみなされる relationship matrices を定義する[2].

(c) identity: I_n (d) universal: G_n (e) block: $V = \Phi_B \Phi_B' = \|b_{fg}\|$

(f) treatments: $T_\alpha = \Phi_T B_\alpha \Phi_T' = \|t_{fg}^\alpha\|$; $\alpha \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p}$

ここに

$$b_{fg} = \begin{cases} 1; & \text{plots } f \text{ と } g \text{ が同じ block に含まれるとき} \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t_{fg}^\alpha = \begin{cases} 1; & \text{plots } f \text{ と } g \text{ が互に } \alpha\text{-th associate である treatment を受} \\ & \text{けるとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である. Treatment relationship matrices T_α ; $\alpha \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ のかわりに $\mathcal{O}(\mathcal{A}^{k-p} - F_T)$ の互に直交する principal idempotents $B_\alpha^\#$; $\alpha \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$ に対応する matrices

$$(6.11) \quad T_\alpha^\# = \Phi_T B_\alpha^\# \Phi_T'; \quad \alpha \in \bar{\mathcal{P}}(\tilde{F}')$$

を定義すると便利である.

Relationship matrices I_n, G_n, V, T_α ; $\alpha \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p}$ を生成元とする実数体上の algebra:

$$\mathcal{R} = \{ I_n, G_n, V, T_\alpha; \alpha \in \bar{\mathcal{P}}^{k-1-p} \}$$

は我々の PBIB design の relationship algebra とよばれている [2].

$\mathcal{R}$ は対称行列によって生成される algebra であるから, Completely reducible である. したがって $\mathcal{R}$ は既約な両側 ideals の直和として表わされる. この既約成分の種類は NN' の固有値 μ_α の値に応じて 3通りの場合, すなわち $\mu_\alpha = 0$, $0 < \mu_\alpha < rk$, $\mu_\alpha = rk$ に分類されることは既知であるから結果のみを記すことにする [5].

Case 1. $\mu_\alpha = 0$ のときは $\frac{1}{r} T_\alpha^\#$ は $\mathcal{R}$ の 1次元の両側 ideal の principal idempotent で, $B_\alpha^\#$ に対応する treatment contrast は block に orthogonal である.

Case 2. $0 < \mu_\alpha < rk$ のときは $[T_\alpha^\#, VT_\alpha^\#, T_\alpha^\#V, VT_\alpha^\#V]$ は $\mathcal{R}$ の 4次元の両側 ideal であつて, Complete 2×2 matrix algebra に同型である. その principal idempotent は

$$(6.12) \quad E_\alpha^{(2)\#} = \frac{1}{rk - \mu_\alpha} (rk T_\alpha^\# - VT_\alpha^\# - T_\alpha^\#V + \frac{r}{\mu_\alpha} VT_\alpha^\#V)$$

である. またこのとき $B_\alpha^\#$ に対応する treatment contrast は block に partially Confounded であり, その confounding coefficient は C_α である. 更に block effect を消した $B_\alpha^\#$ に対応する treatment contrast を与える idempotent は

$$(6.13) \quad F_\alpha^\# = \frac{rk}{rk - \mu_\alpha} (I_n - \frac{1}{rk} V) T_\alpha^\# (I_n - \frac{1}{rk} V)$$

である. また treatments を無視した block contrast を与える idempotent は

$$(6.14) \quad H_\alpha^\# = \frac{1}{rk \mu_\alpha} V T_\alpha^\# V$$

である.

Case 3. $\mu_\alpha = rR$ のとき, $\frac{1}{r}T_\alpha^\#$ は R の 1 次元の両側 ideal の principal idempotent で $B_\alpha^\#$ に対応する treatment contrast は block に totally confounded である.

以上のことより我々は既約成分の分類をするために次の Lemma は有用である.

Lemma 4. $\mu_\alpha; \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F})$ について次の同値関係が成立する.

- (i) $\mu_\alpha = 0 \iff \alpha \notin \mathcal{P}(B_i); i = 1, 2, \dots, r$
- (ii) $0 < \mu_\alpha < rR \iff \alpha \in \mathcal{P}(B_i)$ とする B_i がある. 但し $r \geq 2$ のとき
- (iii) $\mu_\alpha = rR \iff \alpha \in \mathcal{P}(B_1)$, 但し, $r = 1$ のとき

したがって $r = 1$ の場合は partially confounded part が存在しない. また $r \geq 2$ の場合には totally confounded part が存在しないことがわかる. $k = p + rl$ のときは orthogonal part が存在しない. (ii) の場合はさらに $\mu_\alpha = R$ であることがわかる.

