

ASL (Algebras with straightening laws) 12

関する いくつかの結果.

石工大 渡辺 敬一

序

ASL の概念は不変式論にあらわれる "straightening formula" を公理化したもので, 不変式論に於ては, [2], [5] に見られるように, 「 G が半単純代数群, P はその極大 parabolic subgroup, X は G/P の Schubert subvariety, $\mathcal{L}$ は G/P 上の ample ^{inv.} sheaf とするとき, X の $|\mathcal{L}|$ による埋め込みの同次座標環 は Cohen-Macaulay, normal である」という事実の証明に寄与している。

一方では, ASL は 多項式環をいくつかの square-free な monomials から生成される ideal で割って得られるような環 (Stanley-Reisner 環と最近呼ばれる) の flat deformation となっている。flat deformation で Cohen-Macaulay, Gorenstein 等の性質が保存される事に注目した公理化も [3], [1] 等に見られる。

ここで筆者が扱いたいと思うのは ASL という公理の

下にどこまでの事が云えるかを見てみようというものである。
ある公理が与えられたとき、より簡単な場合からつめて、
その公理の意味を探ろうという方法は自然なものと思
うが、ここでは一番簡単な2次元整域の場合の構造決定およ
び3次元のいくつかの例などから、ASLの性質を探してみ
たい。現在の段階としてはASLというカテゴリーが市民権
を得るかどうかわからない状態だが、大雑把ながらも、
ある(関係式をたくさん持つ)環がある *partially ordered*
set という比較的構造の単純なものと結びついて表わされる
という事は何らかの意味があるのではないかと思う。

§1. 定義と簡単な性質の復習.

H を finite partially ordered set (以下 poset 略す), R
の環 (1 をもつ可換環), A を R -algebra とする。今, H が
 A の subset となるとき, H の元の積を monomial,
 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H$) が $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ をみたすとき,
この monomial が standard monomial であるという。

定義. A が ASL (algebra with straightening laws) on H
over R とは, 次の (ASL-1), (ASL-2) をみたす事である。

(ASL-1) A は R -free module で standard monomials を

free basis としなう。

(ASL-2). $\alpha, \beta \in H$, $\alpha + \beta$ ($\stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \neq \beta \text{ かつ } \beta \neq \alpha$) であるとき, $\alpha\beta$ は standard ではないから, standard monomials の和に一意的に表わされる筈である ((ASL-1) より.)

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^s r_i \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_{n_i}} \quad (\gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots \leq \gamma_{i_{n_i}}, r_i \in R. \quad (i=1, \dots, s))$$

をその表現とするとき, 各 i について, $\alpha \geq \gamma_{i_1}$, $\beta \geq \gamma_{i_1}$, $n_i \geq 1$.

(1.2). (i) $\alpha\beta$, $\alpha, \beta \geq \gamma$ なる $\gamma \in H$ が存在しないとき,

$$\alpha \cdot \beta = 0.$$

(ii) $I \subset H$ が ' $\alpha \in I, \beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \in I$ ' をみたすとき, 'poset ideal' という. A が ASL on H over R , $I \subset H$: poset ideal, (I) を I で生成される A の ideal とすると, $A/(I)$ は ASL on $H \setminus I$, over R となる. $\alpha \in H$ のとき,

$$I_\alpha = \{\beta \in H \mid \beta \neq \alpha\} \text{ とおくと,}$$

I_α は poset ideal. $H_\alpha = H \setminus I_\alpha = \{\beta \in H \mid \beta \geq \alpha\}$ とおくと $A/(I_\alpha)$ は poset H_α 上の ASL となる. 特に α が H の極大元であるとき, $H_\alpha = \{\alpha\}$, $A/(I_\alpha) \cong R[\alpha]$ (R 上の一変数多項式環).

の爲に.
 H_α は A の元を表す他に, A のある ideal (又は $\text{Spec}(A)$ のある closed subset) と対応しているという事実を注目したい.

(1.3) (いくつかの基本的性質) $R = k$: 体とする.

$$(i) \dim A = (H \text{ の max. chain の長さ}) + 1$$

(ii) A は常に reduced.

