

可解格子模型 について

山田 裕二
(Yuji Yamada)

目次

	頁
1. はじめ	3
§1 Introduction	4
§2 おもての face-vertex 対応	16
§3 Quantum R matrix	24
§4 $X_m^{(1) \# 1}$ Face model	29
§5 STR の証明	33
§6 Restriction	40
§7 Fusion procedure	47
§8 Corner transfer matrix	64
§9 Local state probabilities in terms of 1-D sums. vertex model in face formulation	75
§10 1D sums for finite m	88
§11 1D sums in terms of modular forms	98
References	111

はしがき

本稿のもととなったのは、平成元年の二月に京都の関西セミナーハウスで行われた尾角正人氏と国場敦夫氏による可解格子模型についての15時間弱にわたった講義であります。この時には前半8時から9時を尾角氏が、後半9時から11時を国場氏が担当されました。

もとの講義はOHPなども多用して説得力に富むものでありましたが、このノートを書くにあたっては、筆者の勝手な判断に切り削る部分があり加えた部分があるために、原講義の流暢さが失われていることを恐れます。

また当然ながらノートの責任は筆者にあります。

最後に、筆者の納得のいくまで辛抱強く議論に応じて下さった尾角氏、国場氏にはここで深く感謝させて頂きます。それらはこのノートにとって不可欠なものでありました。

平成元年 八月 小田裕二

Part I, § 1 Introduction

格子模型、特に可解な (分配函数及び
1点相関函数が厳密に計算可能な) 格子模型
として Ising model がよく知られている。

2次元の Ising model と1次の Potts model
である。正方格子の各頂点上に $+1$ または -1
なる値をとる変数 (spin) があり、これらの各
頂点の隣り合うもの同士のみ相互作用する
ものとする。つまり $N \times M$ なる大きさの格子を
考え、各頂点上の値を σ_{ij} で表せば、系
の Hamiltonian H は

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (K \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + L' \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1})$$

で与えられる。ここで K, L' はそれぞれ格子の
横、縦方向の相互作用の係数である。

統計力学における Boltzmann の原理より、
ある定まった値の組 $\sigma = (\sigma_{ij})$: configuration
が実際に現象として起る相対確率は

$$\exp \left\{ -\frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\} = \prod_{i,j} \exp \left\{ -\frac{K'}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} - \frac{L'}{k_B T} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1} \right\}$$

k_B : Boltzmann constant

T : 絶対温度

であり、統計力学において中心的な量である
分配関数 Z は

$$Z_{NM} = \sum_{\sigma} \exp \left\{ - \frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

configuration

により与えられる。この Z により系の自由エネルギー F は

$$F = -k_B T \log Z$$

で与えられる。さらに興味深い量として点
関数 (Local State Probability) P_a

$$P_a = \frac{1}{Z} \sum_{\text{conf}} \delta(\sigma_i, a) \exp \left\{ - \frac{H(\sigma)}{k_B T} \right\}$$

a : local state

σ_i : 定まった頂点 (site)

である。

Ising model について分配関数および点
関数はそれぞれ L. Onsager (1944) と
C. N. Yang (1952) において求められ、その結果
は、熱力学的極限 $\rightarrow$ 格子 size 無限大
の極限において、

$$\lim_{\substack{N, M \rightarrow \infty \\ M/N: \text{fixed}}} \frac{1}{NM} \log Z_{NM} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta$$

$$F(\theta) := \log \left\{ 2 (\cosh 2K \cosh 2L + k^{-1} (1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{1/2}) \right\}$$

$$K = -\frac{K'}{k_B T}, \quad L = -\frac{L'}{k_B T}$$

$$k = 2 \sinh 2K \sinh 2L$$

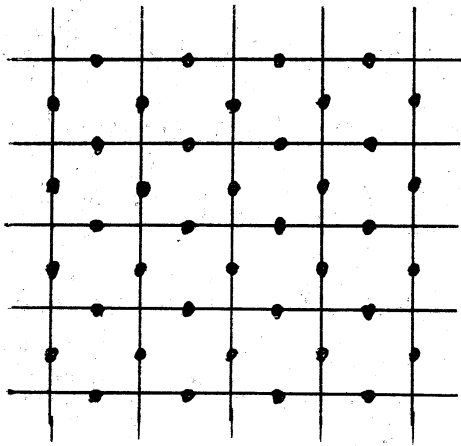
$$P = (1 - k^2)^{1/8} \quad ; \quad \text{1点函数}$$

であった。このとき 1点函数 P が系の詳細に依らず k のみに依存するといつて宜しに通ずる。

我々が対象として考察する model は次の3つの Type の model — vertex model 及び face model であるが、当然それらだけ先の 2-D Ising model などもその特殊な場合として含む。そして当面の目標となる問題はそれらの分配函数と一点相関函数を求めることである。

まず vertex model, face model といふのは3つの model のなかを定める。いずれの model も 2次元の正方格子上で考える。

vertex model として正方格子の各 edge の上に自由度があり、それらに与えられた集合 $\mathcal{A}$ (Ising model の場合の $\{\pm 1\}$ に対応) に属する。



$$R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{array}{c} \alpha \\ \bullet \\ \hline \mu \bullet \quad \bullet \beta \\ \hline \bullet \\ \nu \end{array}$$

$$\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathcal{A}$$

そして1つの頂点の周りの4つの edge が与えられたとき、その頂点の周りの状態の生じる相対確率 $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ ($u \in \mathcal{C}$; parameter) を与えることに $\mathcal{M}$ model が定まるのである。Ising model では1頂点の上に local state $\{\pm 1\}$ があり、隣り合う2状態 σ, σ' の生じる相対確率 (Boltzmann weight) が

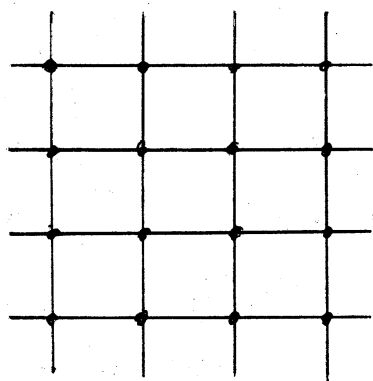
$$\exp(K\sigma\sigma') \quad \text{for } T=1 \quad \exp(L\sigma\sigma')$$

であり、これが Boltzmann の原理 $\mathcal{M}$ と与えられるのである。 $\rightarrow \mathcal{M}$ $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ を与えることは Ising

model として K, L を与えることに相当し. parameter u は 先の Ising model の導入の際に隠れていった.

$\sinh 2K = \sinh(u)$, $\sinh 2L = (k \sinh(u))^4$, $0 < k < 1$ なる K, L の parametrization に現れる変数に対応する. u は model の homogeneity を表わす parameter であると考えられている.

face model (IRF-model; Interaction-round-a-face model) として, 正方格子の各頂点 (site) の上に local state の集合 $\mathcal{S}$ に通じる自由度があり.



$$w\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) = \begin{array}{c} a \quad b \\ \hline \square \\ d \quad c \end{array}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{S}$$

今度 1 つの面 (face) の周りの頂点の 4 状態の全組合せの相対確率 (Boltzmann weight) $w\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ を与えることに IRF model が定まるのである.

Boltzmann weight $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$, $w\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ を与えること (Ising model での K, L を与えること) に

この model が定まるのであるが、model が可解であるためには、これらの Boltzmann weight が Yang-Baxter equation (Star-Triangle relation) を満たしていることが肝要である。特に 1 点函数 (LSP) を求めることに用いる。Corner Transfer Matrix の方法では Boltzmann weight が YBE (STR) を満たすことがその前提となっている (§ 8)。従って、この model を設定する際には、常に Boltzmann weight が YBE (STR) を満足するものを選択しなければならない。

本文の構成の概略は次の通りである。

§ 2, § 3 では Lie algebra A_1 の vector 表現に対する quantum R-matrix が YBE (STR) を満たす Boltzmann weight を与える。§ 4 ではこの拡張として一般の A_n の vector 表現に対する Boltzmann weight の結果のみ記す。この section において weak-admissibility - local state の配置に課される条件などを述べる。§ 5 ではこの Boltzmann weight が STR を満たすことを証明する。この § 7 では unrestricted picture (local state が h^* の generic h 値を取るという picture)

と呼ばれる状況についての話であるが、§6に
 おいて restricted picture (local state の h^* の
 dominant integral weight のみに制限した model)
 を定め、この場合においても Boltzmann weight
 が STR を満たすことを示す。unrestricted model
 restricted model の Local State Probability の
 3次元 affine Lie algebra の string function
 branching coefficient に関する §9, §10, §11
 での話題である。(正確な statement は該当
 部分を参照のこと) §7 では A_n の vector 表現
 以外の次数の高い表現に対応する model を与え
 る。このときの Boltzmann weight は vector 表現の
 Boltzmann weight を利用して構成されるであ
 るが、この手続のことを fusion と呼ぶのであ
 る。ここでは主に restricted model について論
 じる。以上 §2 から §7 までが model の設
 定であり、以降 §8 から §11 において A_n
 の vector 表現に対する model について 1 点函数
 (LSP) を求めるための議論を行う。Baxter
 の Corner Transfer Matrix の方法についての概説
 は §8 にあるが、これは現在までのところ

数学的に rigorous な方法ではないので、種々の
 仮定が設けられていることに注意を要する。
 §9で CTM の方法により 2次元格子上の和
 が 1次元格子の和に書き換えられる。この
 1次元格子上の和の表示を格子 size 無限大の極
 限での状態が分かりやすいように §10 において表
 示を取り直し、§11で格子 size を無限大とした
 ときに LSP が Lie algebra の表現に関連した
 modular function となることを示す。

Yang-Baxter equation (YBE) と Star triangle relation (STR)

YBE 及び STR 以後に Corner Transfer Matrix の方法により一点函数を求めたことに必要である。Baxter の主張 (§8) はこのことを決定した上での話である。

YBE とは $R(u) \in \text{End}_d(V \otimes V)$ に対して

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) \\ = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u))$$

なる $V^{\otimes 3}$ 上の方程式のことである。

STR とは

$$\sum_g W \begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} | u+v \rangle W \begin{pmatrix} b & c \\ g & d \end{pmatrix} | v \rangle W \begin{pmatrix} f & g \\ e & d \end{pmatrix} | u \rangle \\ = \sum_g W \begin{pmatrix} a & b \\ g & c \end{pmatrix} | u \rangle W \begin{pmatrix} a & g \\ f & e \end{pmatrix} | v \rangle W \begin{pmatrix} g & c \\ e & d \end{pmatrix} | u+v \rangle$$

$$W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} | u \rangle = \begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ d \quad c \end{array} \quad u \quad \text{と } \frac{F}{E} \text{ と } 1 \text{ と}$$

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ f \quad u+v \\ \diagdown \quad \diagup \\ e \quad d \end{array} \quad u \quad = \quad \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ f \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ e \quad d \end{array} \quad u+v \quad , \quad \text{1つ和をとる}$$

12

• graphical 1: $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$ あり。

Notations

$\mathfrak{g}$: Lie algebra

$U(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra

$U_q(\mathfrak{g})$: $U(\mathfrak{g})$ の q -analogue.

