

Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone

京大理 野村 隆 昭 (Takaaki NOMURA)

よく知られた例から始めよう. [8], [12] 参照. 実 $r \times r$ 対称行列のなすベクトル空間を $\text{Sym}(r, \mathbf{R})$ で表す. $\text{Sym}(r, \mathbf{R})$ は自然な内積 $\langle x, y \rangle := \text{tr}(xy)$ を持つ. 正定値なもの全体から成る $\text{Sym}(r, \mathbf{R})$ の部分集合を Ω とする. Ω は $\text{Sym}(r, \mathbf{R})$ の開凸錐で, しかも内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して自己双対である. すなわち,

$$\Omega = \{ y \in \text{Sym}(r, \mathbf{R}); \langle x, y \rangle > 0 \text{ for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \}$$

($\overline{\Omega}$ は Ω の閉包) が成り立つ. 線型 Lie 群 $GL(r, \mathbf{R})$ は $\text{Sym}(r, \mathbf{R})$ に $x \mapsto g x^t g$ により作用していて, Ω はこの作用による単位行列 $e \in \Omega$ の $GL(r, \mathbf{R})$ -軌道になっている. Ω 上の微分作用素で, $GL(r, \mathbf{R})$ の作用と可換なものの全体を $\mathbf{D}(\Omega)^{GL(r, \mathbf{R})}$ とする. このとき, r 個の微分作用素

$$\text{tr} \left(\left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)^j \right) \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

は $\mathbf{D}(\Omega)^{GL(r, \mathbf{R})}$ の代数的に独立な生成元になっている.

本稿では, この結果を任意の自己双対な開凸錐 (以下対称錐と呼ぶ) に, その分類を用いずしかも explicit な形で, 一般化する. そのために, 1950 年代の終わりに, Koecher [7] や Vinberg [13] によって発見された事実 — 任意の対称錐はある種の Jordan 代数によって記述される — を用いる.

§1. Jordan 代数

Jordan 代数の定義から始めよう. 証明は [1], [3], [5], [6], [11] 等を見られたい. 実ベクトル空間 V に次の (1), (2) をみたす双線型写像 (すなわち, 積) $V \times V \ni (x, y) \mapsto xy \in V$ が定義されているとき, V を 実 Jordan 代数 という: $\forall x, y \in V$ に対して,

- (1) $xy = yx$,
- (2) $x^2(xy) = x(x^2y)$.

ここでは, 結合律は仮定されていないことに注意. 各 $x \in V$ に対して, 作用素 $L(x)$ を

$$L(x)y = xy \quad (y \in V)$$

で定義する. 2つの作用素 A, B に対して, $[A, B] = AB - BA$ とおくと, (2) は作用素の等式として

$$[L(x), L(x^2)] = 0$$

と書き直せることに注意しておく.

さて, Jordan 代数 V は非結合的代数であるが, べきに関しては指数法則が成り立っている (この意味で, Jordan 代数は power associative algebra になっている). そして, V 上の i 次の斉次多項式函数 σ_i ($1 \leq i \leq d$) が存在して

$$m_x(\lambda) = \lambda^d - \sigma_1(x)\lambda^{d-1} + \sigma_2(x)\lambda^{d-2} + \cdots + (-1)^d \sigma_d(x)$$

が, V のある Zariski-dense な開集合に属する $\forall x$ に対して, x の最小多項式になること, 及び $m_x(\lambda)$ の既約成分は, x の最小多項式の 1 つの因数になっていることが知られている [5]. 多項式 $m_x(\lambda)$ は $x \in V$ の一般最小多項式と呼ばれ, d を V の degree という. 以下では,

$$T(x) = \sigma_1(x)$$

において, 線型形式 T を V の trace と呼ぶことにする.

実 Jordan 代数 V において,

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{ならば} \quad x = y = 0$$

が成り立つとき, V は 形式的実 であるという. 形式的実 Jordan 代数は必ず単位元 e を持つ. 以下, Jordan 代数 V は形式的実であるとする. V の 0 でないべき等元の系 $e_1, e_2, \dots, e_k$ が 直交系 であるとは, $i \neq j$ ならば $e_i e_j = 0$ が成り立つことであり, それが 完全 であるとは, $e_1 + \cdots + e_k = e$ (単位元) となることである.

命題 1.1 (スペクトル分解). V の各元 x に対して, 0 でないべき等元の完全直交系 $e_1, e_2, \dots, e_k$ と実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$) が存在して, $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ と表される. それらは一意的で, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ のことを, x の 固有値 という. ■

0 でないべき等元は原始べき等元の直交和に分解できるから, 特に単位元 e は原始べき等元の直交和として $e = e_1 + \cdots + e_r$ と, 分解できることがわかる. ここで, r は原始べき等元の完全直交系のとり方によらず一定で, V の 階数 と呼ばれ, 上述の degree に一致する.

