

立体パズルと電子計算機

京都大学数理解析研究所 一松 信

京都府立医大, 数学教室 桑垣 煥

0. はじめに

電子計算機による長時間探索を要する一つの例として, 遊戯的な話題ではあるが, 立体パズルの全数探索がある.

Bouwkamp が, 立体ペンタミノ (平面型ペンタキューブ) 12 種により, $3 \times 4 \times 5$ の直方体をつめるしかたが, 3940 通りであることをたしかめたのは, つい最近であり, 数百時間の計算を要したらしい ([1] 参照).

3次元空間できれいな充填形は, 立方体以外にあまりなく, 多面体にすると, かえっておき方を制約するので, むしろ球を並べた形で充填形を作ってみるほうが可能性が高い.

この報告は, 桑垣によるホリボールの案と, 一松が小型版のトリボールを計算機でためた報告である. ひまつぶきテトラボールを計算機でためすことを計画中であるが, 諸般の事情によってその作業が中断しているので, 不完全な中間

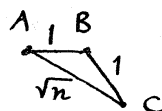
報告であるが、いままでの結果を記すことにする。

1. ポリボールの案

1971年秋頃から桑垣は、球による立体パズルの可能性を考えていたが、1972年正月に、西ドイツ製の Kugeli という組立ておもちゃを利用して、4個の球を平面的に連結した片11種を作り、それらを組み合わせて、1辺が4の正八面体状に積み上げることに成功した。

このような合同な球を何個か連結してできる図形を、ポリボール (polyball) とよぶことにしよう (研究集会の席で提案して、出席のオレの賛同をえた)。2個の組合せは1種であるが、それ以上のものについては、平面状に並べ、しかも隣り合う同士の角度を 90° か、または $60^\circ, 120^\circ$ とする。

したがって3個の組合せは、下記の4種となる。



これはちょうど $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = 1$ とするとき、 $\overline{AC} = \sqrt{n}$

($n=1, 2, 3, 4$) とした形に相当する。4個以上でも同様に平面上のポリオミノ型か、ポリフックス型の配列のもののみを採用する。したがってその種類は、(n -オミ) - の数) + (n -フックスの数) - 1 となる。-1は、直線上のもの

が両者に共通だからである。したがって

2個	ダイボール (Di-ball)	1 種
3個	トリボール (Tri-ball)	4 種
4個	テトラボール (Tetra-ball)	11 種
5個	ペンタボール (Penta-ball)	33 種

というようになる。

2. ポリボールによる立体パズル

ポリボールによって立体詰め合わせパズルでできる立体のうち、比較的簡単に美しくすぐに考えられるものとしては、下記のようなものがある。

正四面体, 正八面体, 正六面体, 正三角六面体

このうちはじめの3種は、面心立方格子の一部であり、最後のものは、六方最密格子の一部である。

具体的には、同一種、または n -ボールと $(n-1)$ -ボールの組合せで作ってみるほうがよい。球の個数があり、できる可能性のあるものは、下記のようなものがある。

1. ダイボール + トリボール 一辺3の正六面体

と正三角六面体 (前者は後述) : 球 14個

2. テトラボールによる一辺4の正八面体 : 球 44個

3. トリボール + テトラボール による 一辺 6 の 正四面

体 : 球 56 個

4. ペンタボール による 一辺 9 の 正四面体 : 球 165 個

5. トリボール + テトラボール による 一辺 5 の 正八面

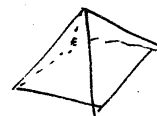
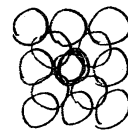
に 1 個余った球を最上につけた形 : 球 $55 + 1$ 個

これらはじつさに、すべて作ることができた。4 がもつとも難しく、やっと 1972 年 4 月上旬に、はじめて 1 個作りあげることができた ([4])。そのほか 1 については [2], 他は [3], [4] にいくつか発表してある。