X_n : classical simple Lie algebra of rank n

$X_n^{(1)}$: X_n に $\frac{1}{2}\alpha$ を加えた affine Lie algebra

$\mathfrak{h}$: Cartan subalgebra of $X_n^{(1)}$

$\mathfrak{h}^*$: dual of $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$: fundamental root

δ : null root

$$\rho := \sum_i \Lambda_i$$

$\mathbb{Z}^+ := X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$ の $\mathbb{Z}^+$

$\Lambda_{\mu+n+1} = \Lambda_{\mu} + 1$ 添字 $\in \mathbb{Z}^+$ で拡張する

$$\bar{\Lambda}_{\mu} := \Lambda_{\mu} - \Lambda_0 \quad (\text{classical part})$$

$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ の orthonormal vector あり

$$\bar{\Lambda}_{\mu} = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

である。

内積は

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

$i = 1, 2, \dots, n$ とする。

$$\hat{v} := \Lambda_{v+1} - \Lambda_v \quad \left(\because \sum_{v=0}^n \hat{v} = 0 \right)$$

$$\begin{aligned} A &:= \{ X_m \text{ の vector 表現 の weight の集合} \\ &= \{ \hat{v} \mid v=0, \dots, n \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} := \mathfrak{h}^*$$

$$\mathcal{J}_1 := \{ \text{dominant integral weights of level 1} \}$$

$$\mathcal{J}_x := \mathcal{J} \text{ or } \mathcal{J}_1$$

$$a \in \mathfrak{h}^* \mapsto \bar{a} : a \text{ の classical part}$$

$$a_\mu := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_\mu - a_\nu$$

$$\sigma : \text{Dynkin diagram automorphism} \in \text{End}(\mathfrak{h}^*)$$

$$V_D : X_m^{(1)}(X_m) \text{ の vector 表現}$$

$$V(\alpha) : X_m \text{ の highest weight } \alpha \text{ の 既約表現}$$

$$L(\omega), V_a : X_m^{(1)} \text{ の highest weight } a \text{ の 既約表現}$$

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ \mathbb{C} | a^{(1)} \dots a^{(N)} \rangle \mid \begin{array}{l} a^{(1)} = a, \quad a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{J}, \quad a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

$Y = (f_1, \dots, f_m)$: Young diagram

m 段目 n box の数 or f_m 個

$\deg Y := f_1 + \dots + f_m$: Y の box の数

$$[a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} : a \text{ の } q\text{-analogue}$$

$$[u] := \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2i\pi\tau}, \quad \text{Im } \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) := 2p^{\frac{1}{8}} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2p^k \cos u + p^{2k})(1 - p^{2k})$$

$$E(z, q) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zq^{k-1})(1 - z^{-1}q^k)(1 - q^k)$$

$$(q)_k := \prod_{j=1}^k (1 - q^j)$$

$$(q)_0 := 1$$

$$[r_0, \dots, r_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} \dots (q)_{r_m}}, & \text{if } \sum r_\mu = m \\ & r_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

G_n : n 次対称群

§ 2 おける vertex - face 対応.

McGuire - Yang の解

vertex model に対する YBE の解の例を挙げる.

V_0 : $sl(2, \mathbb{C})$ の vector 表現空間 $= \mathbb{C}\langle e_1, e_{-1} \rangle$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}$

と 17.

$R(u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_0 \otimes V_0)$

は

$$R(u) := \begin{pmatrix} 1+u & & & \\ & 1 & u & \\ & u & 1 & \\ & & & 1+u \end{pmatrix}$$

足

$e_1 \otimes e_1$

$e_1 \otimes e_{-1}$

$e_{-1} \otimes e_1$

$e_{-1} \otimes e_{-1}$

なるものとする。 $\therefore R(u) \in$

$$R(u) = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} R(u)_{\alpha\beta\mu\nu} E_{\alpha\mu} \otimes E_{\beta\nu}$$

$$\therefore E_{\alpha\mu} e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\alpha$$

を展開して $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ は YBE の解となっている。

YBE を $R(u)$ 自身を用いて書き直せば、

それより $\text{End}_{\mathbb{C}}(V_D \otimes V_D \otimes V_D)$ 中の方程式を
 17.

$$(1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ = (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1)$$

が成り立つ。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

成り立つ P 。すなわち

$$P(u \otimes v) = v \otimes u$$

成り立つ P を用いて $R(u)$ は

$$R(u) = 1 + uP$$

と表わすことができる。すなわち $1 \otimes R(u) = 1 + uP_{23}$

成り立つ。 (P_{ij} は $V_D^{\otimes 3}$ の i, j 成分の交換)

YBE を書くと

$$(1 + uP_{23})(1 + (u+v)P_{12})(1 + vP_{31})$$

$$= (1 + vP_{12})(1 + (u+v)P_{23})(1 + uP_{31})$$

が成り立つ。この式は $\mathbb{C}[S_3]$ 中で明らかに

成立するから、先の通りに定めれば $R(u)_{\alpha\beta\mu\nu}$ は

YBE の解になっている。

McGuire-Yang の解法 Face model の解法をくく

以下のように notation を定めておく

V_a : $sl(2, \mathbb{C})$ の $a+1$ 次元の既約表現空間

$$= \mathbb{C} \langle e_m \mid m = a, a-2, \dots, -a+2, -a \rangle$$

$\{e_m\}$: orthonormal basis in V_a

$V_a \otimes V_b \otimes V_c$ の既約表現空間への分解を

$$V_a \otimes V_b \otimes V_c = \sum_c \Omega_{ac} \otimes V_c$$

よって

$$\dim \Omega_{a, a+2} = 1$$

$$\dim \Omega_{a, a} = 2 \quad (=1 \text{ if } a=0)$$

$$\dim \Omega_{a, c} = 0 \quad (c; \text{その他})$$

である。

まず具体的に Ω_{ac} の basis を構成するのを考える。

$a \neq 0$ から

$$|(a)_m\rangle = e_m \in V_a$$

と書くことにして $|(ab)_m\rangle, |(abc)_m\rangle$ 等を

を inductive に

$$|(ab)_m\rangle := \sum_{m', j} C(bm' | am' - 1 j) |(a)_{m'}\rangle \otimes e_j$$

$$|(abc)_m\rangle := \sum_{m', j} C(cm' | bm' - 1 j) |(ab)_{m'}\rangle \otimes e_j$$

と定める。ここに $\ell_j \in V_\mu$ である。

$C(** | ****)$: Clebsch-Gordan 係数
 (J. 既約表現の Tensor 積 $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ へ

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_j$$

と既約表現に分解して。右辺の V_j の
 weight m の base vector $\ell_m \in V_{j_1}, V_{j_2}$ の
 固定基底 $\{T\}$: weight vector から成る basis に
 して

$$\ell_m = \sum_{m=m_1+m_2} C(j, m | j_1, m_1, j_2, m_2) \ell_{m_1} \otimes \ell_{m_2}$$

と表わして $\{T\}$ の係数として定めらる。

さらに $\|abc\rangle \in$

$$\|abc\rangle := |(abc)_c\rangle$$

と定める。

すると Ω_{ac} の basis として

$$\Omega_{a, a+2} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a+2\rangle, \|a, a-1, a-2\rangle \}$$

$$\Omega_{a, a} = \mathbb{C} \{ \|a, a+1, a\rangle, \|a, a-1, a\rangle \}$$

Clebsch-Gordan 係数を用いて表わせば

$$\|a, a+1, a+2\rangle = \ell_a \otimes \ell_1 \otimes \ell_1$$

$$\|a, a+1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a+1}{a+2}} \ell_a \otimes \ell_1 \otimes \ell_1 - \frac{1}{\sqrt{(a+1)(a+2)}} \ell_a \otimes \ell_{-1} \otimes \ell_1 \\ - \sqrt{\frac{a}{(a+1)(a+2)}} \ell_{a-2} \otimes \ell_1 \otimes \ell_1$$

$$\|a, a-1, a\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \ell_a \otimes \ell_{-1} \otimes \ell_1 - \sqrt{\frac{1}{a+1}} \ell_{a-2} \otimes \ell_1 \otimes \ell_1$$

$$\|a, a-1, a-2\rangle\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \ell_a \otimes \ell_{-1} \otimes \ell_{-1} - \sqrt{\frac{a-1}{a(a+1)}} (\ell_{a-2} \otimes \ell_1 \otimes \ell_{-1} \\ + \ell_{a-2} \otimes \ell_{-1} \otimes \ell_1) \\ + \sqrt{\frac{2}{a(a+1)}} \ell_{a-4} \otimes \ell_1 \otimes \ell_1$$

$R(u)$ に示すように $U(1) \times U(1) \times U(1)$ の $V_a \otimes V_b \otimes V_c$ 上の方程式であるから、 $1 \otimes R(u)$ の様子 $\sum_c \Omega_{ac} \otimes V_c$ の上で見てみる。

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

$U_{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g}$ の普遍展開環

$$\Delta: U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ X & \longmapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X \end{array}$$

217

$$[R(u), \Delta(U_q)] = 0$$

$\therefore [R(u), X \otimes X] = [1 + uP, X \otimes X]$ と
 $v_1 \otimes v_2$ に 対し 計算すればいい。

より

$$[1 \otimes R(u), \Delta^{(3)}(U_q)] = 0$$

すなわち Schur の補題より $1 \otimes R(u)$ は
 $\Omega_{a,c}$ に作用していることになる。その作
 用は先の $\Omega_{a,c}$ の basis への $R(u)$ の作用
 を確かめて

$$R(u) = (1+u) \text{id} \quad \text{on } \Omega_{a, a+2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A-u}{A} & u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} \\ u \sqrt{\frac{(A+1)(A-1)}{A^2}} & \frac{A+u}{A} \end{pmatrix}$$

$$\text{on } \Omega_{a,a}$$

$$\therefore A = a+1$$

であることが直ちにわかる。

ここで face model の Boltzmann weight を上
 に得られた $R(u)$ の行列要素より

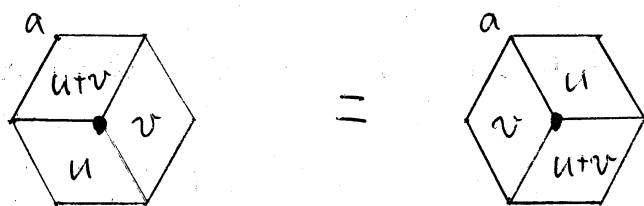
$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ u \\ \square \\ a \pm 1 \end{array} = 1 + u$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ u \\ \square \\ a \end{array} = \frac{A + u}{A}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ \square \\ \square \\ a \end{array} = u \sqrt{\frac{(A-1)(A+1)}{A^2}}, \quad (a: \text{generic})$$

とすると、この Boltzmann weight は STR (star-triangle relation) を満たすのである。

実際に満足する、ことを確かめるには、



に代入して直接計算すればいい。

本節では YBE の McGuire-Yang の解 (vertex model の Boltzmann weight) より STR を満たすような face model の Boltzmann weight を構成した。(おもちゃの vertex-face 対応)

しかし、得られた face model の Boltzmann weight は u に関して rational である。以下では、この vertex-face 対応を trigonometric

に拡張することについても議論する。本来は、さらに elliptic にまで拡張したいのだが、その点についてはここでは触れない。文献を参照してほしい。

§ 3 Quantum R-matrix

Quantum R-matrix は non-exceptional の Lie 環の vector 表現に対してはすべて書けるようにしている。

記号を少し決めておく

$\mathfrak{g}$: classical Lie algebra

$U_q(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の 普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の q -deformation.

特に、 $U_q(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ は generator $E, H_i, X_i^\pm (i=1, \dots, n)$ として次のように定められる。

$$q^{H_i} X_i^\pm q^{-H_i} = q^\pm X_i^\pm$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = q^{\pm \frac{1}{2}} X_j^\pm \quad |i-j|=1$$

$$q^{H_i} X_j^\pm q^{-H_i} = X_j^\pm \quad |i-j| \geq 2$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{q^{2H_i} - q^{-2H_i}}{q - q^{-1}}$$

$$(X_i^\pm)^2 X_j^\pm - \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} X_i^\pm X_j^\pm X_i^\pm + X_j (X_i^\pm)^2 = 0 \quad |i-j|=1$$

$$X_i^\pm X_j^\pm = X_j^\pm X_i^\pm \quad \text{otherwise}$$

また

$$\Delta: U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$$

(comultiplication)

$$\Delta(H_i) = 1 \otimes H_i + H_i \otimes 1$$

$$\Delta(X_i^\pm) = q^{H_i} \otimes X_i^\pm + X_i^\pm \otimes q^{-H_i}$$

とする。

上の $U_q(\mathfrak{g})$ は $q \rightarrow 1$ のとき通常の $\mathfrak{g}$ の普遍展開環となるが、“generic な q ”に対して次のことが知られている。

命題 q が generic なとき algebra $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現は $\mathfrak{g}$ のそれにより parametrize される。

このとき quantum R-matrix とは $\mathfrak{g}$ とその既約表現 V に対し $R(u) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ で

$$(1) [R(u), \Delta(U_q(\mathfrak{g}))] = 0$$

$$(2) R(u) (\omega q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) \\ = (q^{H_\theta} \otimes X_\theta^+ + \omega X_\theta^+ \otimes q^{-H_\theta}) R(u)$$

θ : highest root, $\omega = e^u$

を満たすようなものを $R(u)$ と定義される。

また、このように (1), (2) を満たす $R(u)$ は YBE

$$(1 \otimes R(u))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(v)) \\ = (R(v) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(u) \otimes 1)$$