(iii) $k[H] = k[x_\alpha | \alpha \in H] / (x_\alpha x_\beta | \alpha + \beta)$ とおくと, $k[H]$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, locally complete intersection) ならば $\forall \alpha \in H$ を含む A の maximal ideal m について A_m も同じ性質をもつ. 特に, A が graded ring で H の各元が homogeneous で 1 の degree をもつとき, A は Cohen-Macaulay (resp. ...) である.

(iv) A が graded ring, H の各元の degree がすべて 1 のとき A の multiplicity $= \# \{ H \text{ の max. chain} \}$.

($\text{Proj}(A) = X \hookrightarrow \mathbb{P}^{|H|-1}$ とするとき, $\deg X = (A \text{ の multiplicity})$)

以下, A が graded ring で H の各元が homog., 1 の degree をもつ場合を考える. このとき単に「 A は graded ASL」であるという. 更に $\forall \alpha \in H$, $\deg \alpha = 1$ のとき「 A は homogeneous ASL」であるという事にしよう.

A が graded ASL のとき, A の Poincaré series を $P(A, t)$ で表わす. $P(A, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim A_n \cdot t^n$ は次のように表わされる.

$$P(A, t) = \sum_{\substack{\alpha_1 \neq \dots \neq \alpha_s \\ \alpha_i \in H, s \geq 0}} \frac{t^{\deg \alpha_1 + \dots + \deg \alpha_s}}{(1 - t^{\deg \alpha_1}) \dots (1 - t^{\deg \alpha_s})}$$

(左辺は空集合を含む H の相異なる chain を数く).

(1.4)

A が体 k 上の graded ring, $\dim A = d$, $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n = \mathfrak{m}$ とおくとき,

$$a(A) = \max \{ n \mid H_m^d(A)_n \neq 0 \}$$

と定めた。(詳しくは [6] 参照) この不変量 $a(A)$ について次の三つの事実を注意しておきたい。

(i) $\alpha \in A_d$, α は A の non-0-divisor のとき,

$$a(A/\alpha A) = a(A) + d.$$

A は有限生成 A' -加群で

(ii) A' が A の graded subring, A' -加群としての A/A' の次元 $< \dim A'$ のとき, $a(A') \geq a(A)$

(iii) A が Cohen-Macaulay のとき, $P(A, t) = \frac{f(t)}{g(t)}$,

$f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ とするとき, $a(A) = \deg(f(t)) - \deg(g(t))$.

特に A が ASL on H over k のとき, A が Cohen-Macaulay とすると,

(iv) $a(A) \leq 0$, $a(A) < 0 \Leftrightarrow \tilde{\chi}(H) = 0$ 但し,

$$\tilde{\chi}(H) = \sum_{s=-1}^{\infty} (-1)^s \cdot \#(H \text{ の長さ } s \text{ の chain}).$$

§ 2. 二次元 ASL domain

この節では A は graded ASL domain on H over k , k は代数閉体とする。 A は domain だから H は唯一つの minimal element α をもつ。このことから

$$H = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \quad \quad \quad \beta_n \\ \circ \quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \alpha \end{array} \right]$$

となる。二次元 graded ASL に関する主定理は、

定理 (2.1). (i) A は normal である。

(ii) A は rational singularity, $\text{Proj}(A) \cong \mathbb{P}_k^1$.

(iii) I_{β_i} の零点を $a_i \in \mathbb{P}^1$ とする (便宜上 $a_i \neq \infty$ にとる).

$n \geq 3$ のとき, $\deg \alpha = 1$ で, $\deg \beta_i = d_i$ とおくと, (ASL-2) は

$$\beta_i \beta_j = \frac{1}{a_i - a_j} (\beta_i \alpha^{d_j} - \beta_j \alpha^{d_i})$$

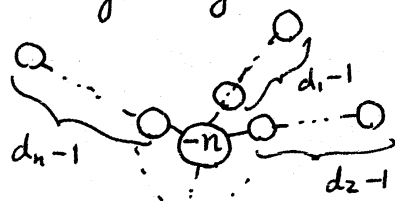
の形となる。

(注) normal が言えたとき, A を表わす方法は, Demazure による有理係数 divisor を用いるものと, resolution を与えるものがある。Demazure 流の A の表し方は

$$A = R(\mathbb{P}^1, D), \quad D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} (a_i) \quad (R(\mathbb{P}^1, D) \text{ の表し}$$

については, [7] 参照).

