

関数方程式 と 準楕円性

岡山大学教養部 堤 陽 (Akira Tsutsumi)

1. 序 角谷-南雲 [7] と J. Walsh [15] は独立に次の定理を証明した.

定理 $f(x)$ は連続な実数値関数で, 平均値型関数方程式

$$(1.1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f(x + \theta^j t) = f(x),$$

ここで, x, t は任意の複素数, $\theta = \exp(2\pi i/n)$, を満すものとする. このとき $f(x)$ は高々 $n-1$ 次の harmonic polynomial である.

このように関数方程式を解く場合に, それを満す弱いながらもかさをもつ解が実は強いなめらかさをもつことがある. たとえば, すべての連続解を求めるのに, 解の可微性が先に得られていれば, 微分という手段を用いて得る, (see [1]). この一トの目的は, ある種の関数方程式の弱い regularity をもつ解の C^∞ 性を証明することにある.

方法については, [7], [15] においては (1.1) を調和積分, すなわち積分方程式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + e^{i\varphi}) d\varphi = f(x)$$

へ変換して、 $f(x)$ の調和性を導いてみる。一方、ここでは、(1.1) を偏微分方程式に変換する方法を用いる。この観念に立てば、(1.1) の型をより一般にした方程式を扱うことが可能になる。考え方を示すために (1.1) を偏微分方程式へ変換する手順を示す。

$x = x_1 + i x_2$, $\theta^i = \theta_1^{(j)} + i \theta_2^{(j)}$ とおき、 $t \in \mathbb{R}$ (実数) に制限し、 $f(x)$ の (1.1) の超関数の意味の解とすると、(1.1) の両辺に $\frac{d^2}{dt^2}$ を作用させることが出来る

$$\sum_{j=1}^k (\theta_1^{(j)} + i \theta_2^{(j)})^2 f''(x + \theta^j t) = \sum_{j=1}^k (\theta_1^{(j)} \partial_{x_1} + \theta_2^{(j)} \partial_{x_2})^2 f(x + \theta^j t) = 0.$$

$t = 0$ とおくと $f(x)$ を未知関数とする偏微分方程式

$$(1.2) \quad P(\partial_x) f(x) = \sum_{j=1}^k (\theta_1^{(j)} \partial_{x_1} + \theta_2^{(j)} \partial_{x_2}) f(x) = 0.$$

三角関数の公式より

$$\sum_{j=1}^k (\theta_1^{(j)})^2 = \sum_{j=1}^k (\theta_2^{(j)})^2 \neq 0, \quad \sum_{j=1}^k \theta_1^{(j)} \theta_2^{(j)} = 0$$

を用いると、(1.2) は

$$(1.3) \quad \Delta_x f(x) = 0,$$

ここで $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$, と同値である。これより $f(x)$ は調和関数 (したがって C^∞) であることが得られる。

上の解析と偏微分方程式の解の C^∞ 性 (準滑円性) を考え合わせると次のことが得られる。

(1.3) において, Δ_x の代りに準楕円型偏微分作用素 $P(x, \partial_x)$ をとることも可能なように (1.1) をより一般的な型の関数方程式を定めること. §2 節で定理を述べる, §3 節で準楕円性の十分条件を引用する, §4 節で定理の応用例および問題を提示する. これらの結果の一部は [13], [14] で発表されている. また (1.1) の積分型への拡張

$$\int f(x+ty) d\mu(y) = f(x)$$

は [3], [4], [16] で扱われている.