を満たす。

現在までのところ $X_n = A_n, B_n, C_n, D_n$ の vector 表現に対して YBE の trigonometric solution が見つかっている。

例 $A_1^{(1)}$

$V_0 = \mathbb{C} \langle \varrho_1, \varrho_{-1} \rangle$: vector 表現

$$R(u) = \begin{pmatrix} [1+u]_q & & & \\ & q^u & [u]_q & \\ & [u]_q & q^u & \\ & & & [1+u]_q \end{pmatrix}$$

$$\therefore [a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} = \frac{\sin \pi a/L}{\sin \pi/L} \quad (q = e^{i\pi/L})$$

上の例での $[a]_q$ は $\lim_{q \rightarrow 1} [a]_q = a$ といふ意味で a の q -analogue である。

例の $R(u)$ を用いて Jacobi model をつくろう。
前節と同様に R matrix の定義の (1) より、

さらに Schur の補題を用いて、今度は Wigner calculus の q -analogue を実行し $R(u)$ の

$V_A \otimes V_D \otimes V_D$ への action が決まる。結果の λ と記す。

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \pm 1 \end{array} = [1+u]_q \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]_q}{[A]_q}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = [u]_q \sqrt{\frac{[A+1]_q [A-1]_q}{[A]_q^2}} \quad (\text{複号同順})$$

であるが、これは § 2 で得た Boltzmann weight の q -analogue であり、 $q \rightarrow 1$ である。当然 § 2 の結果となる。

上の Boltzmann weight は u について Trigonometric ($\because [u]_q = \sin \frac{\pi u}{L} / \sin \frac{\pi}{L}$) であるが、これは elliptic に昇格させることができる。

$$[u] = \theta_1\left(\frac{\pi u}{L}, p\right), \quad p = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im } \tau > 0$$

$$\theta_1(u, p) = 2p^{1/8} \sin u \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2p^k \cos 2u + p^{2k})(1 - p^k)$$

$$\text{であるが } p \rightarrow 0 \text{ であるとき } \frac{[u]}{[1]} \rightarrow [u]_q \text{ であり}$$

Boltzmann weight は

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \pm 1 \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]} \quad \begin{array}{c} a \\ \square \\ a \end{array} \begin{array}{c} a \pm 1 \\ \square \\ a \end{array} = \frac{[A \mp u]}{[A]}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\mp 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[A+1][A-1]}{[A]^2}}$$

とすといふことは elliptic への拡張をいっている。STR を満たすといふ § 5 において証明するといふことである。

§ 2 から すでに vertex model から face model をつくり出して来たが、face model から vertex model への対応は、trigonometric の段階で

$$\lim_{\substack{|A| \rightarrow \infty \\ |q| < 1}} \begin{array}{c} a \\ \square \\ a_{\mp 1} \end{array} \begin{array}{c} a_{\pm 1} \\ u \\ a \end{array} = \begin{array}{c} \pm \\ \hline u \\ \hline \mp \end{array} \quad (A = a+1)$$

といふことが得られる。しかし elliptic の段階での face から vertex への対応については知られていない。

§4 $X_n^{(1) \neq 1}$ Jacobi model (unrestricted model)

記号

$X_n^{(1)}$: affine Lie algebra $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$
 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$: fundamental weight
 $(A_n^{(1)} \text{ の } \mu \in \mathbb{Z} \text{ に対して } \Lambda_{\mu+n+1} = \Lambda_\mu \text{ として})$

$$\rho := \sum_i \Lambda_i$$

δ : null root

$$\bar{\Lambda}_\mu := \Lambda_\mu - \Lambda_0$$

$$\mathfrak{h}^* := \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$$

$X_n^{(1)} = A_n^{(1)}$ のとき $\mathfrak{h}^*$ の内積として $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$

$\varepsilon \in \mathfrak{h}^*$ の orthonormal basis として

$$\bar{\Lambda}_\mu = \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{\mu-1} - \mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{n+1} \sum_i \varepsilon_i$$

として

$$\langle \Lambda_0, \varepsilon_\mu \rangle = \langle \delta, \varepsilon_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \delta \rangle = 0$$

$$\langle \Lambda_0, \delta \rangle = 1$$

1: δ に対して Λ_0 である。 $T: A_n^{(1)}$ の vector 表現
 の weight として

$$\hat{D} := \Lambda_{n+1} - \Lambda_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon$$

$$\text{と書く: } \alpha \in \mathbb{C} \quad \left(\sum_{\nu=0}^n \hat{\nu} = 0 \right)$$

$A := \{ X_m \text{ の vector 表現の weight の集合} \}$

であるとする。

$X_m^{(1)}$ -型 face model

次のように model を設定する。

local state (自由度の取り得る値) の集合 $\mathcal{A}$ と

$\mathcal{A} = \mathfrak{h}^*$: $\mathfrak{h}$ は $X_m^{(1)}$ の Cartan subalgebra
 とし、 $\mathcal{A}$ の 2 元に対して weak admissibility を
 いう事とする。

$a, b \in \mathcal{A}$ に対して
 (a, b) が (weakly) admissible



$$b - a \in A$$

により定める。 (a, b) が admissible であっても (b, a) が admissible であるとは限らないことを注意しておく。

β は Boltzmann weight についての (性質 N)
 とする。

性質 N. $(a, b), (b, c), (a, d), (d, c)$ が
すべて admissible で $\tau_{\delta, 1} \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array} = 0$$

とする。 $\left(\begin{array}{c} a \xrightarrow{\quad} b \\ \text{みどり} \end{array} \right) \text{ かつ } (a, b) \text{ が admissible かつ } \tau_{\delta, 1} \neq 0$

このとき 次のことが知られている。

定理 X_n -型 Lie algebra に対し

(性質 N) を満たす。かつ STR も
満たすような u について elliptic δ
face model の Boltzmann weight

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & u & \downarrow \\ d & \xrightarrow{\quad} & c \end{array}$$

, $a, b, c, d \in \mathcal{A}$
がある。

ここで A_n の vector 表現 について その $\tau_{\delta, 1}$
Boltzmann weight を挙げよう。

$a \in \mathcal{A}$, $\hat{\mu}, \hat{\nu} \in \mathcal{A}$ に対し

$$a_{\mu} := \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} := a_{\mu} - a_{\nu}$$

と置く。

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ \square \\ a+2\hat{\mu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} = \frac{[1+u]}{[1]} \\
& \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\mu} \\ \square \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \nu \end{array} = \frac{[a_{\mu\nu}-u]}{[a_{\mu\nu}]} \\
& \begin{array}{c} a \\ \square \\ a+\hat{\mu} \end{array} \begin{array}{c} a+\hat{\nu} \\ \square \\ a+\hat{\mu}+\hat{\nu} \end{array} = \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \mu \end{array} = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu}+1][a_{\mu\nu}-1]}{[a_{\mu\nu}]^2}}
\end{aligned}$$

上記の Boltzmann weight は Lie algebra の classical r 部分にしか本質的に関係していないことに注意する。

$A_m - \frac{\pi i}{2}$ の vector 表現に関する Boltzmann weight は u について 1 次の、 $B_m, C_m, D_m - \frac{\pi i}{2}$ の vector 表現に関する Boltzmann weight は u について 2 次のである。(§8 の Appendix を参照)

§5 STR の証明の例

ここで §4 の A_n -型 の Lie algebra の vector 表現 に関する Boltzmann weight が STR を満たすことを証明しておく。

まず、いくつかの補題を用意する。

補題 1

(1) Initial condition.

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{0} \\ d \quad c \end{array} = \delta_{bd}.$$

(2) First inversion relation

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{c} \diagup -u \\ u \diagdown \end{array}} \\ d \quad c \end{array} := \sum_g W \left(\begin{array}{c} a \quad g \\ d \quad c \end{array} \middle| u \right) W \left(\begin{array}{c} a \quad b \\ g \quad c \end{array} \middle| -u \right) \\ = \rho(u) \delta_{bd}, \quad \rho(u) = \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2}$$

(補題 1 の証明)

(1) A_n の vector 表現 の Boltzmann weight の 表式 (1) 明らか。

(2) 次の 3 つ の 場合 に 分ける。

$$(i) \quad \begin{array}{c} \mu \\ \boxed{\begin{array}{c} \diagup -u \\ u \diagdown \end{array}} \\ \mu \end{array} = \rho(u) \quad \text{1) 明らか.}$$

(ii)

$$\mu \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \mu \\ \star \quad -u \\ \hline u \quad \star \end{array} \\ \hline \end{array} = \frac{[a-u][a+u]}{[a]^2} + \frac{[u][-u][a+1][a-1]}{[1]^2 [1]^2}$$

($a = a_{\mu\nu}$)

∴ Boltzmann weight 中の $\star, \star$ 印の u, u に $\langle \rangle$ weight 1 (性質 N) γ $(\mu, \nu), (\nu, \mu)$ の組み合わせのみで、それ以外右辺の第一項、第二項に対応しているのである。

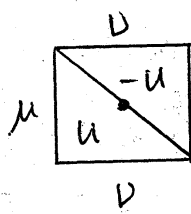
∴ θ 函数 $[\]$ についての等式

$$\begin{aligned} & [x+z][x-z][y+w][y-w] \\ & \quad - [x+w][x-w][y+z][y-z] \\ & = [x+y][x-y][z+w][z-w] \end{aligned}$$

を利用する(1)

(上式の右辺)

$$\begin{aligned} & = \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \left\{ [1][-1][a+u][a-u] \right. \\ & \quad \left. - [u][-u][a+1][a-1] \right\} \\ & = \frac{-1}{[1]^2 [a]^2} \cdot [a][-a][1+u][1-u] \\ & = \frac{[1+u][1-u]}{[1]^2} = \rho(u) \end{aligned}$$

(3)  $\mu = \frac{[a-u][u]}{[a][1]} A + \frac{[u]}{[1]} A \frac{[-a+u]}{[-a]}$

$\therefore \therefore \therefore$ $A = \sqrt{\frac{[a+1][a-1]}{[a]^2}}$ 

補題 2 $f(u)$ が entire function であり

τ は恒等的に $\tau \neq 0$ で $f(u)$ を与える。このとき

$$f(u+L) = e^{-2\pi i B} f(u)$$

$$f(u+L\tau) = e^{-2\pi i (A_1 + A_2 \tau/L)} f(u)$$

かつ $\text{Im} \tau > 0$, $L \in \mathbb{R}$, $A_1, B_1, A_2 \in \mathbb{C}$

が成り立つ。 $f(u)$ は $\text{mod } Q$, $Q = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$

で A_2 個の零点をとり

$$\sum (\text{零点}) \equiv L(B\tau + \frac{A_2}{2} - A_1) \pmod{Q}$$

(補題 2 の証明)

略



STR を満たす f の証明

$$f(u) = \sum_g f \left(\begin{array}{c} a \quad b \\ u+v \quad g \quad v \\ e \quad u \quad d \end{array} \right) - \sum_g f \left(\begin{array}{c} a \quad b \\ u \quad g \\ v \quad u+v \\ e \quad d \end{array} \right)$$

とおく。 $f(u)$ は 外点の a, b, c, d, e, f と v を固定して u の函数と考えるのである。

目標は $f(u) \equiv 0$ を示すことである。

initial condition v

$$f(0) = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline & v & v \\ \hline f & e & d \end{array} - \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline & v & v \\ \hline f & e & d \end{array} = 0$$

ゆえに $u=0$ は $f(u)$ の零点。 $\exists T =$

$$\begin{aligned} &= \delta_{bf} \begin{array}{ccc} b & c \\ \hline & v \\ \hline e & d \end{array} - \delta_{ce} \begin{array}{ccc} a & b \\ \hline & -v \\ \hline f & c \end{array} \\ &= \delta_{bf} \delta_{ce} \rho(-v) - \delta_{ce} \delta_{bf} \rho(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

($\because \rho(u)$ は 偶函数)

ゆえに $u=-v$ も $f(u)$ の零点

そこで $[u]$ の period は $L, L\tau$ ($p = e^{2\pi i \tau}$) であり

$$\left. \begin{aligned} [u+L] &= -[u] \\ [u+L\tau] &= e^{-\pi i \tau} - \frac{2\pi i \tau}{L} \cdot [u] \end{aligned} \right\} (*)$$

である。

$$f(u) = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array}$$

Diagram 1: A hexagon with vertices labeled $a, \beta, \gamma, \nu, \mu, \kappa$ clockwise from top. Internal vertices are $u+v$ (top), v (right), u (bottom), and $u+v$ (left). A central dot is connected to these four vertices.