命題 1.2. Jordan 代数 V において, 次の (1) ~ (3) は同値:

- (1) V は形式的実.
- (2) 対称双線型形式 $x, y \mapsto \text{tr } L(xy)$ は正定値.
- (3) 対称双線型形式 $x, y \mapsto T(xy)$ は正定値. ■

例. $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ に $xy = (x \cdot y + y \cdot x)/2$ (右辺の $\cdot$ は通常の行列の乗法) で積を入れると, $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ は形式的実 Jordan 代数になる. 実際, $x^2 + y^2 = 0$ なら $x \cdot x + y \cdot y = 0$ だから, $\forall \xi \in \mathbb{R}^r$ に対して

$$0 = {}^t \xi \cdot (x \cdot x + y \cdot y) \cdot \xi = |x \cdot \xi|^2 + |y \cdot \xi|^2.$$

これより $x = y = 0$ が出る. ■

V の各元 x に対して, 作用素 $P(x)$ を

$$P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2) \quad (x \in V)$$

で定義する. 対応 $P: x \mapsto P(x)$ は V の quadratic representation と呼ばれる ($P(xy) = P(x)P(y)$ は一般に成り立たないけれども). この P について次の公式が成り立つ: $\forall x, y \in V$ に対して

$$(1.1) \quad P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x),$$

$$(1.2) \quad P(x^n) = P(x)^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

さて, V の元 x に対して, x で生成される V の部分代数を $\mathbf{R}[x]$ で表そう. V は power-associative だから, $\mathbf{R}[x]$ では結合律が成立していることに注意.

命題 1.3. V の元 x に対して, 次の (1) ~ (4) は同値:

- (1) 作用素 $P(x)$ は可逆, すなわち, $\det P(x) \neq 0$.
- (2) $\mathbf{R}[x]$ の元 y が存在して, $xy = e$.
- (3) V の元 y が存在して, $xy = e$ かつ $[L(x), L(y)] = 0$.
- (4) V の元 y が存在して, $xy = e$ かつ $x^2y = x$. ■

命題 1.3 の条件をみたす x は 可逆 であるといわれる. (3) より x の逆元 y の一意性がわかり, (1) を用いると, $y = P(x)^{-1}x$ で与えられることがわかる. 可逆元の全体を $V^\times$ で表す. このとき,

$$(1.3) \quad P(x^{-1}) = P(x)^{-1} \quad (\forall x \in V^\times).$$

V には $\langle x, y \rangle := T(xy)$ で内積を入れておく (命題 1.2). このとき, 任意の $x \in V$ に対して, $L(x), P(x)$ は自己共役作用素である.

命題 1.4. 次の 5 つの V の部分集合は同一である:

- (1) $\text{Int} \{x^2; x \in V\}$ (Int は集合の内部).
- (2) $\{x^2; x \in V^\times\}$.
- (3) $V^\times$ の単位元の連結成分.
- (4) $\{x \in V; L(x) \text{ は正定値}\}$.
- (5) $\{x \in V; x \text{ の固有値はすべて正}\}$. ■

命題 1.4 で定義される V の部分集合を Ω で表す. Ω は V の開凸錐で内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して自己双対である. Ω のことを V の 対称錐 という. $x \in \Omega$ ならば, $P(x)$ は正定値であることも注意しておこう.

さて, 写像 $F: \Omega \ni x \mapsto x^2 \in \Omega$ を考えよう. $x_0 \in V$ での Fréchet 微分は $2L(x_0)$ で, しかもスペクトル分解を考えることにより容易に F が上への写像であることがわかるから, F は Ω から Ω の上への微分同相である. F の逆写像を $\Omega \ni y \mapsto y^{1/2} \in \Omega$ と表す.

V 上の実一般線型群を $GL(V)$ とし

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$$

とおく. $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であるから, $G(\Omega)$ は Lie 群になる. Ω が自己双対であるので, $G(\Omega)$ は reductive な Lie 群である.

補題 1.5. $x \in V^\times$ なら $P(x) \in G(\Omega)$.

証明. (1.1) より, $\forall y \in \Omega$ に対して $P(x)y$ は可逆 (i.e. $\exists P(P(x)y)^{-1}$) であるから $P(x)y \in V^\times$. そして $P(x)e = x^2 \in \Omega$ だから, $P(x)\Omega$ は $V^\times$ の連結開集合で, Ω と共通部分を持つ. ゆえに, $P(x)\Omega \subset \Omega$. これと (1.3) より $P(x)\Omega = \Omega$. すなわち, $P(x) \in G(\Omega)$. ■

任意の $x \in \Omega$ に対して, $P(x^{1/2})e = x$ ゆえ, 補題 1.5 から特に $\Omega = G(\Omega)e$ であることがわかる.