$\text{Spec}(A)$ の singularity の resolution の dual graph は,



(○ は self-intersection number
 $= -2$ の $\mathbb{P}^1$ を表わす.)

(証明). $n = 1$ のとき $A = k[\alpha, \beta_1]$, $n = 2$ のとき

$$\beta_1 \beta_2 = \alpha \cdot f(\alpha, \beta_1) + \alpha \cdot g(\alpha, \beta_2) \quad (\text{ASL-2}).$$

$\deg \beta_1 \leq \deg \beta_2$ とすると, g は β_2 に際して一次式. ゆえに,

$$\beta_1 \beta_2 = \alpha \cdot f(\alpha, \beta_1) + \beta_2 \cdot g(\alpha)$$

とおいてよい. $\beta'_1 = \beta_1 - g(\alpha)$ とおくと, $\beta'_1 \beta_2 = \alpha \cdot f'(\alpha, \beta'_1)$.

$F(x, y, z) = yz - x \cdot f(x, y)$ とおくと, F が既約なら,
 $f(x, 0) \neq 0$. このとき $(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ は (x, y, z) -primary
 ideal より, $k[x, y, z]/(F)$ は normal.

以下に於て $n \geq 3$ とする. まず $\deg \alpha = 1$ と仮定すると,
 $a(A) = -\deg(\alpha) < 0$ (1.4). $H_m^2(A)_0 \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ($X = \text{Proj}(A)$).
 $\therefore H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ X は irreducible, reduced, $\dim X = 1$ だから,
 $X \cong \mathbb{P}_k^1$ (ここ $k = \bar{k}$ を使う). A が normal を示すのに, 次の補
 題を使う.

補題. R が integral domain, $x \in R, x \neq 0$. $k \in R/xR$ が
 reduced $\Rightarrow R_x$ が normal ならば R は normal.

今, $A/\alpha A$ は ASL だから reduced. A_α が normal を示せば良
 いが, $\text{Spec}((A_\alpha)_0)$ は $X = \text{Proj}(A)$ の affine open set $D_+(\alpha)$ で, $X \cong \mathbb{P}^1$
 より normal. $\therefore A_\alpha = (A_\alpha)_0[\alpha, \alpha^{-1}]$ は normal.

A は normal graded ring だから $A = R(\mathbb{P}^1, D)$ の形で書ける.
 $\alpha \in A_1$ だから, D は α で決まる divisor としとる. $A/\alpha A$ は
 reduced. $\deg \beta_j = d_j$ とおくと, $V_+(I_{\beta_j}) = a_j$ とするとき,

$$D = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j} \cdot (a_j). \quad \therefore A = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n, \quad k(X) = k(x) \text{ とす}$$

$$\text{ると, } A = k[T, \frac{1}{x-a_1} \cdot T^{d_1}, \dots, \frac{1}{x-a_n} \cdot T^{d_n}]. \quad (\alpha = T, \beta_j = \frac{1}{x-a_j} \cdot T^{d_j}).$$

$\beta_i \beta_j = \frac{1}{a_i - a_j} (\beta_i \alpha^{d_j} - \beta_j \alpha^{d_i})$ を $k = L$, (ASL-1) は部分分数展
 開の一貫性から示される.

従って定理を証明するには, $n \geq 3$, $\deg \alpha \geq 2$ として矛盾を出せば良い。

$\bar{A}$ を A の正規化とする。 $\bar{A}$ は $\mathbb{R}$ 上の graded ring である。

$$0 \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{A}/A \rightarrow 0$$

の local cohomology long exact sequence をかくと,

$$H_m^2(A) \rightarrow H_m^2(\bar{A}) \rightarrow 0 = H_m^2(\bar{A}/A).$$

ゆえに, $a(\bar{A}) \leq a(A) = -\deg \alpha \leq -2$. $a(\bar{A}) \leq -2$ なる $\bar{A}$ を分類して見よう。 Demazure の記法により, ([7] 参照).

$$\bar{A} = R(X, D), \quad X = \mathbb{P}^1, \quad D = s \cdot (P) + \sum_{i=1}^r \frac{p_i}{q_i} \cdot (P_i)$$