Diagram 2: A hexagon with vertices labeled $a, \beta, \gamma, \nu, \mu, \kappa$ clockwise from top. Internal vertices are u (top), v (right), $u+v$ (bottom), and u (left). A central dot is connected to these four vertices.

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \kappa \in A$ を用いて書いてお
いて、 $(\bullet)$ は和を意味する

$f(u) \neq 0$ なら

$$f(u+L) = f(u)$$

$$f(u+L\tau) = \exp \left\{ -2\pi i \tau - 2\pi i \left(\frac{2u+v+\delta_{\kappa\nu}+\delta_{\mu\nu}}{L} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma} \right) \right\} f(u)$$

である。この前ページの(*)式と

Boltzmann weight の式を直接 f に代入して
計算すれば示される。

そこで $f(u)$ に対し 補題 2 を用いて
 $\text{mod } \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}L + \mathbb{Z}L\tau$ で $f(u)$ の零点
は 2 個であることがわかる。つまりそれは
 0 と $-v$ である。さらに補題 2 の後半より

$$\Sigma(\text{零点}) = 0 - v$$

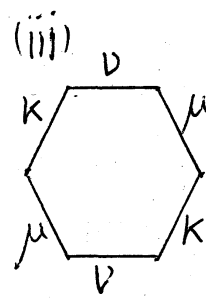
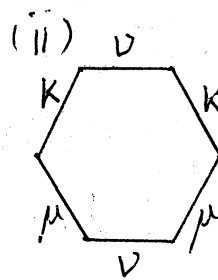
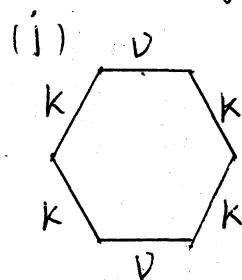
$$\equiv L \left(0 + 1 - \frac{v + \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma}}{L} \right) \text{mod } \mathcal{Q}$$

$$\therefore \delta_{\kappa\nu} + \delta_{\mu\nu} - a_{\kappa\beta} - a_{\mu\gamma} \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{Q}$$

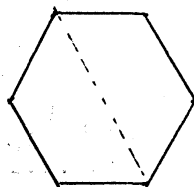
であることが分かるが、この式が成立するのは、

$K \neq \nu, \mu \neq \nu$ から $\{K, \mu\} = \{\beta, \gamma\}$...
なる場合のみである。再び補題2を用い、 ν 以外に $f(u) \equiv 0$ であり
STRは満たされることがわかる。よって後述の
上の場合にも STR が成立するということが
示されている。

次の3つの場合に合ける



(ii), (iii) の場合は u のかわりに v の函数
を見て先と同様にすればできる。→ 初
 u と v を入れ換えるということを考えてみると
それは



なる破線で折り返すということであるが (i)
(ii) を折り返したものは、(i), (ii), (iii) のいずれ

でもなっていないので、既に示した場合には含
 まない STR が成立するのかわかる。

(iii) の場合について、六角形内部の
 edge に対応する weight がすべて定例

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \\
 &= \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \\
 &\quad - \frac{[u]}{[1]} A_{\mu v} \cdot \frac{[v]}{[1]} A_{k\mu} \cdot \frac{[u+v]}{[1]} A_{kv} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore A_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{[a_{\alpha\beta}+1][a_{\alpha\beta}-1]}{[a_{\alpha\beta}]^2}}$$

と Boltzmann weight が STR を 証明 するには
 示す必要がある

§6 Restriction

restricted model は Lie algebra X_m とその表現
及び “level” を定められ決まる。unrestricted
model では local state は無限個あるが、この
restriction を行なうと l により local state は
有限個となる。今までに物理の方から知られて
いる model は当然この restriction を行なった後の
model である。

l は 2 以上の整数として restricted model の
local state の集合 $\mathcal{J}_l$ は

$\mathcal{J}_l := \{ X_m \text{ の level } l \text{ の dominant integral weight} \}$
である。 ($\#\mathcal{J}_l < +\infty$) $\mathcal{J}_l$ の 2 元に対し “strong”
admissibility を

「 $a, b \in \mathcal{J}_l$ について (a, b) が admissible」

II

「任意の Dynkin diagram automorphism σ に対して

$$V(\overline{\sigma(a)}) \otimes V_0 > V(\overline{\sigma(b)})$$

すなわち、 $V_0: X_m$ の vector 表現, $\bar{a}; a$ の classical part

$V(a): X_m$ の highest weight a の既約表現」

を定義する。

§4 の unrestricted model 1 において
Boltzmann weight Φ の $[u] = \theta(\frac{\pi u}{L}, p)$ の L
に次の §3 に restrict する。

$$L = t(l+g)$$

g : dual Coxeter number of $X_n^{(1)}$

l : level

$\therefore$ g, t は実際に 1 以下の数である

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
g	$n+1$	$2n-1$	$n+1$	$2n-2$
t	1	1	2	1

このとき

定理

unrestricted model 1 において L に
上の §3 に specialize しても $\frac{1}{\pi}$ の
"strong" admissibility のとき STR が
成立する。

例として挙げる。

$A_n^{(1)}$ の場合 $L = l + n + 1$

$$\mu \begin{array}{c} \alpha \\ \boxed{u} \\ \beta \end{array} = W \left(\begin{array}{cc} a & a + \hat{\alpha} \\ a + \hat{\mu} & a + \hat{\alpha} + \hat{\beta} \end{array} \middle| u \right), \quad \Gamma = \Gamma' = 1$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

で、あきから

$$a = (L + a_n - a_0 - 1) \Lambda_0 + \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu-1} - a_{\mu-2}) \Lambda_\mu$$

の $a \in \mathcal{J}$. (strong) admissibility 1)

$$a \in \mathcal{J}_1, \quad a_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}, \quad \sum a_\mu = 0$$

$$L + a_n > a_0 > a_1 > \dots > a_n$$

と同様に「 $\mathcal{J}$ 」. さらに admissibility の条件は

$$1) \text{ なる } 0 < |a_{\mu\nu}| < L \text{ かつ } [a_{\mu\nu}] \neq 0$$

→ 2) Boltzmann weight 1) 発散しない。

STR の証明

$A_n^{(1)}$ の restricted model
に於いて Boltzmann weight の STR を証明す
ることを証明する。以下に

$$\sum_g \int \text{Diagram 1} = \sum_g \int \text{Diagram 2}$$

Diagram 1: A hexagon with vertices labeled a (top), b (top-right), c (right), d (bottom-right), e (bottom), and f (bottom-left). Internal edges are labeled u+v (top-left), u (bottom-left), g (center), v (top-right), and u+v (bottom-right).

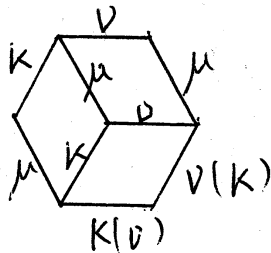
Diagram 2: A hexagon with vertices labeled a (top), b (top-right), c (right), d (bottom-right), e (bottom), and f (bottom-left). Internal edges are labeled u (top-right), v (top-left), g (center), u+v (bottom-right), and u+v (bottom-left).

に於いて外点 a, b, c, d, e, f がすべて $\mathcal{J}_1$ の元であって、 g が $\mathcal{J}_1$ の元であることが保証

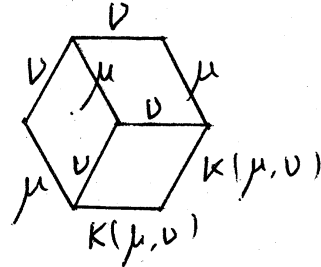
ではない。 Boltzmann weight $^*\square$ において
 $+$ の位置にくる weight が dominant integral
 ではないと発散の恐れがあるが その恐れを危険
 ではないと示しておく

STR の右辺で (外点) $\in \mathcal{V}_1$ でありかつ
 g が dominant integral ではないと恐れがある
 のは、 k, v, μ が互いに異なるものとして

(i)



(ii)



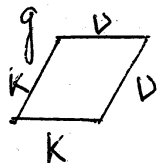
なる場合の u としてあるが、これは u として

g なる部分の Boltzmann weight が有限
 であることを示す。

$$(a + \hat{\mu})_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\mu} - \delta_{\beta\mu}$$

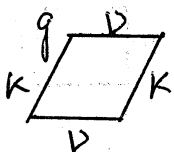
なる式を用いる

(i)



$$= \frac{[1+u]}{[u]}$$

if 0.k



$$= \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[g_{kv}+1][g_{kv}-1]}{[g_{kv}]^2}}$$

ii) $[g_{\mu\nu}] \neq 0$ を示す。まず

$$g = a + \hat{\mu} \quad (\because \text{diag } g) \quad \text{と} \quad (a + \hat{\mu})_{\kappa\nu} = a_{\kappa\nu}$$

ii)

$$[g_{\kappa\nu}] = [(a + \hat{\mu})_{\kappa\nu}] = [a_{\kappa\nu}] \neq 0$$

(ii) の場合も同様である。

$$\begin{array}{c} g \\ \nu \quad \kappa \end{array} = \begin{cases} \frac{[1+u]}{[1]} & \kappa = \nu \\ \frac{[g_{\nu\kappa} - u]}{[g_{\nu\kappa}]} & \kappa \neq \nu \end{cases}$$

iii) $\kappa \neq \nu$ かつ $\kappa \neq \mu$ の場合。

$$g_{\nu\kappa} = (a + \hat{\mu})_{\nu\kappa} = a_{\nu\kappa}$$

$$\therefore a \in \mathcal{A} \quad \text{ii)} \quad [g_{\nu\kappa}] = [a_{\nu\kappa}] \neq 0$$

$\kappa = \mu$ の場合。

$$g_{\nu\mu} = a_{\nu\mu} - 1$$

$$\therefore a_{\nu\mu} - 1 = (a + \hat{\nu} + 2\hat{\mu})_{\nu\mu} = c_{\nu\mu} \neq 0$$

iii) 0. K.

以上で発散の恐れはなくなる。以下に STR の証明に入る。

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ g \quad c \end{array} \quad \text{と} \quad a, b, c \in \mathcal{A}, g \notin \mathcal{A} \text{ かつ } \mu \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \nu \end{array} \mu \text{ の場合}$$

のみである。

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

$\in \mathcal{J}(1)^n$

$$g = a + \hat{\mu}$$

$$= (a_0, \dots, a_{\mu+1}, \dots, a_n) - \frac{1}{n+1} (1, 1, \dots, 1)$$

g is dominant integral weight $\tau^T f \in \mathcal{J}$.

$$L + a_n > a_0 > \dots > a_{\mu-1} > a_{\mu+1} > a_{\mu+2} > \dots > a_n$$

τ is a condition satisfying $\tau \in \mathcal{J}^T f$, $\tau \in \mathcal{J}$

$$a_{\mu-1} = a_{\mu+1}$$

$\in \mathcal{J}$ is τ such that $\nu = \mu - 1 \in \mathcal{J}(1)^n \cap \mathcal{J}(1)$

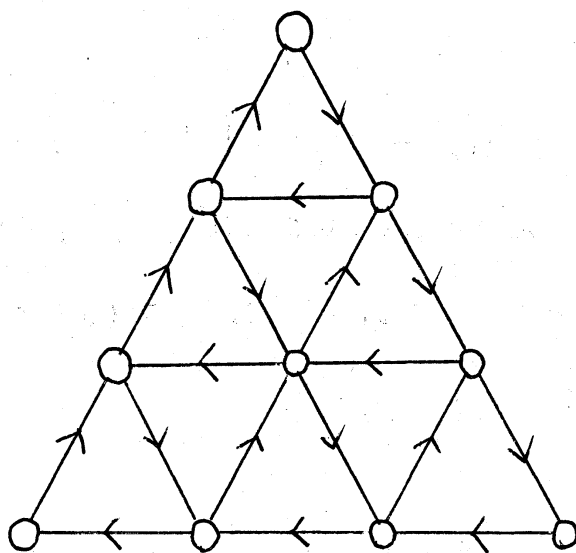
$$a_{\mu\nu} + 1 = 0$$

$\in \mathcal{J}$ is τ such that $\nu = 0$

$$\mu \begin{array}{c} \nu \\ \square \\ \nu \end{array} \mu = \frac{[u]}{[1]} \sqrt{\frac{[a_{\mu\nu}+1][a_{\mu\nu}-1]}{[a_{\mu\nu}]^2}} = 0$$

$\rightarrow \mathcal{J}$ unrestricted model of STR $\mathcal{M}$ is used
 τ local state is $\mathcal{J}_1$ is a restriction of STR $\mathcal{M}$ is established.
 (The same discussion is made for the left side.)