証明 (6.9) 式からわかるように $\sum_{\substack{\beta' \alpha = 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_\beta$ の値をしらべればよい. λ_β の定義から

$$(6.15) \quad (\lambda - 1) \sum_{\substack{\beta' \alpha = 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_\beta = \sum_{i=1}^r \sum_{u \in EG(l, \lambda)} n_{x, iu} \sum_{\substack{p \in GF(\lambda) \\ p \neq 0}} \sum_{\substack{\beta' \alpha = 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{x+p\beta, iu}$$

である. (6.15) 式の右辺において $n_{x, iu} = 1$ のところのみをしらべればよい. このとき $B_i x = u$ であるから

$$(6.16) \quad \sum_{\substack{\beta' \alpha = 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} n_{x+p\beta, iu} = \begin{cases} \frac{\lambda^{k-p-l}-1}{\lambda-1} & ; \alpha \in \mathcal{P}(B_i) \text{ のとき} \\ \frac{\lambda^{k-p-l-1}-1}{\lambda-1} & ; \alpha \notin \mathcal{P}(B_i) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する。したがって (6.15), (6.16) 式から

$$(6.17) \quad (\lambda-1) \sum_{\substack{\beta \geq 0 \\ \beta \in \mathcal{P}^{k-1-p}}} \lambda_{\beta} = \begin{cases} r(\lambda^{k-p-\ell-1}-1) ; \alpha \notin \mathcal{P}(B_i') : i=1, \dots, r \text{ のとき} \\ r(\lambda^{k-p-\ell-1}-1) + \lambda^{k-p-\ell-1}(\lambda-1) ; \alpha \in \mathcal{P}(B_i') \text{ となる } i \text{ があ} \\ \text{るとき} \end{cases}$$

であることがわかる。(6.9), (6.17) 式から Lemma 4. が成立することがわかる。

また Lemma 4. の (i) を使うことにより

$$\delta - \nu + \sum_{\substack{\alpha \notin \mathcal{P}(B_i'), i=1, \dots, r \\ \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')}} \gamma_{\alpha} = r-1 ; \quad r(B_{\alpha}^{\#}) = \gamma_{\alpha}$$

であるから, 一般化された Fisher の不等式

$$(6.18) \quad \delta \geq \nu - \sum_{\substack{\alpha \notin \mathcal{P}(B_i'), i=1, \dots, r \\ \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')}} \gamma_{\alpha}$$

が成立する。等号が成立するのは $r=1$ の場合に限る。

以上のことより relationship に対応する n の単位元 I_n の分解が次の様に一意的に表わされる [5].

$r=1$ の場合:

$$(6.19) \quad I_n = \frac{1}{n} G_n + \sum_{\substack{\alpha \notin \mathcal{P}(B_1') \\ \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')}} T_{\alpha}^{\#} + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(B_1')} T_{\alpha}^{\#}$$

である。

$r \geq 2$ の場合:

$$(6.20) \quad I_n = \frac{1}{n} G_n + E_B + E_e + \frac{1}{r} \sum_{\substack{\alpha \notin \mathcal{P}(B_i') \\ i=1, \dots, r, \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F}')}} T_{\alpha}^{\#} + \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(B_i')} E_{\alpha}^{\#(2)}$$

ここに

$$(6.21) \quad \begin{cases} E_B = \frac{1}{k} V - \frac{1}{n} G_n - \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(B'_i)} H_{\alpha}^{\#} \\ E_e = I_n - \frac{1}{k} V - \frac{1}{r} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P}(B'_i), i=1, \dots, r \\ \alpha \in \mathcal{P}(\tilde{F})}} T_{\alpha}^{\#} - \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(B'_i)} F_{\alpha}^{\#} \end{cases}$$

である. idempotents E_B および E_e の rank は

$$(6.22) \quad \begin{cases} r(E_B) = r-1 > 0 \\ r(E_e) = (r-1) \Delta^{k-p} - r \Delta^l + 1 > 0 \end{cases}$$

で与えられる. $E_{\alpha}^{\#(2)}$ の 1 次元への分解は一意的ではないが block に直交する部分と含まれる部分に

$$E_{\alpha}^{\#(2)} = F_{\alpha}^{\#} + H_{\alpha}^{\#} ; \alpha \in \mathcal{P}(B'_i), i=1, \dots, r \ (r \geq 2)$$

分解される.