2. 定理 $x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^r$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$
 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_r$, とする. ξ^α , ∂_x^α は通常の方法とし,
 $D_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha$, D_t^β についても同様とする. 超関数 $T \in \mathcal{D}'$ が class C または L'_{loc} であるとは連続関数 f または locally integrable function f があって

$$(T, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

即ち χ - γ - 体の超関数も考える. $\omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $\phi: \mathbb{R}^n \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$ とし, t を固定すれば $\psi_t = \psi(x, t) \in \mathcal{D}$ かつ $\psi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. これに対して, $T \in \mathcal{D}'$

$$\gamma(t) = (T, \psi_t) = (T(x), \psi(x, t))_x.$$

$$h_j(x, t) = (h_{j1}(x, t), \dots, h_{jn}(x, t)), \quad \partial_t^\beta h_j(x, t) = (\partial_t^\beta h_{j1}(x, t), \dots,$$

$\partial_t h_{jn}(x, t)$ とかく; $h_j: \mathbb{R}^n \times \omega \mapsto \mathbb{R}^n$, $h_{ji}: \mathbb{R}^n \times \omega \mapsto \mathbb{R}^n$. regularity に ついて は 例え ば $h_j \in C^p$ は component wise に C^p を意味する. 線型偏微分作用素 (m 階) に ついて も 通常の記号を用いる:

$$P = P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad P_{(\beta)}^{(\omega)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$f(x)$ を未知関数とする関数方程式

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^k a_j(x, t) f(h_j(x, t)) = F(x, f(l_1(x)), \dots, f(l_s(x))) + b(x, t),$$

, かつ $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^r$, を考える.

方程式 (2.1) に 次のことを仮定する.

A-1° $a_j(x, t), b(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j=1, \dots, k$, $t \in \omega \subseteq \mathbb{R}^r$ を固定, ω 閉集合,

A-2° $a_j(x, t), b(x, t) \in C^m(\mathbb{R}^n \times \omega)$, $j=1, \dots, k$,

A-3° 写像 $x \mapsto y = h_j(x, t)$ は 各 $t \in \omega$ を固定すれば $\mathbb{R}^n$ の diffeomorphisms, $j=1, \dots, k$,

A-4° $h_j(x, t) \in C^m$, 逆の $h_j^{-1}(x, t) \in C^m$ $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \omega$, $j=1, \dots, k$,

A-5° $F(x, z_1, \dots, z_s) \in C(\mathbb{R}^{n+s})$,

A-6° $l_j(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $j=1, \dots, s$.

$f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が (2.1) の 超関数の意味の解であるとは

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^k (a_j(x, t) f(h_j(x, t)), \phi(x))_x = (F(x, f(l_1(x)), \dots, f(l_s(x)), \phi(x))_x + (b(x, t), \phi(x))_x.$$

C^∞ -係数をもつ偏微分作用素 $P = P(x, D_x)$ が閉集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ に おいて準楕円的 (hypoelliptic) であるとは、任意の $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と

open subset $\Omega' \subset \Omega$ に対して $pu \in C^\infty(\Omega')$ ならば $u \in C^\infty(\Omega')$ になりたつことである。

ここで、我々の扱う問題に一般的わく組を与える定理をのべよう。

定理 2.1 方程式 (2.1) が仮定 A-1° ~ A-6° をみたすものとする。更に、 $h_j(x, t_0) \equiv x$ とする $t_0 \in \omega$ が存在し、

$$(2.3) \quad Q(t, \partial_t) \left(\sum_{j=1}^k a_j(x, t) f(h_j(x, t)) \right) \Big|_{t=t_0} = 0$$

が $\mathbb{R}^n$ における準楕円型偏微分方程式であると仮定する、ただし $Q(t, \partial_t)$ は t についての偏微分作用素で、形式的に作用させるものとする。このとき (2.1) の連続解は C^∞ となり、 L_{loc}^1 の解は殆んど C^∞ -関数に等しい。

(2.1) において

$$(2.4) \quad h_j(x, t) = x + \phi_j(t), \quad j=1, \dots, k, \quad \text{ここで}$$

$$A-7^\circ \quad \phi_j(t) \in C^\infty(\omega), \quad j=1, \dots, k, \quad \text{と仮定する,}$$