$n=3, l=3$ の local state $\mathcal{S}_1$



$b \leftarrow a$ if (a, b) is admissible τ^u
 あり $\tau \in \mathbb{F}$ 出す。

$\therefore a \in \mathbb{F} \quad \# \mathcal{S}_1 = 10$

§7 Fusion Procedure

Fusion procedure とは、基本表現に対する Boltzmann weight から 高い表現に対する Boltzmann weight を構成する手続子である。現在までのところ、この手続子に A 型の model に対してのみ完成している。以下で主に restricted model について述べる。

Boltzmann weight の modification.

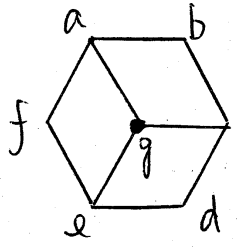
本節では次のように Boltzmann weight を modify する。

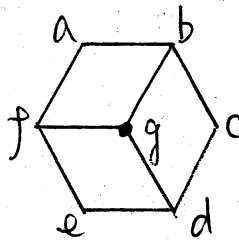
$$\widetilde{w}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) = w\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) \left\{ \frac{s(a,d)s(d,c)}{s(a,b)s(b,c)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$s(a,b) := \prod_{\lambda \neq \mu} \left\{ [a_{\mu\lambda}] [a_{\mu\lambda} + 1] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\widehat{\mu} = b - a$$

$w\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ が STR を満たすこと $\widetilde{w}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ も STR を満たすこと $W = \square$ を表わす。



$$= \left\{ \frac{S(a,b) S(b,c) S(c,d)}{S(a,f) S(f,e) S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$


$$= \left\{ \frac{S(a,b) S(b,c) S(c,d)}{S(a,f) S(f,e) S(e,d)} \right\}^{-1/2}$$

が $\widetilde{W}$ についての STR を与えていることから明らかである。 $\widetilde{W}(a^b_c | u)$ を実際に計算すると

$$\widetilde{W}(a^{a+\hat{\mu}}_{a+\hat{\mu}} a^{a+2\hat{\mu}}_{a+2\hat{\mu}} | u) = \frac{[1+u]}{[1]}$$

$$\widetilde{W}(a^{a+\hat{\mu}}_{a+\hat{\mu}} a^{a+\hat{\mu}}_{a+\hat{\mu}+\hat{\nu}} | u) = \frac{[a_{\mu\nu}-u]}{[a_{\mu\nu}]}$$

$$\widetilde{W}(a^{a+\hat{\nu}}_{a+\hat{\mu}} a^{a+\hat{\nu}}_{a+\hat{\mu}+\hat{\nu}} | u) = \frac{[u][a_{\mu\nu}+1]}{[1][a_{\mu\nu}]}$$

以降本節ではこの $\widetilde{W}$ を W と書き上の表示の Boltzmann weight を用いることにする。

Symmetric Tensor 表現

後述する一般の表現に対する議論から然る symmetric Tensor 表現についての結果は得られるが、この場合については端的に結果

に致るゝで別に求めておくことにする。

まず次の補題を用意する。

補題

$$h_N(a, b | u) = \sum_p \mu \begin{array}{c} a \quad a^{(1)} \quad \quad \quad a^{(N+1)} \quad b \\ \hline u \quad u+1 \quad \cdots \quad u+N-1 \\ \hline d \quad d^{(1)} \quad \quad \quad d^{(N+1)} \quad c \end{array} \\ = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{[u+j]}{[1]} \right\} \frac{[u+b_0-a_\mu] \prod_{\lambda \neq \mu} [b_0-a_\lambda+1]}{\prod_{\lambda} [c_\nu \lambda + \delta_\nu \lambda]}$$

$$v_N(a, b | u) = \sum_{p'} \begin{array}{c} a \quad \nu \quad b \\ \hline a^{(1)} \quad u+N-1 \quad b^{(1)} \\ \vdots \\ \hline a^{(N+1)} \quad u \quad b^{(N+1)} \\ \hline d \quad \mu \quad c \end{array} \\ = \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{[u+j]}{[1]} \right\} \frac{[u+c_\mu-b_\nu] \prod_{\lambda \neq \mu} [c_\lambda-b_\nu+1]}{\prod_{\lambda} [c_\nu \lambda + \delta_\nu \lambda]}$$

$$\begin{aligned} \therefore p &= (a^{(0)}, \dots, a^{(N)}) , \quad a^{(0)}=a, \quad a^{(N)}=b \\ p' &= (b^{(0)}, \dots, b^{(N)}) , \quad b^{(0)}=b, \quad b^{(N)}=c \end{aligned}$$

で $\sum_p$ は $a^{(i)} \in \mathcal{A}_1$, $(a^{(i)}, a^{(i+1)})$ は weakly-admissible である $\forall$ path p について動く。 $\sum_{p'}$ も同様である。

さらに $q = (d=d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(N)}=c)$, $q' = (a=a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}=d)$ すべて i について $(d^{(i)}, d^{(i+1)})$ は weakly-admissible で $d^{(i)} \notin \mathcal{A}_1$ である $d^{(i)}$ のとりかたがある $h_N = 0$

かつ h_N は q のとりかたにだけ決まる。 v_N についても同様

(証明)

補題の前半の数学的帰納法により

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \cdots \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} a \quad \hat{\mu} \quad a+\hat{\mu} \\ \hat{\mu} \quad \hat{\mu} \quad \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & u+1 \\ \hline \end{array} \cdots \\
 \begin{array}{c} a \\ \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & \cdots \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} a \quad \hat{\nu} \quad a+\hat{\nu} \\ \hat{\nu} \quad \hat{\nu} \quad \hat{\nu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & u+1 \\ \hline \end{array} \cdots \\
 + \begin{array}{c} a \quad \hat{\nu} \quad a+\hat{\nu} \\ \hat{\mu} \quad \hat{\mu} \quad \hat{\mu} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u & u+1 \\ \hline \end{array} \cdots
 \end{array}$$

を計算すれば直ちに分かる。後半の q に依らずに成り立つ表式 η 。 q が定理中に述べたものであるとすると η により $h_N = 0$ となる。 $\exists \alpha \in \mathfrak{g}$ $\mu \neq \nu-1$ かつ ν で $a_{\nu-1} - b_{\nu} \equiv 1 \pmod{L}$ となる ν があざから表式中の因子が 0 となる。示される。

ν_N についても同様。

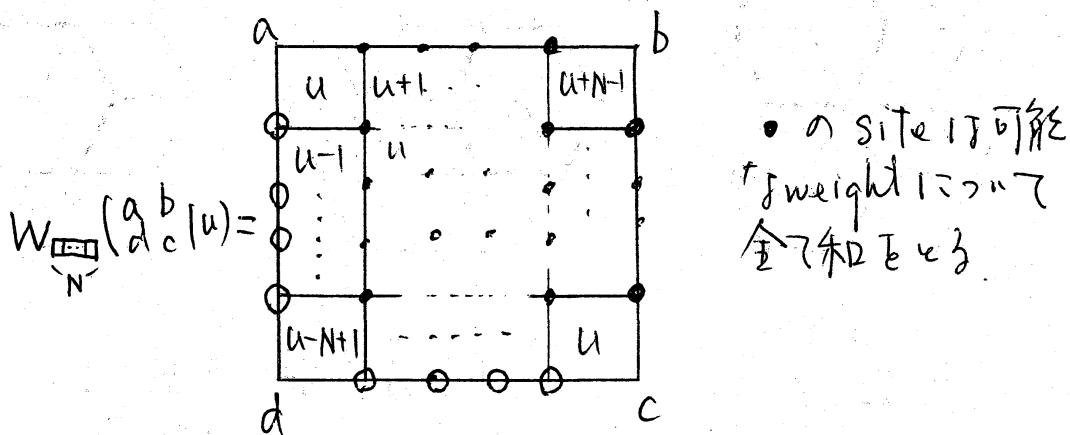
補題中の $h_N \neq 0$ である T への q の条件は

$$V(\sigma(d)) \otimes V(\square) \supset V(\sigma(c)) \quad \text{for } \forall \sigma$$

σ : Dynkin diagram automorphism

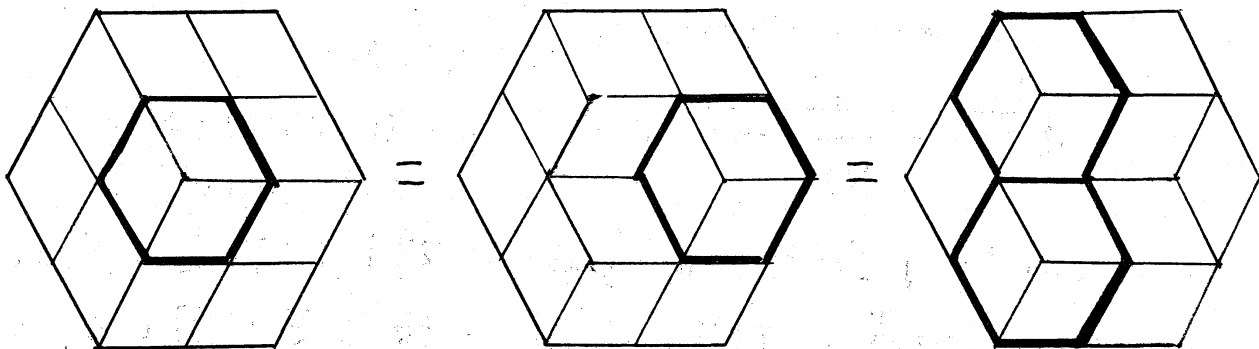
と同値である。 vector 表現の η の strong

admissibility と同じであることに注意する。



$W_{\boxed{N}} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right)$ を定める問題の h_N, v_N の
 path q, q' に対する非依存性 W_N は 0 印
 の site のとり方に依らずに定まること。先の注意
 より a, b, c, d は “strong admissibility w.r.t $V_{\boxed{N}}$ ”
 を満たすものの $W_N \neq 0$ が分かる。これは
 symmetric tensor 表現に対する Boltzmann weight
 である。