§7. aliases pattern と pseudo-block idempotents

(3.1)式を規定する行列 F' の列ベクトルの生成する $\overline{PG}(k-1, \Delta)$ の $p-1$ 次元部分空間を便宜的に

$$(7.1) \quad \mathcal{P}_0(F') = \overline{\mathcal{P}}(F')$$

で表わすことにする. $\overline{PG}(k-1, \Delta) \ni \alpha, \beta$ に対して, もし $\alpha - \beta \in \mathcal{P}_0(F')$ のとき, α と β とは同値であるといつて, $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathcal{P}_0(F')}$ と書くことにする. 明らかにこの関係は同値律をみたす. $\overline{PG}(k-1, \Delta)$ をこの同値関係によって互に同値であるものからなる類:

$$(7.2) \quad \overline{PG}(k-1, \Delta) / \mathcal{P}_0(F') = \{ \mathcal{P}_{\alpha}(F') \mid \alpha \in \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{F}') \}$$

に分割する. ここに $\mathcal{P}_\alpha(F') = \{\beta \mid \beta \equiv \alpha \pmod{\mathcal{P}_0(F')}\}$ とする.

$\overline{PG}(k-1, \delta) \ni \alpha, \beta$ に対応する idempotents $A_\alpha^\#, A_\beta^\#$ が, もし $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathcal{P}_0(F')}$ であるとき, 互に別名 (alias) [1] であると定義する. この別名関係を $A_\alpha^\# \sim A_\beta^\# \ (\mathcal{P}_0(F'))$ で表わす. $\overline{PG}(k-1, \delta) \ni \alpha$ に対応する idempotents $A_\alpha^\#$ の全体の集合:

$$(7.3) \quad A^\#(\overline{PG}(k-1, \delta)) = \{A_\alpha^\# \mid \alpha \in \overline{PG}(k-1, \delta)\}$$

をこの別名関係にある idempotents よりなる類:

$$(7.4) \quad A^\#(\mathcal{P}_\beta(F')) = \{A_\alpha^\# \mid \alpha \in \mathcal{P}_\beta(F')\}; \beta \in \tilde{\mathcal{P}}(F')$$

に分割される. すなわち

$$(7.5) \quad A^\#(\overline{PG}(k-1, \delta)) = \bigcup_{\beta \in \tilde{\mathcal{P}}(F')} A^\#(\mathcal{P}_\beta(F'))$$

である. (7.5) 式を (3.1) 式によつて決定される $A^\#(\overline{PG}(k-1, \delta))$ の

aliases pattern ということにする.

定理 II から互に別名関係にある idempotents は (5.5) 式によつて定義される線型写像 τ によつて $\mathcal{O}(\delta^{k-1} - F_r)$ の同一の idempotent に対応する.

§6 で実施した treatments をどのように blocks に配置するかの仕方を指定するために用いた r 個の $\ell \times k$ 行列 $B_i; i=1, \dots, r$ に対して,

$\mathcal{P}(F'; B_i) \ni \alpha$ に対応する idempotents $A_\alpha^\#$ の集合:

$$(7.6) \quad A^\#(\mathcal{P}(F'; B_i)) = \{A_\alpha^\# \mid \alpha \in \mathcal{P}(F'; B_i)\}$$

の元を (6.3) 式で定義した blocks の族 $\phi(\mathcal{B}_{i_u}); u \in EG(\ell, \delta) (i: \text{固定})$ に付随した pseudo-block idempotents ということにする.

(5.6) 式から

$$T(A^*(\bar{\sigma}(F); B_i)) = \{ B_{\alpha}^* \mid \alpha \in \bar{\sigma}(B_i) \}$$

であることがわかる。§6. から $r=1$ の場合は, *pseudo-block idempotent* に対応する *treatments contrast* は *block* に *totally confounded* であり, $r \geq 2$ の場合は B_{α}^* に対応する *treatment contrast* を除いて *partially confounded* で, その *confounding coefficient* は $\frac{1}{r}$ であることがわかる。また *pseudo-block idempotent* ではない *idempotents* A_{α}^* に対応する *treatment contrast* は *block* に *orthogonal* である。

最後に, 広島大学理学部教授 山本 純恭 先生よりいただいた詳しい御批判にたいして深く感謝します。

参 考 文 献

- [1] Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (1961) The 2^{k-p} -fractional factorial designs. Part I and II, *Technometrics* Vol. 3, No. 3, 311-351. Vol. 3, No. 4, 449-458.
- [2] Ogawa, J. (1959) The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block design. *Inst. Statist. mimeo. Ser. 224* Chapel Hill, N.C.
- [3] Weyl, H. (1939) The classical groups their invariants and representations. Lond. Princeton Univ. Pres.
- [4] Yamamoto, S. (1964) Some aspects for the composition of relationship algebras of experimental designs. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I*, 28, 167-197.

- [5] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963) Analysis of partially balanced incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 27, 119-135.
- [6] Yamamoto, S., Fujii, Y. and Hamada, N. (1965) Composition of some series of association algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 29, 181-215.