とかく。但し $P_1, \dots, P_r$ は $\mathbb{P}^1$ の相異なる点, $(P), (P_i)$ は対応する

divisor, $s \in \mathbb{Z}$, $0 < p_i < q_i$ ($i=1, \dots, r$), $\deg D = s + \sum_{i=1}^r \frac{p_i}{q_i} > 0$

とする。 [7] により, $K_{\bar{A}}$ は次で与えられる。

$$K_{\bar{A}} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}(K_X + \sum_{i=1}^r \frac{q_i-1}{q_i} (P_i) + nD)): T^n$$

$a(\bar{A}) \leq -2$ より $(K_{\bar{A}})_n = 0$ ($n \leq 1$) である。 $n=1, -1$ に注目すると,

$$\deg(K_X + L \sum_{i=1}^r \frac{q_i-1}{q_i} (P_i) + D) = -2 + s + r \leq -1$$

$$\deg(K_X + L \sum_{i=1}^r \frac{q_i-1}{q_i} (P_i) - D) = -2 - s \leq -1$$

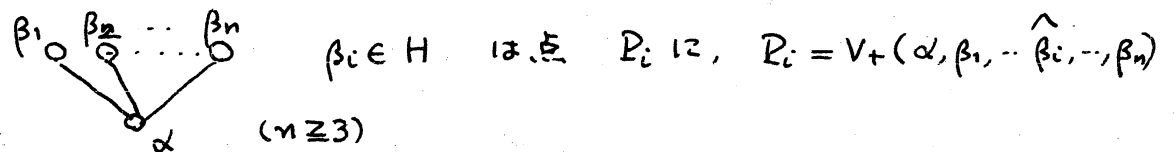
を得る。これと $\deg D > 0$ である事より, r, s のとり得る値は次のいずれかに限られる。

$$(a) \quad r=2, \quad s=-1$$

$$(b) \quad r=1, \quad s=0$$

(c) $x=0, S=1$ (このとき A は二変数多項式環).

点 P_i はどこにとっても環としては同型だから, (a) の場合 $D = \frac{P_1}{q_1}(\infty) + \frac{P_2 - q_2}{q_2}(0)$, (b) のとき, $D = \frac{P}{q}(\infty)$, (c) のとき $D = (\infty)$ とおいてよい。いずれの場合も, $k(X) = k(x)$ において, $R(X, D) = \bar{A} \subset k[x, T]$ である。さて, poset H に関して,



として対応していた。ゆえに, $\alpha^a / (\beta_i)^b$ が degree 0 になるような a, b をとると ($a, b > 0$), $\alpha^a / (\beta_i)^b$ は P_i で零である。従って

(i) α^a が $(\beta_i)^b$ より高位の零因子を P_i でもつ か又は

(ii) $(\beta_i)^b$ が α^a より高位の極を P_i に於てもつ

かいずれかの事である。上の場合で, まず (c) の場合を考察しよう。

Case (c) $x=0, S=1$; $D=(\infty)$ のとき $\bar{A} = k[T, xT]$.

$a(\bar{A}) = -2 \leq a(A) = -\deg(\alpha)$, $\deg \alpha > 1$ としたから, $\deg \alpha = 2$.

β_i に関して上の (i), (ii) の条件を考えよう。 $P_i \neq \infty$ のとき, $A \subset \bar{A} \subset k[T, xT]$ だから, α, β_i は P_i で正則。ゆえに α は P_i で 0 にならなければいけない。ところが, $\alpha \in H^0(X, \mathcal{O}(2D))$ で, $H^0(X, \mathcal{O}(2D))$ の元は x の二次式だから, 高々 2 つの零因子しかもたない。また, $\beta_i = \infty$ で (ii) が起るためには, α は x の一次以下の式でなければならず, すると α は高々一つの零因子しか

ない。ゆえに $\bar{A}$ の graded subring A が grade を保たない。また
 poset $H = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \\ \alpha \end{array} \right] \quad (n \geq 3)$ 上の ASL になる事は不
 可能である。

Case (a), (b) の場合は次の事実に注意しよう。

補題. $m \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq -a(\bar{A})$ とする。

(i) $D = \frac{P}{q}(\infty)$ のとき, $\dim \bar{A}_m \leq 2$.

(ii) $D = \frac{P_1}{q_1}(\infty) + (-1 + \frac{P_2}{q_2})(0)$ のとき, $\dim \bar{A}_m \leq 1$.