$N=2$ の場合に $W^{(2)}$ が STR を満足すること
 を示しておく。



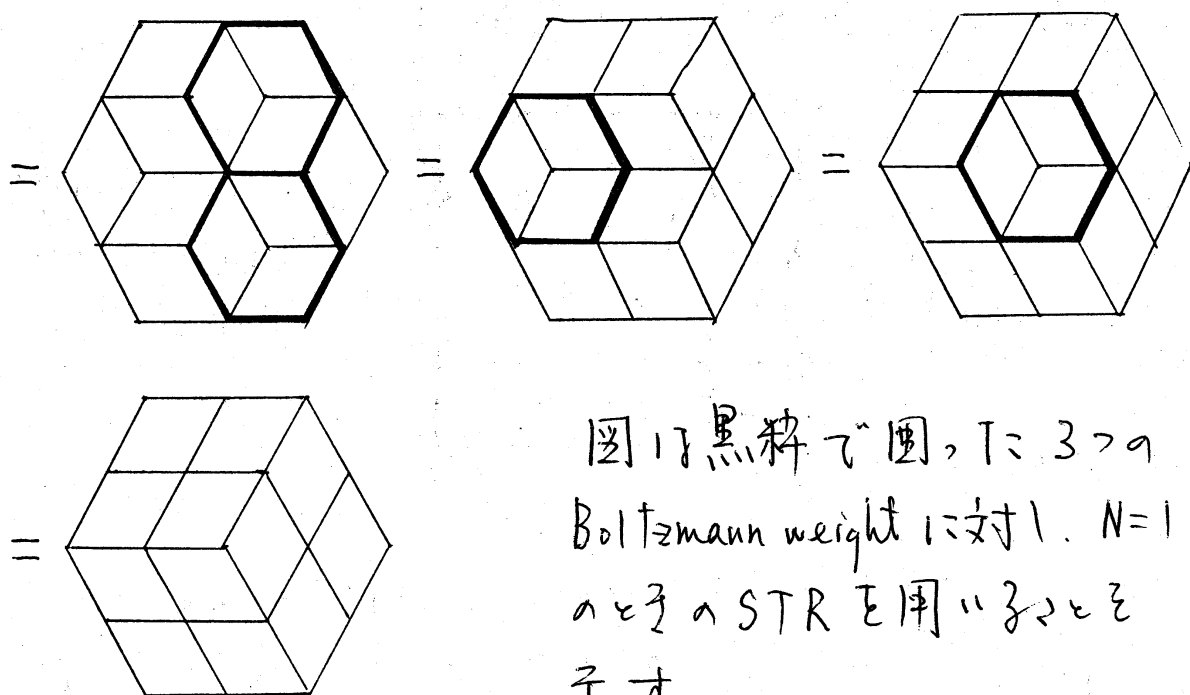
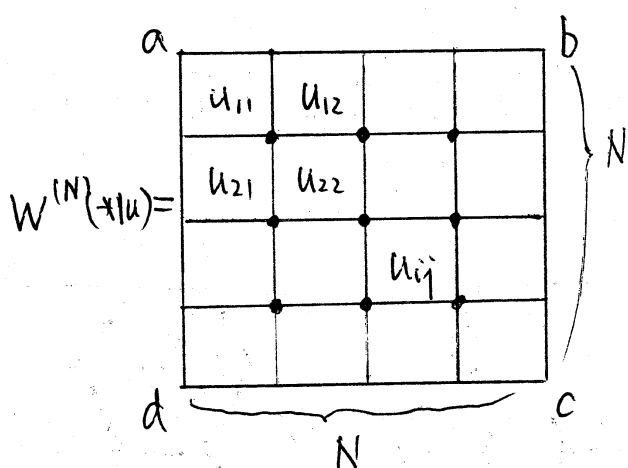


図1は黒枠で囲った3つの Boltzmann weight に対し、 $N=1$ のときの STR を用いて示す。

一般の表現

まず次の3つの Boltzmann weight を考える。



$$a, b, c, d \in \mathcal{J}_1$$

内点のみすべて和をとる
(symmetric tensor の場合
と異なる)

$$u_{ij} = u + \alpha_i(0) - \alpha_j(0) \quad (\text{cf Appendix})$$

この3つの Boltzmann weight に対しては上の3つの vector 表現に対する STR を繰り返して用いる。

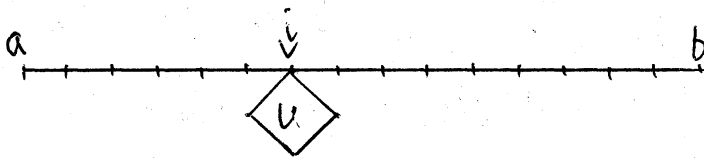
1に $\mathcal{M}$ や1に $\mathcal{M}$ STRが成立する、と命令する。

$$V_{ab}^{(N)} := \left\{ \bigoplus_{\mathbb{C}} |a^{(0)}, \dots, a^{(N)}\rangle \mid \begin{array}{l} a^{(0)} = a, a^{(N)} = b \\ a^{(i)} \in \mathcal{A}_1, a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

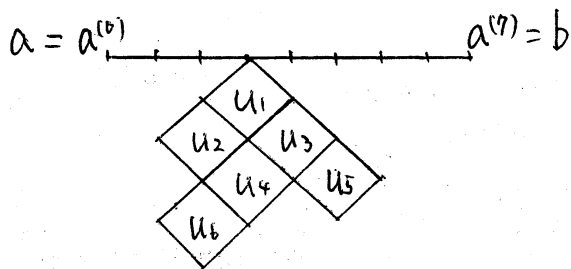
と1次の $\mathcal{M}$ operatorを定める。

$$W_i(u) |a^{(0)} \dots a^{(N)}\rangle \\ := \sum_{a^{(i)}} W \left(\begin{array}{cc} a^{(i-1)} & a^{(i)} \\ a^{(i)} & a^{(i+1)} \end{array} \middle| u \right) |a^{(0)} \dots a^{(i-1)} a^{(i+1)} \dots a^{(N)}\rangle$$

この operator W_i は face operator と呼ぶ。この operator の matrix element は vector 表現の Boltzmann weight から成っている、ことに注意する。 W_i は $V_{ab}^{(N)}$ に作用している。



のように表示。ここで $a \longrightarrow b \in V_{ab}^{(N)}$ として operator $\diamond u$ が i番目の位置に下から作用している、と見做すのである。例えば



1に.

$$W_2(u_6)W_5(u_5)W_3(u_4)W_4(u_3)W_2(u_2)W_3(u_1)$$

が $V_{ab}^{(1)}$ に作用してこれを読むのである。

Young diagram Y ($\deg Y = N$) に対する Young symmetrizer の deformation F_Y については (F_Y の定義は本書の最後の Appendix 参照, F_Y は Jacobi operator の合成に $\mathbb{C}$ によって与えられる。Boltzmann weight の rational limit で F_Y は通常の Young symmetrizer となる。) $\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} := F_Y(V_{ab}^{(N)})$

で $\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)}$ を定める。このとき $a, b \in \mathcal{A}$ が表現 Y に関与して admissible であるとき $\dim \widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \geq 1$ となる。

$$(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(N)}), \quad a^{(0)} = a, \quad a^{(N)} = b, \quad a^{(i+1)} - a^{(i)} \in \mathcal{A}$$

なる path が $\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)}$ 中にあり得ることを定める。
注意

(1) Y が symmetric tensor であるとき

$$\dim \widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \leq 1$$

Y が一般のときにも Boltzmann weight の通路上の edge 上の variable を指定して $\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)}$ を定める。

ら「 δ 」が(後述). symmetric tensor の場合には
その必要が「 δ 」がないのでこの事情に「 δ 」。

(2). L が + 分大子 γ には次のことが知られている。

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)} &= \text{multiplicity of } V_{\bar{b}} \text{ in } V_{\bar{a}} \otimes V_{\gamma} \\ &= [\rho_{\bar{a}} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\bar{b}}] \\ &= \min_{\sigma} [\rho_{\sigma(\bar{a})} \otimes \rho_{\gamma}, \rho_{\sigma(\bar{b})}] \end{aligned}$$

σ : Dynkin diagram automorphism of $A_n^{(1)}$

$(\rho_{\bar{a}}, V_{\bar{a}})$: highest weight $\bar{a}$ の A_n の既約表現

$\bar{a}$: a の classical part

ゆえに L が + 分大子 γ には (a, b) が
表現 γ に関して admissible である。

$$V_{\sigma(\bar{a})} \otimes V_{\gamma} \supset V_{\sigma(\bar{b})} \text{ for } \forall \sigma$$

と同値であり γ が vector 表現, symmetric
tensor 表現の γ の自然な拡張 γ^+ である。

Boltzmann weight $W^{(N)}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right)$ は matrix element
とする operator $W^{(N)}(u)$ は $\mathcal{V} := \bigoplus_{a, b \in I} V_{ab}^{(N)}$ 上
で $1 \otimes \mathcal{V}$ に作用する。 $\mathcal{V}_{\gamma} := \bigoplus_{a, b \in I} \widetilde{V}_{ab, \gamma}^{(N)}$
と $1 \otimes \mathcal{V}_{\gamma}$ 結果のみ引用する次の定理は重要である。

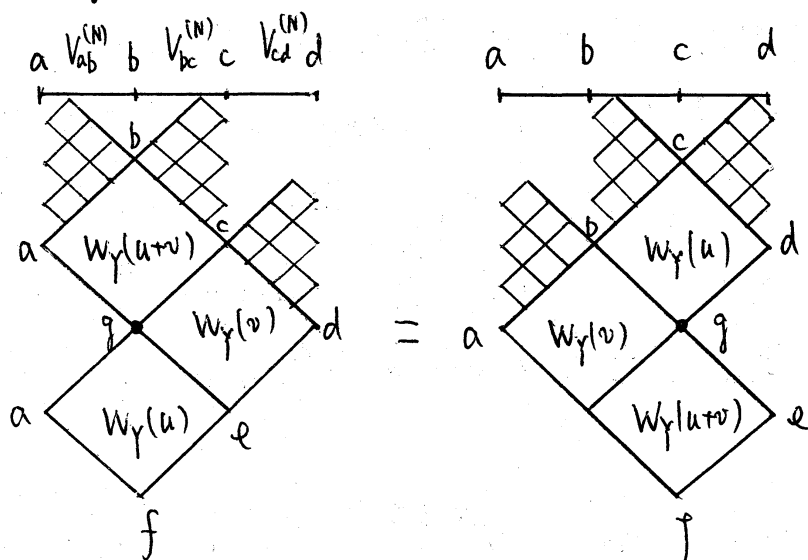
定理

$$W_Y \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u \right) \left(\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{bc,Y}^{(N)} \right) \subset \widetilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \otimes \widetilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$$

$W_Y^{(N)}(u)$ が $\mathcal{H}^{\otimes 3}$ 上 STR を満たす. 定理 17
 $W_Y(u) = 0$ on $\mathcal{H}^{\otimes 3} / \mathcal{H}_Y^{\otimes 3}$ であるから 容易に
 次を得る

系 $W_Y(u)$ は $\mathcal{H}_Y^{\otimes 3}$ 上 STR を満たす.

よって $\widetilde{V}_{ab,Y}^{(N)} = F_Y V_{ab}^{(N)}$ に気をつけて図を用いて
 表わせよう



を参照 (本節の Appendix 参照)

先の admissibility の定義 17 site 上の dominant
 integral weight a, b, c, d を定めても Boltzmann
 weight になる.

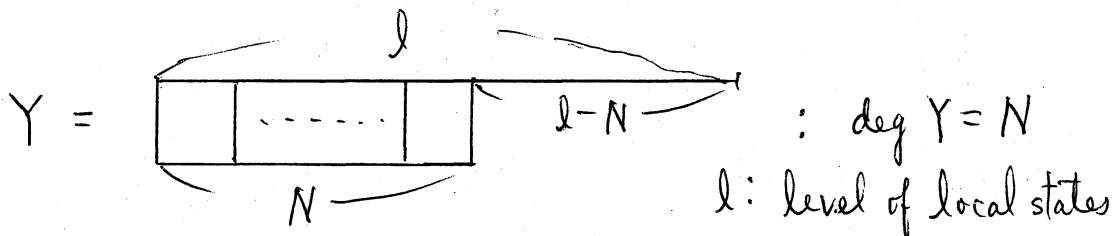
$$(\dim \tilde{V}_{ab,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}) \times (\dim \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)} \times \dim \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)})$$

だけの種類がある。従って Boltzmann weight の通は site 上の local state $a, b, c, d \in \mathcal{I}_1$ の他に $\tilde{V}_{ab,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{bc,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{ad,Y}^{(N)}, \tilde{V}_{dc,Y}^{(N)}$ の base を定める u に $W_Y(u)$ の matrix element u として現れるのである。指定した $\tilde{V}_{xx,Y}^{(N)}$ の base に対応する edge の上にあると考える。

一点函数の予想

以上の様に定めたと一般の表現に対する Boltzmann weight に Y LSP を加える次の様に与える予想される。branching coefficient については §11 に若干の説明がある。

例 1 symmetric tensor

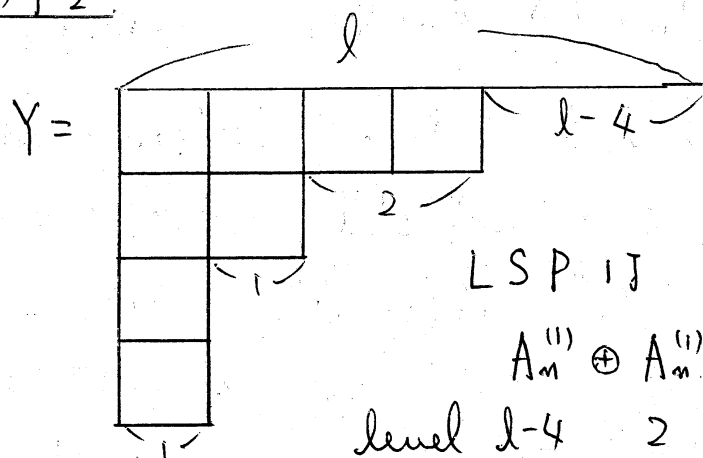


$$\text{LSP IT} \quad A_n^{(l)} \oplus A_n^{(N)} \supset A_n^{(l)}$$

level $l-N$ N l

の branching coefficient

例 2



LSP IT

$$A_m^{(1)} \oplus A_m^{(2)} \oplus A_m^{(3)} \oplus A_m^{(4)} \supset A_m^{(l)}$$

level $l-4$ 2 1 1 l

の branching coefficient

一般の Young diagram $Y = (f_1, \dots, f_m)$

$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_m > 0$ に対しての予想 17 上の
例から容易に推察できることと思う。