§2. 不変多項式

以下, 形式的実 Jordan 代数 V は単純で階数が r であるものとする. V の自己同型がなす群を K で表す. すなわち,

$$K := \{g \in GL(V); g(xy) = (gx)(gy) \text{ for } \forall x, y \in V\}.$$

一般最小多項式の K -不変性: $m_x(\lambda) = m_{kx}(\lambda)$ ($\forall k \in K, x \in V$) から, K は V の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する直交群 $O(V)$ の閉部分群になることがわかる. 従って, K 自身コンパクト Lie 群である. V 上の K -不変な多項式関数のなす代数を $\text{Pol}(V)^K$ で表す. $\text{Pol}(V)^K$ については, 次の結果が知られている.

命題 2.1(U. Hirzebruch [4]). r 個の V 上の多項式関数

$$f_j(x) := T(x^j) \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

は $\text{Pol}(V)^K$ の代数的に独立な生成元である. ■

次の命題は J. Faraut 教授に教わった.

命題 2.2. $f \in \text{Pol}(V)^K$ とすると, 函数

$$\Omega \times V \ni (x, y) \mapsto f(P(x^{1/2})y)$$

は, $p(x, y) = p(y, x)$ ($\forall x, y \in V$) である様な $V \times V$ 上の多項式関数 p の $\Omega \times V$ への制限である. ■

証明は, Faraut 氏の承諾を得て, [9]に書いておいた.

例 1. 命題 2.2 で $f = T = f_1$ とすると

$$(2.1) \quad T(P(x^{1/2})y) = \langle P(x^{1/2})y, e \rangle = \langle y, x \rangle$$

であるから, $p(x, y) = \langle x, y \rangle$. ■

例 2. 一般最小多項式の定数項の $(-1)^r$ 倍, すなわち, $\sigma_r(x)$ を $N(x)$ と書こう. もちろん, $N \in \text{Pol}(V)^K$. このとき,

$$(2.2) \quad N(P(x^{1/2})y) = N(x)N(y).$$

従って, $p(x, y) = N(x)N(y)$. $V = \text{Sym}(r, \mathbf{R})$ のときは, $N(x) = \det x$, $P(x^{1/2})y = x^{1/2} \cdot y \cdot x^{1/2}$ であるから, (2.2) は $\det(x^{1/2} \cdot y \cdot x^{1/2}) = (\det x)(\det y)$ という式に他ならない. ■

命題 2.1 の f_j に対して, $f_j(P(x^{1/2})y)$ を例 1 の様に, explicit に表そう.

命題 2.3. $\forall x \in \Omega$ と $\forall y \in V$ に対して,

$$(1) \quad f_{2m-1}(P(x^{1/2})y) = \langle (P(x)P(y))^{m-1} x, y \rangle,$$

$$(2) \quad f_{2m}(P(x^{1/2})y) = \langle (P(x)P(y))^{m-1} x, (y \square x)y \rangle.$$

ただし, $y \square x = L(yx) + [L(y), L(x)]$. ■

注意. 命題 2.2 より, 命題 2.3 (1), (2) の右辺は, x, y について対称である. 作用素 $P(x)$ が自己共役であったから, (1) の右辺が x, y について対称なことは直接読み取れる. (2) の右辺については, 作用素 $y \square x$ の adjoint が $x \square y$ となること, 及び Jordan 代数 (というより Jordan 3 重系) での基本的な公式:

$$(x \square y)P(x) = P(x)(y \square x)$$

からわかる.

以下,

$$(2.3) \quad p_{2m-1}(x, y) := \langle (P(x)P(y))^{m-1} x, y \rangle,$$

$$(2.4) \quad p_{2m}(x, y) := \langle (P(x)P(y))^{m-1} x, (y \square x)y \rangle$$

とおく. 各 p_j は $V \times V$ 上の多項式関数であるが, さらに

命題 2.4. 各 $j = 1, 2, \dots, r$ について,

$$p_j(gx, {}^t g^{-1}y) = p_j(x, y) \quad \text{for } \forall g \in G(\Omega), x \in V, y \in V$$

が成り立つ. ただし, ${}^t g$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する g の adjoint. ■

さて, $G(\Omega)$ を $V \times V$ に

$$(2.5) \quad g \cdot (x, y) = (gx, {}^t g^{-1}y)$$

で作用させる.