この補題が言えるとき, $m = \deg \alpha = -a(A)$ とおくと,

$0 < m \leq -a(\bar{A})$ で, $\alpha \in A_m \subset \bar{A}_m$. $H^0(X, \mathcal{O}(mD))$ の basis は

(i) の場合 $\{1\}$ 又は $\{1, \alpha\}$, (ii) の場合 $\{\alpha^2\}$ の形だから,

$n \geq 3$ のとき, 相異なる $P_1, \dots, P_n \in X$ に対して前頁の (i)
 又は (ii) が成立する事は不可能である。

(補題の証明) (i) の場合, $-a(\bar{A})$ は $\deg L(l \cdot \frac{P}{q} + \frac{q-1}{q})(\infty) \geq 2$
 なる最小の l で, 即ち, $l \cdot \frac{P}{q} > 1$ なる最小の l である。この
 l に対して, $l \cdot \frac{P}{q} < 2$ はあきらかだから, $\deg L(lD) = 1$.

$0 < l' < l$ なる l' について当然, $\deg L(l'D) \leq 1$ だから,

$$\dim \bar{A}_m = \dim H^0(X, \mathcal{O}(mD)) = \deg L(mD) + 1 \leq 2.$$

(ii) の場合 $\deg L(mD + \frac{q_1-1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2-1}{q_2}(0))$ と $\deg L(mD)$ を比較すると,

$$\deg L(mD + \frac{q_1-1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2-1}{q_2}(0)) = \begin{cases} \deg L(mD) & (q_1|m, q_2|m) \text{ ①} \\ \deg L(mD) + 1 & (q_1|m, q_2 \nmid m \text{ 又は } q_1 \nmid m, q_2|m) \text{ ②} \\ \deg L(mD) + 2 & (q_1 \nmid m, q_2 \nmid m) \text{ ③} \end{cases}$$

$m = -a(\bar{A})$ が上の ③ の場合で, $0 < m < -a(\bar{A})$ なる m が上の ③ または ④ の場合に該当するのは容易にわかる。ゆえに $m = -a(\bar{A})$ のとき, $\deg L^m D = \deg L^m D + \frac{q_1-1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2-1}{q_2}(0) - 2 = 2 - 2 = 0$, $0 < m < -a(\bar{A})$ のとき, $\deg L^m D \leq \deg L^m D + \frac{q_1-1}{q_1}(\infty) + \frac{q_2-1}{q_2}(0) - 1 \leq 2 - 1 = 1$ したがって, $\deg L^m D \leq 0$. ゆえに $\dim H^0(X, \mathcal{O}(mD)) = \dim \bar{A}_m \leq 1$.

これで補題の証明が終り, 従って定理 (2.1) の証明を終った。「た、たこれだけの事を証明するのにこんなにいるいる道具を使う必要があるのか?」という気が大いにあるが、一応 ASL の公理だけから、自明でない結果が得られて、これからの発展に希望を与えていると思う。

§3. 3次元の ASL domain.

まだ試行段階なので, A は体 R 上の 3次元 ASL-domain,
 $\forall \alpha \in H, \deg \alpha = 1$ の場合を考えよう.

次の補題により, 3次元 ASL-domain を作る問題は, 2次元の (domain とは限らない) ASL に帰着される.

補題 (3.1). A は R 上の graded algebra, poset H が A の subset, H の各元は正の次数の同次元, $A_0 = R, A = R[H]$ とする。 H の minimal elements を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。この時
 (i) ($n=1$) $A/(\alpha_1)$ が $H \setminus \{\alpha_1\}$ 上の ASL で, α_1 は A で non-

0-divisor なら A は ASL on H .

(ii) ($n \geq 2$) もし A が 次の ①, ②, ③ 又は ①, ② をみたせば A は H 上の ASL である. (I_{α_i} は (1.2) 参照.)

① $A/(I_{\alpha_i})$ は $H \setminus I_{\alpha_i}$ 上の ASL である ($i=1, \dots, n$).

② $\alpha_i \alpha_j = 0$ ($i \neq j$)

③ $\bigcap_{i=1}^n (I_{\alpha_i}) = (0)$

② A は (ASL-2) をみたす.

(3.2).

例. $\forall d \geq 1, A = (\mathbb{K}[X, Y, Z])^{(d)}$ は ASL で表わされる.