例 1 のとき local state $a \in \mathcal{J}_l$ についての LSP
IT boundary condition (§9 参照) を

a_1 : dominant integral weight, level = $l-N$

a_2 : dominant integral weight, level = N

取り

$$p1 = a_1 + \sigma^{i-1}(a_2)$$

と決定 IT にとるに

$$V_{a_1} \otimes V_{a_2} \supset V_a$$

の branching coefficient とするものである。

例 2 の場合も同様に $a \in \mathcal{J}_l$ についての LSP

1) boundary condition & 17 dominant integral weight $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$ level on 2-4

$$V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes V_{a_3} \otimes V_{a_4}$$

α_{Va} についての branching coefficient $\{ \alpha \}$ のこと
 である。

—MEMO—

Appendix of § 7

Young symmetrizer a deformation F_Y Young symmetrizer a deformation F_Y の $\tau < 1$ の τ に対する $\sim$ }Young diagram $Y = (f_1, \dots, f_m)$, $f_1 \geq \dots \geq f_m > 0$
 $N = f_1 + \dots + f_m$ に次の β に数を書き込む

0	1	2	3	4	...
$z-1$	z	$z+1$	$z+2$	$z+3$	...
$2z-2$	$2z-1$	$2z$	$2z+1$	...	
$3z-3$	$3z-2$	$3z-1$	$3z$	...	

, $Y = (4, 3, 1)$
 $z \mid \tau \alpha_1(z), \dots, \alpha_N(z)$ をこの書き込みに従って次の β にする。

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3$$

$$\alpha_5 = z-1, \alpha_6 = z, \alpha_7 = z+1$$

$$\alpha_8 = 2z-2$$

 τ の場合 一般の $Y = (f_1, \dots, f_m)$ に対して

$$\sum_{j=1}^k f_j < i \leq \sum_{j=1}^{k+1} f_j \quad \tau \text{ は } i \text{ に対して}$$

$$\alpha_i(z) = kz - k + (i-1 - \sum_{j=1}^k f_j)$$

とすればあつた。 したがって $\alpha_{ij}(z)$ は

$$\alpha_{ij}(z) = \alpha_i(z) - \alpha_j(z)$$

としておく。

$F_Y(z)$ は

$$F_Y(z) := W_1(\alpha_{21})$$

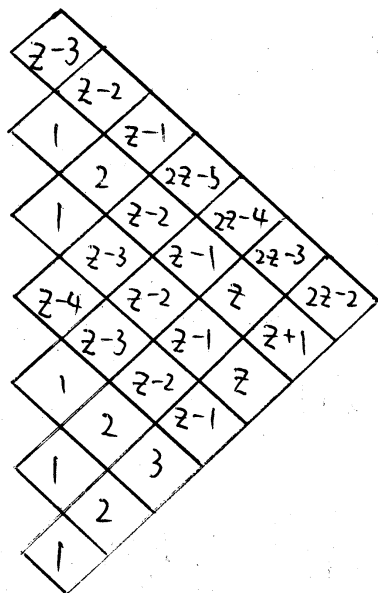
$$\times W_2(\alpha_{31}) W_1(\alpha_{32})$$

$$\times W_3(\alpha_{41}) W_2(\alpha_{42}) W_1(\alpha_{43})$$

$$\times \dots$$

$$\times W_{N-1}(\alpha_{N,1}) W_{N-2}(\alpha_{N,2}) \dots W_1(\alpha_{N,N-1})$$

とすれば、 $Y = (4, 3, 1)$ のときは $F_Y(z)$ は図で表わすことができる。



おおよそ $F_Y(z)$ は $z \rightarrow 0$ と $z \rightarrow \infty$ のものが F_Y となる。 $F_Y(z)$ は零点をもつので、それらを除いておく。 $z \rightarrow \infty$ のために

$$\beta_{ij}(z) = \prod_{r=2}^{f_j} \prod_{s=1}^{f_i} [(j-i)(z-1) + r-s] \quad , \quad i < j$$

$$\text{もし } i < j, f_j = 1 \text{ なら } \beta_{ij}(z) = 1$$

と

$$F_Y := \lim_{z \rightarrow 0} F_Y(z) \prod_{i < j} \beta_{ij}(z)^{-1}$$

と F_Y を定義する。

$Y = (4, 3, 1)$ なら定数 7^7 となる $\beta_{12}(z)$ がある

それは

$$\beta_{12}(z) = [z-3][z-2]^2[z-1]^2[z]^2[z+1]$$

である。 ($[x] = \theta_1(\frac{\pi x}{L}, p)$)

F_Y は Young symmetrizer の deformation であり、
いふのは、rational limit において

$$W_i(u) = 1 + P_{i,i+1}$$

$P_{ij} : (i \leftrightarrow j)$ の permutation.

であることに注意。

Part 2 Local State Probability (LSP) の計算

restricted face model (vector 表現) と vertex model の双方について LSP を計算する。

§ 8 Corner Transfer Matrix (CTM)

CTM は face model の 1 点函数を求める方法であるが、これについて rigorous な数学的証明は与えられていない。

$\mathcal{A}_*$: local state の集合

$$P_a := \text{Prob}(p^{(i)} = a), \quad a \in \mathcal{A}_*$$

$p^{(i)}$: ある fix した site

$$= \frac{1}{Z_{\text{conf}}} \sum_{\text{conf}} \delta(p^{(i)}, a) \prod_{\text{faces}} W \begin{pmatrix} p^{(i)} & p^{(i')} \\ p^{(j)} & p^{(j')} \end{pmatrix}$$

すなわち P_a はある fix した site $p^{(i)}$ が a という状態をとる確率、1 点函数 (LSP) である。定義より

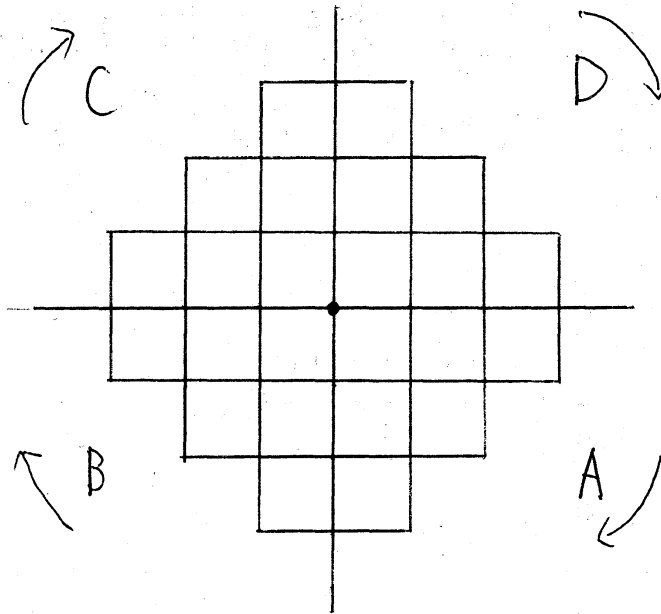
$$\sum_{a \in \mathcal{A}_*} P_a = 1$$

は明らかである。

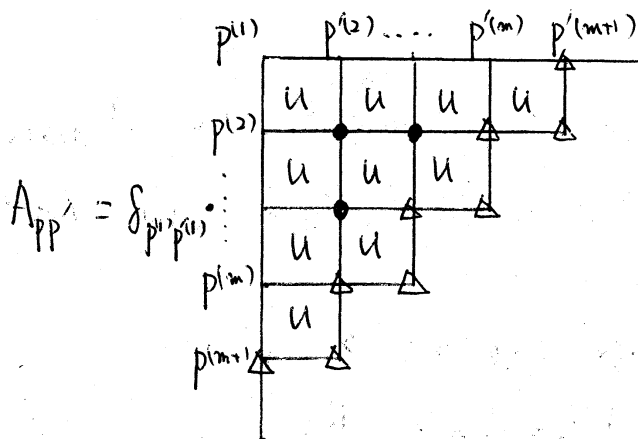
これから P_a を求める際には格子の boundary condition を指定して求めなければならぬ。

を注意しておく。

Corner Transfer Matrix A, B, C, D は 1 行 1 列の
 格子である。まず固定した 1 つの site $p^{(1)}$
 のまわりに次のような格子を考える。



例えば CTMA 上の格子の第 4 象限の
 部分をとり出して



$$A_{pp'} = \delta_{p^{(1)}, p'^{(1)}}$$

$$P = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$$

$$P' = (p'^{(1)}, \dots, p'^{(m)})$$

$$p^{(i)}, p'^{(i)} \in \mathcal{J}_+$$

の $\prod$ Boltzmann weight の積をく。 Δ 印の site は指定された boundary condition に従って固定。

• 印の site は local state δ に対して和をとるものとする。そして得られる $A_{pp'}$ を要素として与える matrix が CTM A である。つまり行列 A は $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ $p' = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ に m index される要素をもつ $(\#\delta)^m \times (\#\delta)^m$ size の matrix である。残りの B, C, D も対応する象限より同様に定義される。

CTM を用いることに m LSP は

$$P_a = \frac{\text{Trace} (S_a A(u) B(u) C(u) D(u))}{\text{Trace} (A(u) B(u) C(u) D(u))}$$

$$(S_a)_{pp'} = \delta(p', a) \delta_{pp'}$$

と表示される。

以後 Boltzmann weight 中の theta 函数の nome p は $0 < p < 1$ 変数 u は $-\frac{1}{2}(n+1) < u < 0$ であるとする。一般にこの範囲を Regime III と呼ぶ。

STR 及びいくつかの付帯条件を仮定したとき (Baxter の本を参照のこと) CTM についての Baxter の仮説は次のようになる。

Baxter の仮説 格子 size $m \rightarrow \infty$ で

$$A(u) = \alpha_1 M_1 \exp(uH) \alpha_2^{-1}$$

$$B(u) = \alpha_2 M_2 \exp(-uH) \alpha_3^{-1}$$

$$C(u) = Q_3 M_3 \exp(uH) Q_4^{-1}$$

$$D(u) = Q_4 M_4 \exp(-uH) Q_1^{-1}$$

ここに H, Q_i, M_i ($i=1, 2, 3, 4$) は u に依存せず S_a と可換、さらに H, M_i は diagonal である。

この Baxter の主張を認めると

$$P_a = \frac{\text{Trace}(S_a M_1 M_2 M_3 M_4)}{\text{Trace}(M_1 M_2 M_3 M_4)}$$

と 7×7 diagonal matrix M_i ($i=1, 2, 3, 4$) の性質を調べる。ここで P_a を求めることができてくるのである。そのためにまず Boltzmann weight の性質をもう少し調べておく。

Boltzmann weight の性質

$$(i) \quad \begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{u=0} \\ d \quad c \end{array} = \delta_{bd} \quad (\text{initial condition})$$

$$\therefore \text{よって} \quad A(0) = C(0) = \text{id}$$

$$\text{id} = A(0) = Q_1 M_1 Q_2^{-1} \quad \text{より} \quad Q_2 = Q_1 M_1$$

$$\therefore A(u) = Q_2 \exp(uH) Q_2^{-1}$$

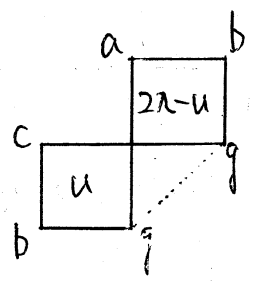
(ii) 2nd inversion relation

記号の簡単なT:の ことでは

$$\overline{W} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{G_a G_c}{G_b G_d}} W \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

 G_a : 以下参照とおく. 以下の各節では $\square$ は $\overline{W}$ を表すものとする.