のときに上の定理を更に具体的に应用することか出来る。

$$(2.5) \quad \mathcal{L}_j(t) = \sqrt{a_j(x, t)} \phi_j'(t) \cdot \text{grad}_x, \quad j=1, \dots, k,$$

$$(2.6) \quad \mathcal{L}_0(t) = 2 \sum_{j=1}^k \left\{ \partial_t a_j(x, t) \phi_j'(t) \cdot \text{grad}_x \right. \\ \left. - (\sqrt{a_j(x, t)} \phi_j'(t) \cdot \text{grad}_x \sqrt{a_j(x, t)}) \phi_j'(t) \cdot \text{grad}_x - a_j(x, t) \phi_j''(t) \cdot \text{grad}_x \right\},$$

ここで $\phi_j'(t) = \frac{d}{dt} \phi_j(t)$, $\cdot$ はベクトル空間の内積である。

また、 $[\mathcal{L}_\mu(t), \mathcal{L}_\nu(t)]$ は $\mathcal{L}_\mu(t)$ と $\mathcal{L}_\nu(t)$ の commutator $\mathcal{L}_\mu(t)\mathcal{L}_\nu(t) - \mathcal{L}_\nu(t)\mathcal{L}_\mu(t)$ を表す。

定理 2.2 $A-1^\circ, A-2^\circ, A-5^\circ \sim A-7^\circ$ を仮定する. もし $\phi_j(t_0) = 0$ と任意の x に対し $a_j(x, t_0) > 0, j=1, \dots, k$, が成りたつような $t_0 \in \omega$ (一集) が存在し, かつ $\mathcal{L}_{j_1}(t_0), [\mathcal{L}_{j_2}(t_0), \mathcal{L}_{j_3}(t_0)], [\mathcal{L}_{j_1}(t_0), [\mathcal{L}_{j_2}(t_0), \mathcal{L}_{j_3}(t_0)]]$, $\dots, [\mathcal{L}_{j_1}(t_0), [\mathcal{L}_{j_2}(t_0), [\mathcal{L}_{j_3}(t_0), [\dots, \mathcal{L}_{j_v}(t_0)]] \dots]]$, $\dots$, $j_v = 0, 1, \dots, k$, の中に各 $x \in \mathbb{R}^n$ について n 個の一次独立なものが存在すれば, 定理 2.1 と同じ結論が成りたつ.

系 ([10], Theorem 6.1, p. 111) 定理 2.2 と同一の仮定の下で, $\{\phi'_j(t_0) : j=1, \dots, k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張るならば, 定理 2.1 と同じ結論が成りたつ.

(2.4) の上に更に

$$(2.7) \quad a_j(x, t) \equiv \mu_j, \quad \mu_j \text{ は正の定数}, j=1, \dots, k,$$

とする.

定理 2.3 $b(x, t)$ に対し $A-1^\circ, A-2^\circ$ を, そして $A-5^\circ \sim A-7^\circ$ を仮定する. もし $\phi_j(t_0) = 0, j=1, \dots, k$, かつ $\{\phi'_j(t_0) : j=1, \dots, k\}$ と $\sum_{j=1}^k \mu_j \phi_j(t_0)$ が $\mathbb{R}^n$ を張るならば, 定理 2.1 と同じ結論が成りたつ.

3. 準楕円性の十分条件 準楕円性は, 偏微分方程式の走

関数解が古典的な解となるかどうかという問題から生じたものである。それ以来、準楕円性のための数多くの十分条件が求められて来た([5], [6], [11], [12])。ラプラス作用素やその一般化の楕円型作用素は、準楕円的である。熊之郷-谷口の結果[8]によると、次の退化型作用素も準楕円的である。

例. (1) $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_n)$ とし、 $\Delta_{x'}$, $\Delta_{x''}$ をそれぞれ x' , x'' についてのラプラス作用素とするとき、 $x \in \mathbb{R}^n$ において

$$P = (-\Delta_{x'})^l + |x'|^{2k} (-\Delta_{x'})^m$$

は、任意の自然数 l, m, k に対して準楕円的である。

(2) $x \in \mathbb{R}^2$; $x = (x_1, x_2)$ とし、

$$P_{\pm} = D_{x_1} \pm i x_1^k D_{x_2}^l$$

とするとき、“ $k = \text{偶数}$ ” か又は “ $k = \text{奇数}$ で $l = \text{偶数}$ ” ならば $P_{\pm}$ は $\mathbb{R}^2$ で準楕円的である。