(解説) A の degree 1 の $\bar{\alpha}$ をとると, $\text{Proj}(A) = \mathbb{P}^2$,

$\text{Proj}(A/(\alpha)) = D$ は $\mathbb{P}^2$ 上の degree d の curve. 今, $D = l_1 + \dots + l_d$.

$l_1, \dots, l_d$ は一般の位置にある lines とする. l_i の座標環は

$D, l_i = d$ ならば,  の形の ASL として表わされる.

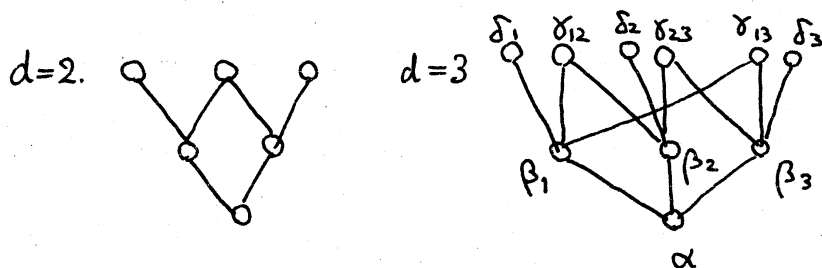
今 poset $H = \{\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}, \delta_i \mid i=1, \dots, d, 1 \leq i < j \leq d\}$; 順序関係は

α が最小元, $\beta_i, \beta_j \leq \gamma_{ij}$, $\beta_i \leq \delta_i$ なるようにする. (

$\text{Proj}(A/(I_{\beta_i})) = l_i$, $\text{Proj}(A/(I_{\gamma_{ij}}))$ は l_i と l_j の交点, $\text{Proj}(A/(I_{\delta_i}))$ は

l_i 上の他の l_j の上にはない点となる。) (2.1) と上の補題 (3.1) から

A が ASL である事を証明できる. H の形は次のようである,



(3.3) D が $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の ample divisor のとき, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $|D|$ による埋め込みの座標環は ASL で表わされる。

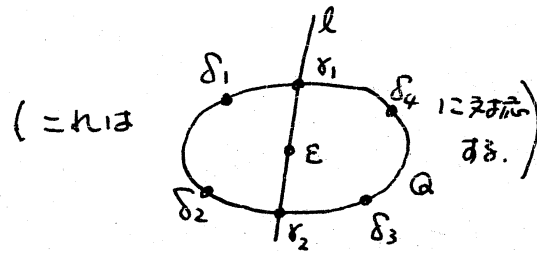
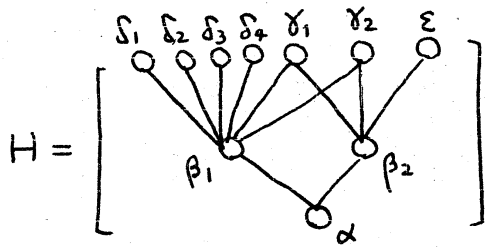
(証明) このような環は $\theta(D) \cong \mathcal{O}(a, b)$ のとき, $(k[x, y])^{(a)} \# (k[u, v])^{(b)}$ の形で表わされるので, (2.1) により次を示せば十分。

補題 (3.4). A_1, A_2 は k 上の graded ring で H_1, H_2 上の ASL であるとする。各 H_1, H_2 の元の degree がすべて 1 のとき, Segre product $A_1 \# A_2 = \bigoplus_{n \geq 0} (A_1)_n \otimes_k (A_2)_n$ は $H_1 \times H_2$ 上の ASL である。但し, $H_1 \times H_2$ に於て, $(\alpha_1, \alpha_2) \geq (\beta_1, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \beta_1, \alpha_2 \geq \beta_2$ とする。

(証明は容易なので省略する。)

例 (3.5). X は non-singular projective surface over $k = \bar{k}$, $-K_X$ が ample (K_X : X 上の canonical divisor), $K_X \cdot K_X = d \geq 4$ とする (即ち, X は degree d の Del Pezzo surface), このとき X の $-K_X$ による $\mathbb{P}^{1-K_X}$ への埋め込みの同次座標環は ASL である。