上記のもののうち、パズルとしててごろなのは、2 であろう。これまで桑垣は手で、鏡像になるものを除いて、200 種以上作成してある。1 は小型すぎるが、解の総数が意外に多いのかおもしろい。

3. 月見パズル

1 の形で、一辺 3 の正四面体状につむパズルは、でき上がりが月見だんごのようなので、一松は「月見パズル」と命名した。一松は、小学生用の教材で、色のついた球 (木製) をみつけ、これを針金や接着剤でつないで、ダイボールとトリボールを作ってみた。

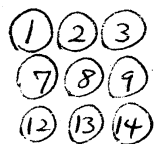


その後、これを電子計算機でしらべて、解の総数が144種であることを求めた。そのうち、棒状のものが水平に底面の一辺にくるものが100種、これが斜めにおかれるものが44種である。——底面の中央におくと解がない。これは「L」型のものをどこにおいても、強りが切れてしまうことからわかるが、計算機でたしかめてもみた。——

ただし上記の解の数は、互いに鏡像になるものをも、別々に数えているので、実際的にはこの半分の72種である。

どの片をも頂点におくことが可能であり、とくに「L」型のものは「<」型と「^」型と両方のおき方ができる。なおまだ完全にはたしかめていないが、ほとんどすべての解は互いに同類解のようで、対稱図形のおきかえをすると、一つの解から次々に数多くの別の解が生成される(「1」参照)。

このパズルに対してとった方針は、「1」にのべたものと異なつて、つぎのような考え方であった。正方錐の各球の位置に番号をつける。便宜上図のようにしたが、これは結果



⑥

の印刷の都合である。こ

れに1~5の片をはめる

ということは、1~14



1



2



3



4



5

かゝる集合

を、それぞれ

3, 3, 3, 3, 2 個の要素からなる集合の直和に分解し、おのづかの集合の要素の表わす点の位置が、1~5の片とあえばよい。1~5の片は、隣り同志の球の中心の距離を1とすると、互い同志の距離が(片5のダイボールを除いて)

$$1, 1, 2 \quad ; \quad 1, 1, \sqrt{3}, \quad 1, 1, \sqrt{2} \quad ; \quad 1, 1, 1$$

という関係にある。すなわち、各球の中心の距離の2乗は、すべて整数で、その形にしておくと

$$1, 1, 4 \quad ; \quad 1, 1, 3 \quad ; \quad 1, 1, 2 \quad ; \quad 1, 1, 1$$

となる、これにしろければよい。

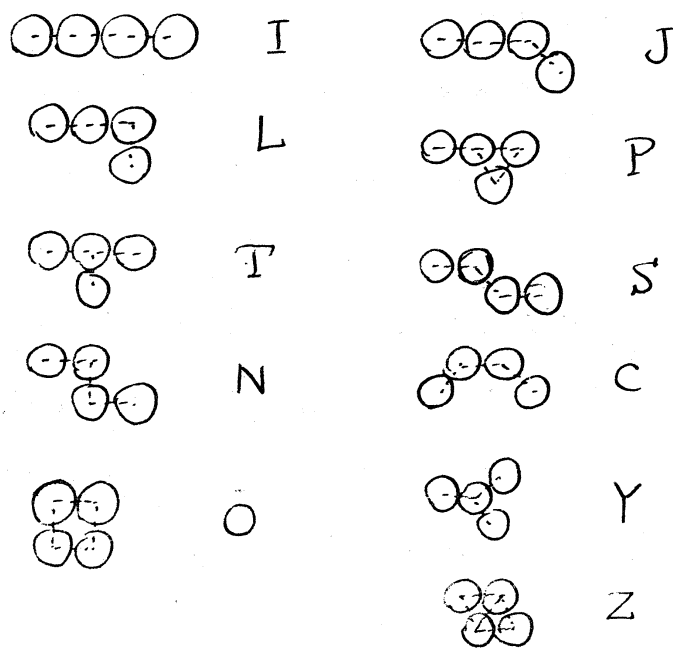
じつさいには回転対称性を定めるために、片1(棒状)をおく位置を定め、片2, 3 のおける可能性をすべてあらかじめしらべ、その組合せを定めて(球が重複するものは除く)、のこりに4がはめられるか、そのときのこった2個が隣り同志か、としらべ、全部おければ、解を印刷し、片4, 5を除いて他の可能性をしらべる、といった形をとった。調査は意外に早く、研究所の TOSBAC-3400 で (FORTRAN によるプログラムで) 数分で完了した。