また Hörmander [6] は 2 階の偏微分作用素の準楕円性について次の十分条件を与えている、 C^∞ -係数をもつ 2 階偏微分作用素

$$(3.4) \quad P = P(x, D_x) = \sum_{j=1}^k X_j^2 + X_0 + c,$$

ここで $X_0, X_1, \dots, X_k$ は開集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ において実 C^∞ -係数をもつ 1 階同次偏微分作用素

$$X_j = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}(x) \partial_{x_\ell}, \quad a_{j\ell}(x) \in C^\infty(\Omega)$$

$c \in C^\infty(\Omega)$ とする. $R[X_0, X_1, \dots, X_k]$ を $X_j, [X_{j_1}, X_{j_2}], [X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]],$
 $\dots, [X_{j_1}, [X_{j_2}, [X_{j_3}, [\dots, X_{j_\mu}]]] \dots]$ ($j_\nu = 0, 1, \dots, k$) で張られる
 ベクトル空間とする. このとき次の十分条件が成り立つ.

「 $R[X_0, X_1, \dots, X_k]$ が各点 $x_0 \in \Omega$ において n 個の一次独立な元
 をふくめば、 P は Ω において準楕円的である」

4. 定理の証明 $\psi(x, t) \in \mathcal{D}$ ($t \in \omega$ を固定) とし, $\text{supp}_x \psi(x, t)$
 を x についての support とする. また $\psi(\text{supp} \phi, t) = \bigcup_{x \in \text{supp} \phi} \psi(x, t),$
 $\psi(\text{supp} \phi, F) = \bigcup_{t \in F} \psi(\text{supp} \phi, t), \det \partial h_j^{-1} / \partial y = \det (\partial h_{j,i}^{-1} / \partial y_\mu;$
 $\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n})$ という記号を用いる.

定理 2.1 の証明 $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ の関数である超関数とすると、
 関数列 $f_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ があって $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x), \phi(x))_x = (f(x), \phi(x))_x.$$

$$\text{これから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(h_j(x, t)), \phi(x))_x = (f(h_j(x, t)), \phi(x))_x.$$

$F \subset \omega$: コンパクト集合に対して, $J = \bigcup_{t \in F} \text{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y, t))$ がコ
 ンパクトとなることを示そう. $t^0 \in F$ にとる. $h_j(\text{supp} \phi, F)$ は
 コンパクトとなる. なぜならコンパクト集合 $\text{supp} \phi \times F$ の h_j
 による連続像はコンパクトであるから. 更に

$$h_j(\text{supp} \phi, t) = \text{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y, t)).$$

なぜならば, $y \in h_j(\text{supp} \phi, t)$ に対して $\phi(x_\nu) \neq 0 \quad \nu = 1, 2, \dots$

$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$ とする列 $\{x_n\}$ が存在する. $y_n = h_j(x_n, t)$
 とおく. $y_n \rightarrow y = h_j(x, t) \quad (n \rightarrow \infty)$ とする. $x_n = h_j^{-1}(y_n, t)$
 と $\phi(x_n) = \phi(h_j^{-1}(y_n, t)) \neq 0$ だから $y \in \text{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y, t))$ がた
 りた. 他方, $\bar{y} \in \text{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y, t))$ に対して, $\phi(h_j^{-1}(\bar{y}, t))$
 $\neq 0$ なら $\bar{y}$ に収束する列 $\{\bar{y}_n\}, (n=1, 2, \dots)$ が存在する. $x_n =$
 $h_j^{-1}(\bar{y}_n, t)$ とおく. $\phi(x_n) \neq 0$ によって $\lim_{n \rightarrow \infty} h_j^{-1}(\bar{y}_n, t) = x$ は
 $\text{supp } \phi$ に属する. このことは $\bar{y} = h_j^{-1}(x, t)$ かつ $\bar{y} \in$
 $h_j(\text{supp } \phi, t)$ を意味する. よって $J = \bigcup_{t \in F} \text{supp}_y \phi(h_j^{-1}(y, t))$
 $= \bigcup_{t \in F} h_j(\text{supp } \phi, t)$ はコンパクトが示された. このことから
 次の計算が可能である.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(y), \phi(h_j^{-1}(y, t)) | \det \partial h_j^{-1} / \partial y |)_y \\
 &= (f(y), \phi(h_j^{-1}(y, t)) | \det \partial h_j^{-1} / \partial y |)_y = (f(h_j(x, t)), \phi(x))_x.
 \end{aligned}$$