(証明) X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ か、又は $\mathbb{P}^2$ の $(9-d)$ 個の点に blow-up して得られる。([6], (5.1.13)参照) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は (3.4) で言えてゐるし, $\mathbb{P}^2$ の場合も (3.2) で言えてゐる。但し, $X = \mathbb{P}^2$ のとき $|-K_X|$ の元として $l_1 + l_2 + l_3$ の形の元の他に, $Q + l$ (Q は二次曲線) とする事を考えられる。この場合 H は



で与えられる。点を blow-up すると座標環は subring で与えられる。例えば, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ を blow-up して得られた X' の $1-K_{X'}$ による同次座標環は $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon$ で生成される

subring で, $H = \left[\begin{array}{c} \delta_1 \quad \gamma_2 \quad \varepsilon \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \beta_1 \quad \beta_2 \\ \circ \quad \circ \\ \alpha \end{array} \right]$ 上の ASL となる。
([6], (5.1.13) 参照).

今まで得られた ASL の例はすべて rational であるので, ASL domain ($\mathbb{k}$ 上の) はすべて rational か? という予想を立ててもそう不自然ではないと思う。 $\dim A \leq 3$ のときは次が主張できる。

($\dim A \leq 3$)

定理 (3.6). A が $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ 上の ASL-domain on H , H の各元の degree は 1 とする。このとき, もし $\text{Proj}(A)$ が Gorenstein variety であれば, A は $\mathbb{k}$ 上 rational である。

(証明). $\dim A = 2$ のときは (2.1) でわかっているから, $\dim A = 3$ とする。 A の Poincaré series を計算して, Riemann-Roch の定理と照し合わせると, $\omega_X \cdot D < 0$ である事が, 次の補題より得られる (但し, $D = \text{Proj}(A/\alpha)$, α は H の最小元)。曲面の分類論より, このとき X は ruled である。しかし D は

ample divisor であり ASL であらわせるから, D の各既約成分は smooth rational curve. 従って X は rational., ゆえに A も rational である.

補題. (3.6) の仮定の下に, γ を H の高さ 3 の元とする.
このとき $\#\{\beta \mid \beta \in H, \beta \text{ は高さ } 2, \beta \leq \gamma\} \leq 2$.

($\because$) P を γ に対応する X の点, $\beta_1, \dots, \beta_n \leq \gamma$ とすると,
 $(\mathcal{O}_{X,P}/\alpha \cdot \mathcal{O}_{X,P})^\wedge \cong k[[\beta_1, \dots, \beta_n]]/(\beta_i \beta_j \mid i \neq j)$ であることが
 (ASL-2) より容易にわかる. $n \geq 3$ のとき $\mathcal{O}_{X,P}$ は Gorenstein である.
 と Riemann-Roch
 [Poincaré series _{α} より $\omega_X \cdot D = -2(a+b) + d$, 但し, $d = D^2 =$
 A の multiplicity, a, b はそれぞれ H の高さ 2, 3 の元の個数,
 上の補題より $2b \geq d$ がわかる.]

結びに余り根拠のない予想を列挙しよう。基礎環は体とす。

1. ASL-domain は normal か?
2. ASL domain は Cohen-Macaulay 環か?
3. ASL domain は rational singularity か?
4. ASL domain は rational か?

どの問に対しても反例はまだ存在しないと思うのだが。

REFERENCES.

- [1] K. Baclawski; Rings with Lexicographic Straightening Law,
 Adv. in Math. 39 (1981), 185-213.

- [2] C. DeConcini and V. Lakshmibai; Arithmetic Cohen-Macaulayness and arithmetic normality for Schubert varieties, Amer. J. Math. 103 (1981), 835-850.
- [3] C. DeConcini, D. Eisenbud and C. Procesi; Hodge Algebras (preprint).
- [4] D. Eisenbud; Introduction to Algebras with Straightening Laws, in Ring Theory and Algebra, III, 243-268, Dekker, 1980.
- [5] C.S.Seshadri, V.Lakshmibai, C.Musili; Geometry of G/P, I, II, III, IV, in "C.P.Ramanujam-A Tribute", 207-239, Proc. Ind. Acad. Sc. 87 (1978), 1-54, 55-177, *ibid.* 88 (1979), 279-362.
- [6] S. Goto and K. Watanabe; On Graded Rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.
- [7] K. Watanabe; Some Remarks Concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.