補題 2.5. $\Omega \times V$ 上の C^∞ -関数 L は, (2.5) による $G(\Omega)$ の作用で不変で, かつ各 $x \in \Omega$ を固定するとき, $y \mapsto L(x, y)$ は V 上の多項式関数であるとする. このとき, r 変数の多項式関数 Q が存在して,

$$L(x, y) = Q(p_1(x, y), \dots, p_r(x, y)) \quad (\forall x \in \Omega, \forall y \in V)$$

となる. ここで, p_j は (2.3), (2.4) で定義されたものである.

証明は, $K \subset O(V)$ に注意して, $l(y) := L(e, y)$ で定義される V 上の多項式関数 l が $\text{Pol}(V)^K$ に属することと, U. Hirzebruch の結果 (命題 2.1), 及び $L(x, y) = l(P(x^{1/2})y)$ となることを用いる. ■

(2.5) による $G(\Omega)$ の作用で不変な $V \times V$ 上の多項式関数のなす代数を $\text{Pol}(V \times V)^{G(\Omega)}$ で表そう. 命題 2.2 を精密化すると

定理 2.6. 各 $f \in \text{Pol}(V)^K$ に対して,

$$p_f(x, y) := f(P(x^{1/2})y) \quad (x \in \Omega, y \in V)$$

とおくと, 写像 $f \mapsto p_f$ は, $\text{Pol}(V)^K$ から $\text{Pol}(V \times V)^{G(\Omega)}$ の上への algebra isomorphism を与える. ■

§3. $G(\Omega)$ -不変微分作用素

$G(\Omega)$ の V への作用は線型であったから, $G(\Omega)$ の $V \times V$ への作用 (2.5) を $\Omega \times V$ に制限すると, それは Ω の余接束 $T^*(\Omega) \approx \Omega \times V$ への $G(\Omega)$ の自然な作用に他ならない. (2.3), (2.4) で定義された p_j を用いて, 微分作用素 $p_j(x, \partial/\partial x)$ を

$$p_j(x, \partial/\partial x)e^{(x, y)} = p_j(x, y)e^{(x, y)}$$

で定義する.

定理 3.1. r 個の微分作用素 $p_1(x, \partial/\partial x), \dots, p_r(x, \partial/\partial x)$ は, Ω 上の $G(\Omega)$ -不変な微分作用素のなす代数 $\mathcal{D}(\Omega)^{G(\Omega)}$ の代数的に独立な生成元である. ■

例. $x \in \Omega$ のとき, $P(x)$ は正定値自己共役作用素であったことを思い出そう. 各 $x \in \Omega$ に対して

$$B_x(u, v) := \langle P(x)u, v \rangle \quad (u, v \in V)$$

とおくと, $B: x \mapsto B_x$ は Ω に $G(\Omega)$ -不変な Riemann 構造を定義し, Ω は Riemann 対称空間となる. 点 $e \in \Omega$ での symmetry は $x \mapsto x^{-1}$ (Jordan 代数 V での inverse) で与えられる. このとき, Riemann 構造 B に関する Ω 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ は

$$\Delta = p_2(x, \partial/\partial x) + \frac{n}{r} \cdot p_1(x, \partial/\partial x)$$

と表される. ここで, $p_1(x, y) = \langle x, y \rangle$ であったから, $p_1(x, \partial/\partial x)$ はいわゆる Euler 作用素である.

REFERENCES

1. H. Braun and M. Koecher, "Jordan-Algebren," Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
2. J. Dorfmeister and M. Koecher, *Reguläre Kegel*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **81** (1979), 109–151.
3. J. Faraut, "Algèbres de Jordan et cônes symétriques," Ecole d'été CIMPA, Univ. Poitiers, 1988.
4. U. Hirzebruch, *Invariant polynomial functions on Jordan algebras*, Algebras Groups Geom. **1** (1984), 442–445.
5. N. Jacobson, "Structure and representations of Jordan algebras," Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
6. P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. of Math. **35** (1934), 29–64.
7. M. Koecher, *Die Geodätischen von Positivitätsbereichen*, Math. Ann. **135** (1958), 192–202.
8. H. Maaß, "Siegel's modular forms and Dirichlet series," Lect. Notes in Math. **216**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
9. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone*, J. Reine Angew. Math. **400** (1989), 122–133.
10. T. Nomura, *Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain*, J. Math. Kyoto Univ., to appear.
11. I. Satake, *ジョルダン環とリー環 I, II, III*, 科学 **51** (1981), 287–291; 387–391; 458–463.
12. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
13. E. B. Vinberg, *Homogeneous cones*, Soviet Math. Dokl. **1** (1961), 787–790.