これから (2.2) の両辺に ∂_t^2 を作用させて,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 \sum_{j=1}^k (a_j(x, t) f(h_j(x, t)), \phi(x))_x &= \sum_{j=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_t^2 [(a_j(x, t) f_n(h_j(x, t)), \\
 \phi(x))_x] &= \sum_{j=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(y), (-\partial_t^2 [a_j(y) \phi^{-1}(h_j^{-1}(y, t)) | \det \partial h_j^{-1} / \partial y |])_y \\
 &= \sum_{j=1}^k (f(y), (-\partial_t^2 [a_j(y) \phi(h_j^{-1}(y, t)) | \det \partial h_j^{-1} / \partial y |])_y \\
 &= \sum_{j=1}^k (\partial_t^2 [a_j(x, t) f(h_j(x, t))], \phi(x))_x.
 \end{aligned}$$

かくして $\sum_{j=1}^k (\partial_t^2 [a_j(x, t) f(h_j(x, t))], \phi(x))_x = (\partial_t^2 b(x, t), \phi(x))_x$
 となる超関数の意味で

$$\partial_t^2 \left(\sum_{j=1}^k a_j(x, t) f(h_j(x, t)) \right) = \partial_t^2 b(x, t).$$

このことから (2.2) の両辺に作用素 $Q(t, \partial_t)$ を施せば, t

$t=t_0$ において、左辺が定理の仮定によって準楕円的な偏微分方程式 $Q(t_0, \partial_t) \left(\sum_{j=1}^k a_j(x, t_0) f(x) \right) = Q(t_0, \partial_t) b(x, t_0)$ を得る。このことから定理の結論が得られる。

定理 2.2 の証明 (2.1) において $f_j(x, t) = x + \phi_j(t)$ の場合を考え、定理 2.1 の証明と同じ過程から ∂_t^2 を作用させるとかき来て、 $t=t_0$ とおけば、

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^k [a_j(x, t_0) (\phi_j'(t_0) \cdot \text{grad}_x)^2 + 2 \partial_t a_j(x, t) (\phi_j'(t_0) \cdot \text{grad}_x) + a_j(x, t_0) (\phi_j''(t_0) \cdot \text{grad}_x) + \partial_t^2 a_j(x, t_0)] f(x) = \partial_t^2 b(x, t_0).$$

(2.5) と (2.6) から (4.1) は、次の形にかき表わせる。

$$(4.2) \quad \left[\sum_{j=1}^k \mathcal{L}_j^2(t_0) + \mathcal{L}_0(t_0) \right] f(x) = \partial_t^2 b(x, t_0).$$

定理の仮定から、Hörmander の条件を満足しているから結論を得ることも出来る。

定理 2.3 の証明 $\mathcal{L}_j(t_0) = \sqrt{\mu_j} (\phi_j'(t_0) \cdot \text{grad}_x)$, $j=1, \dots, k$, $\mathcal{L}_0(t_0) = \sum_{j=1}^k \mu_j (\phi_j''(t_0) \cdot \text{grad}_x)$ は定係数であるから、これらの commutator は消える。よって $\mathcal{R}[\mathcal{L}_0(t_0), \mathcal{L}_1(t_0), \dots, \mathcal{L}_k(t_0)]$ が n 個の一次独立な要素をふくむためには、 $\{\sqrt{\mu_j} \phi_j'(t_0); j=1, \dots, k\}$ と $\sum_{j=1}^k \mu_j \phi_j''(t_0)$ が $\mathbb{R}^n$ を張れば十分である。 $\mu_j > 0, j=1, \dots, k$, 故、前者は $\{\phi_j'(t_0); j=1, 2, \dots, k\}$ で置きかえられる。よ

7.2 定理の結論を得る.