このパズルは、小学生でも十分にできるし、根気よくいろいろな解やその変形をしらべてゆくと、立体パズルのよい訓練になりそうである。ただし少し小型すぎる。

4. テトラボール

テトラボールについては、同じような手法で、一松が計算機による検査をはじめたが、現在までのところ、まだ予備的における位置を作りだしたり、回転操作を行なうサブルーチンを用意した段階で、本格的な解の探索にはいつていない。以下の例は、すやと桑垣が手で作ったものである。

結果を記述するために、テトラボールの各片に、つぎのようなアルファベットの名をつけることにする：



(テトロミノー系)

(テトラクス系)

回転による変換を標準化するため、Iを中央の正方形の最下におき、そこにおかれた片名を、断面を並べて表わす。

そして、分類は、Iを含む正方形上にある2頂点(を記した片の名)、Iを含む正方形の他の2頂点(を記した片の名)を、それぞれアルファベット順に4つのローマ字で書く。Iはすでに使われ、Yは頂点をしめるようにはおけないが、他の9片はいずれも頂点におくことができるから、大分類上でははじめの2個の文字としては、I, Y以外の9個のうちから2個とった組合せ $9C_2 = 36$ 通りの可能性があるが、じつさいに、この36種は、すべて可能である。計算機で探索すると至には、数をへらすために、この36種の一つ一つについてしらべてゆくのが適当と思われる。

以下に [3], [4] に示した形以外で、興味ある解の例を示そう。

例1. 分類 CO-JS. これはテトロミノー系の4個が3方向、テトラックス系の6個が4方向の可能な平面上にあり、もつとも「立体的」なものである。

		J Y N S		
	T Y Y	J T N N	T S S	
c	Y C	Z Z L N	Z O L	S O
	J L	I I I I	P P P	O P O
	Z L C			

例2 分類 JP-LS. O が中央の正方形の中央にあるものである。

			L L L S		
	ZZ	YZZ	L O O S	C T C	
J	YJ	YNN	Y O O J	T T S	CC PP P
		NNJ	I I I I	P T S	

これはテトロミノー系の4個が、すべて同一方向の平面上にのっているから、わりあいには作りやすい形である。なお中央のLとOとの部分は対称形であるから、
 O O L
 O O L
 L L
 といれかえて、JP-OSの形にもできる。

このパズルの解の総数は、立体ヤントミノーの $3 \times 4 \times 5$ の場合に匹敵するのではないかと予想される。

5. むすび

以上は、むしろ手で解いたものが主であり、計算機による探索は不十分であるが、本式に解の総数を探索するとすれば、長時間のjobとして、background jobの形で進めてゆく必要があると思うので、この集会で報告させていただいた。

この稿は、予稿を全部書き通した。3節以外は、桑垣の執筆した原稿を、一松が整理したものである。

参考文献

- [1] 一松 信, 計算機によるプロパズル,
計算機によるゲームとパズルをめぐる諸問題, 研究
集会報告集, 数理解析研究所講究録 98 (1970),
p. 3-11.
- [2] 一松 信, ミニ立体パズル, bit, 1972年7月号.
- [3] 桑垣 煥, テトラボールの正8面体, 現代数学,
1972年7月号
- [4] 桑垣 煥, 新立体パズル・ポリボール, 数学
セミナー, (表紙にも説明と図), 数学セミナー,
1972年7月号.