注意, 定理 2.2 の系の仮定の下で (4.1) の主部は

$$P_0(x, \partial_x) = \sum_{j=1}^k [a(x, t_0) (\phi_j'(t_0) \cdot \text{grad } x)]^2$$

で, 2.1 の characteristic form は

$$P_0(x, \xi) = \sum_{j=1}^k [a(x, t_0) (\phi_j'(t_0) \cdot \xi)]^2$$

となり, $P_0(x, \xi) = 0$ か $\xi = 0$ か $\{\phi_j'(t_0) : j=1, \dots, k\}$ と $a_j(x, t_0) > 0$ かを導かれる. よってこのときは $P_0(x, \partial_x)$ は elliptic である.

5. 例と注意 初めの 4 例は定理 2.1 の応用である.

(1) Muruki's equation [2]

$$4f(x_1, x_2) - f(x_1+t, x_2+t) - f(x_1-t, x_2+t) - f(x_1+t, x_2-t) \\ - f(x_1-t, x_2-t) = 0,$$

これは (2.1) で $a_1(x, t) = 4$, $a_j(x, t) = -1$, $j=2, \dots, 5$, $h_1(t, x) = x$,

$h_2(x, t) = (x_1+t, x_2+t)$, $h_3(x, t) = (x_1-t, x_2+t)$, $h_4(x, t) = (x_1+t,$

$x_2-t)$, $h_5(x, t) = (x_1-t, x_2-t)$, $F(x, f(l_1(x)), \dots, f(l_5(x))) = 0$

$b(x, t) = 0$. ∂_t^2 を作用させると, $t = 0$ とおく = 2.1.5

$$\Delta_x f(x) = 0.$$

Δ_x は elliptic かつ hypo-elliptic.

$$(2) f(x_1+t, x_2) + t^2 f(x_1, x_2+t) + (t-t^2+1) f(x_1, x_2)$$

$$= t(x_1^2 + 2x_1 + t), \quad \text{および}$$

$$f(x_1 + t, x_2) + f(x_1 - t, x_2) + f(x_1, x_2 + t^2) + f(x_1, x_2 - t^2) - 4f(x_1, x_2) = 0,$$

(see [10]). ∂_t^4 をこれらの方程式に作用させれば, $t=0$ と

おくことにより, ある定数 $l > 0$ に対し

$$\partial_{x_1}^4 f(x_1, x_2) + l \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0.$$

これは semi-elliptic, かつ hypoelliptic.

次の結果は, 定理 2.1 ~ 2.3 を適用する新しい例と思う。

$$\begin{aligned} (3) \quad & f(x_1 - t, x_2) + f(x_1 + t, x_2) + x_1^2 f(x_1, x_2 - t) + x_1^2 f(x_1, x_2 + t) \\ &= 2f(x_1, x_2) + 2x_1^2 f(x_1, x_2) + 2[f(x_1, x_2)]^2 + [f(x_1 + x_2, x_1 - x_2)]^2 \\ &\quad - [f(x_1, x_1)]^2 - [f(x_2, x_2)]^2 \end{aligned}$$

∂_t^2 を作用させ $t=0$ とおくと

$$\partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) + x_1^2 \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0.$$

作用素 $P(x, \partial_x) = \partial_{x_1}^2 + x_1^2 \partial_{x_2}^2$ は, 3 節で q'' は hypo-elliptic operator $P = (-\Delta_{x'})^l + |x''|^k (-\Delta_{x''})^m$ の特別な場合である。

$$(4) \quad f(x_1 + t, x_2) + i x_1^4 f(x_1, x_2 + t) - 2f(x_1, x_2) = 0.$$

∂_t を作用させ $t=0$ とおけば

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) + i x_1^4 \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 0.$$

$P(x, \partial_x) = \partial_{x_1} + i x_1^4 \partial_{x_2}$ は $P_{\pm} = D_{x_1} \pm i x_1^4 D_{x_2}$ の特別な形である。

- (5) $f(x_1+t, x_2) + f(x_1, x_2 - \frac{1}{2}t^2) = 2f(x_1, x_2)$. $\phi_1(t) = (t, 0)$,
 $\phi_2(t) = (0, -\frac{1}{2}t^2)$, $t^0 = 0$ により, $\phi_1'(0)$, $\phi_2'(0)$ は $\mathbb{R}^2$ を張る.

定理 2.3 より連続解は C^∞ である.

- (6) $f(x_1-t^2, x_2+t^2) = f(x_1, x_2)$, $\phi_1(t) = (-t^2, t^2)$ とすると
 $\phi_1''(-2, 2)$ は定理 2.3 の条件を満たす. 一方 $f = f(x_1, x_2)$ は

$$(-\partial_{x_1} + \partial_{x_2})f = 0$$

を満たす. この解は必ずしも C^∞ とはなすぬ.

注. 定理 2.3 で $\{\phi_j'(t^0); j=1, \dots, k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張るなるとき,
 $\{\phi_j''(t^0); j=1, \dots, k\}$ が $\mathbb{R}^n$ を張れば定理の結論が成り立つ
 かどうかは今この所分らない.

Reference

- [1] J. Aczél : Lectures on functional equations and their applications, Math. in Sci. and Engineering, Vol. 19, Academic Press, New York and London, 1966.
- [2] J. Aczél, H. Haruki, M.A. McKiernan, and G.W. Sakovič, General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials, Aequationes Math. 1 (1968), 57-53.
- [3] L. Flatto : Functions with a mean value property II, Amer. J. Math. 85 (1963), 248-270.
- [4] A. Friedman and W. Littman : Functions satisfying the mean value property, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 167-180.
- [5] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symp. on Singular Integrals, Amer. Math. Soc. 10 (1967), 138-183.
- [6] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1969), 147-171.
- [7] S. Kakutani and M. Nagumo : About the functional equation $\sum_{n=0}^{n-1} f(z + e^{(2\pi i/n)} \xi) = n f(z)$ (In Japanese), Zenkoku Shijo Danwakai 66 (1935), 10-12.
- [8] H. Kumano-go and K. Taniguchi : Oscillatory integrals of

- symbols of pseudodifferential operators on $\mathbb{R}^n$ and operator of Fredholm type, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 397-402.
- [9] L. Schwartz : Theorie des distributions, Herman, Paris, 1966.
- [10] H. Świątak : The regularity of the locally integrable and continuous solutions of non-linear functional equations, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), 97-118.
- [11] F. Trèves : Operateurs différentiels hypoelliptiques, Ann. Inst. Fourier 9 (1959), 1-73.
- [12] A. Tsutsumi : On the asymptotic behavior of resolvent kernels and spectral functions for some class of hypoelliptic operators, J. Differential Equations 18 (1975), 366-385.
- [13] A. Tsutsumi and S. Haruki : Functional Equations and hypoellipticity, Proc. Japan Acad. 58 (1982), Ser. A, 105-108.
- [14] A. Tsutsumi and S. Haruki : The regularity of solutions of functional equations and hypoellipticity, Supplement to the Proc. of the 2nd World Conf. on Math. at the Service of Man. 1982, Las Palmas, Spain.
- [15] J. L. Walsh : A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 923-930.
- [16] L. Zalkman : Mean values and differential equations, Israel J. Math. 14 (1973), 339-352.