①



$$\sum_g = \rho_2(u) \delta_{ac}$$

$$\lambda = -\frac{t}{2} \quad (t, g \text{ is } \delta \text{ (reference)})$$

② $M_1 M_2 M_3 M_4 = \exp(2\lambda H) G \times \left(P_{\tau, \text{項}}^{(1)} \right)$

ことに G is matrix T

$$G_{pp'} = G_{p^{(1)}} \cdot \delta_{pp'}$$

$$G_a := \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n+1} [a_\mu - a_\nu] \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\varepsilon(a) \prod_{\mu=1}^n h(a_\mu) \prod_{1 \leq k < \nu \leq n} [a_k - a_\nu] [a_k + a_\nu]$$

for $B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$

$$\varepsilon(a) \text{ is } \frac{\varepsilon(a+\hat{\mu})}{\varepsilon(a)} = \sigma \quad \{ \sigma \} \text{ sign factor}$$

 $\sigma \in h(a)$ is $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の $\{ \sigma \}$ (reference)

ついで次の形である。

	$A_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$
$k(a)$	1	$[a]$	$[2a]$	1
σ	1	1	-1	1

$\rho_2(u)$ の形は形 17

$$\rho_2(u) = \frac{[\lambda+u][\lambda-u]}{[1]^2} \quad \text{for } A_n^{(1)}$$

$$\frac{[\lambda+u][\lambda-u][1+u][1-u]}{[\lambda]^2[1]^2} \quad \text{for } B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$$

(証明)

(i) 略

(ii) ① A 型の場合は Boltzmann weight の表式 17 直接計算して示す。B, C, D 型の $\rho_2(u)$ については (B, C, D 型の Boltzmann weight は本節の Appendix E 参照) Boltzmann weight の crossing symmetry

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix} \middle| u\right) = \sqrt{\frac{G_b G_d}{G_a G_c}} W\left(\begin{smallmatrix} d & a \\ c & b \end{smallmatrix} \middle| \lambda - u\right)$$

に誘たすべから 1-st inversion (§5) に帰着。

(II) の face について 2nd inversion を用いることができて、 Σq_i を行い、 $f_1 = f'_1$ となる項しか残らず、 f_1, f'_1 への依存性が δ_{f_1, f'_1} を通してしか生じることがわかる。さらに $\Sigma \sigma$ を再び 2nd inversion を行い、 f_2, f'_2 に依存していることがわかるのである。

但し、Andrews Baxter-Forrester の論文には、この部分について、次のように述べられている。

"There is a problem in deriving this, in that (2nd inversion) is not necessarily satisfied for $j = m+1$. However, it seems that we can ignore this boundary difficulty in the limit of m large."

($j = m+1 \in I$, g_2 の右 (F) の boundary の site) である



以上のことより (ii) ② の LSP は

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{\text{Trace} (S_a G \exp(2\lambda H))}{\text{Trace} (G \exp(2\lambda H))} \\ &= \frac{\text{Trace} (S_a G A(2\lambda))}{\text{Trace} (G A(2\lambda))} \end{aligned}$$

と表わされる。

Appendix of § 8

$B, C, D \in \mathbb{R}^n$ or Boltzmann weight

$\vec{e}_i$ orthonormal vector, $\vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ or $\vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$

$$B_n \quad A = \{\pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_n, 0\}$$

$$\bar{\Lambda}_i = \begin{cases} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i & (1 \leq i \leq n-1) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$$C_n \quad A = \{\pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_n\}$$

$$\bar{\Lambda}_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$D_n \quad A = \{\pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_n\}$$

$$\bar{\Lambda}_i = \begin{cases} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i & (1 \leq i \leq n-2) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) & (i=n-1) \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n) & (i=n) \end{cases}$$

$\vec{e}_i$ or $\vec{e}_i$

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \pm \varepsilon_i \text{ or } 0 & (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n, \text{ or } \mu = 0) \\ & \text{for } B_n \\ \pm \varepsilon_i & (\mu = \pm i, 1 \leq i \leq n) \\ & \text{for } C_n, D_n \end{cases}$$

$$\exists ! a \in \mathfrak{h}^* \quad i = \frac{1}{2} |$$

$$a_\mu := \begin{cases} \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle & (\mu \neq 0) \\ -\frac{1}{2} & (\mu = 0) \end{cases}$$

$$\bar{a} + \bar{\rho} = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$$

$$a_{\mu\nu} = a_\mu - a_\nu$$

と定まる。さらに $G_{a\mu}$ は

$$G_{a\mu} = \frac{G_{a+\hat{\mu}}}{G_a}, \quad G_{a0} = 1$$

と決まる。

よって Boltzmann weight は

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \mu \end{array} = \frac{[\lambda - u][1 + u]}{[\lambda][1]} \quad (\mu \neq 0)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \nu \end{array} = \frac{[\lambda - u][a_{\mu\nu} - u]}{[\lambda][a_{\mu\nu}]} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ \mu \end{array} = \frac{[\lambda - u][u]}{[\lambda][1]} \left(\frac{[a_{\mu\nu} + 1][a_{\mu\nu} - 1]}{[a_{\mu\nu}]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\mu \neq \pm \nu)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \square -\nu \\ -\mu \end{array} = \frac{[u][a_\mu + a_\nu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][a_\mu + a_\nu + 1]} (G_{a_\mu} G_{a_\nu})^{1/2}, (\mu \neq \nu)$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \mu \square -\mu \\ -\mu \end{array} = \frac{[\lambda + u][2a_\mu + 1 + 2\lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} - \frac{[u][2a_\mu + 1 + \lambda - u]}{[\lambda][2a_\mu + 1 + 2\lambda]} \sum_{k(\neq \mu)} \frac{[a_\mu + a_k + 1 + 2\lambda]}{[a_\mu + a_k + 1]} G_{a_k}$$

である。 $\mathcal{T}$ は この Boltzmann weight $\mathcal{T}$ の性質をもつ。

Initial condition

$$W\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| 0\right) = \delta_{bd}$$

Reflection symmetry

$$W\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right) = W\left(\begin{array}{cc} a & d \\ b & c \end{array} \middle| u\right)$$

Crossing symmetry ($A \neq \frac{1}{2}$ のときは $\lambda \neq 1/2$)

$$W\left(\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \middle| u\right) = \left(\frac{G_b G_d}{G_a G_c}\right)^{1/2} W\left(\begin{array}{cc} d & a \\ c & b \end{array} \middle| \lambda - u\right)$$

§9 Local State Probabilities

in terms of 1D sums

(face models and vertex models in face formulation)

以下で $A_n^{(l)}$ の vector 表現で level $l \geq 2$ の場合に LSP を求める議論をする。

Boltzmann weight の性質 (続)(iii) diagonal nature at $x=0$

Boltzmann weight は 2 変数 u, p (p : modular 変数) の函数であらう。theta 函数 $[u]$ は Jacobi の虚変換を行なった後に

$$(u, p) \longmapsto (w, x)$$

$p = e^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), $x = \exp(-\frac{4\pi^2}{L\varepsilon})$, $w = x^u$ なる変数変換をする。

$$[u] = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} x^{\left\{\frac{L}{8} + \frac{u(u-L)}{2L}\right\}} E(x^u, x^L)$$

よって

$$\begin{aligned} E(z, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zq^{k-1})(1 - z^{-1}q^k)(1 - q^k) \\ &= -z E(z^{-1}, q) \end{aligned}$$

である。

2.5.12

$$\begin{array}{c} a \\ \hline \square \\ d \quad c \end{array} = w \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \cdot F \cdot w^{(f_b + f_d - f_a - f_c)}$$

$$F = x^{-u(u+L + \frac{2}{n+2})/2L}$$

$$f_a = \frac{1}{2} |a + \rho|^2$$

modify (T = Boltzmann weight) $w, x \in \mathbb{C}$
 ($\square$) modified Boltzmann weight

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \mu \end{array} = w^{-1} \frac{E(xw, x^L)}{E(x, x^L)}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \nu \end{array} = \frac{E(x^{q_{\mu\nu}} w^{-1}, x^L)}{E(x^{q_{\mu\nu}}, x^L)}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \nu \end{array} = x^{1/2} w^{-1} \sqrt{\frac{E(x^{q_{\mu\nu}+1}, x^L) E(x^{q_{\mu\nu}-1}, x^L)}{E(x^{q_{\mu\nu}}, x^L)^2}}$$

the limit $x \rightarrow 0$. $\therefore w$ is fixed $x \rightarrow 0$ and ν

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \mu \end{array} \longrightarrow w^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \hline \square \\ \nu \end{array} \longrightarrow \begin{cases} w^0 = 1 & (\mu < \nu) \\ w^{-1} & (\nu < \mu) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \square \\ \mu \end{array} \xrightarrow{\quad} 0$$

これから δ とおいて

$$\lim_{\substack{\omega: \text{fix} \\ x \rightarrow 0}} \begin{array}{c} a \\ \square \\ d \end{array} = \delta_{bd} \omega^{-H(a,b,c)} \quad \dots (*)$$

これは H は H -function と呼ばれる

$$\begin{aligned} H(a, a+\hat{\mu}, a+\hat{\mu}+\hat{\nu}) &= H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \\ &= \theta(\mu \geq \nu) = \begin{cases} 1 & \mu \geq \nu \\ 0 & \mu < \nu \end{cases} \end{aligned}$$

なる函数である。(*) の式は “diagonal nature at $x=0$ ” と呼ばれるものである。

この β に Boltzmann weight を modify して CTM は boundary の local state に関する f_* と原点の site の f_a から (か影響を受け) ない。しかし f_{ix} として boundary の f_* と F は LSP から CTM/CTM へ変形して f_{ix} なることから LSP に変化するしない。さて LSP における f_{ix} 以下で f_{ix} を適宜無視して計算する。 f_{ix} modify して Boltzmann weight も STR を適用する。

diagonal nature を用いて CTM $A(u)$ を調べよう。

命題 $A(u)$ は ω の整中のみを含む

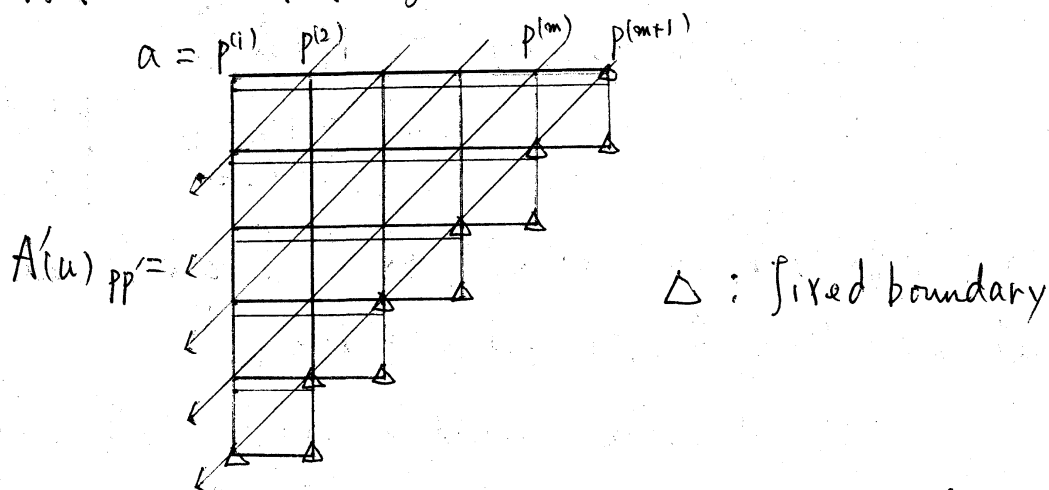
従って $\omega^{fa} A(u)$ は

$$u \quad u + \frac{L\varepsilon}{2\pi} \sqrt{-1} \quad \text{で不変}$$

(iii) 命題 I'

$$\lim_{\omega: \text{fix}, x \rightarrow 0} A(u)_{pp'} = \omega^{-fa - n_p} \delta_{pp'}, \quad n_p \in \mathbb{Z}$$

と示さなければならない。



において $\omega: \text{fix}$ から $x \rightarrow 0$ とする diagonal nature

上の図の斜めの矢線上の weight がすべて

等しいと示さなければならない。

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ d \quad c \end{array} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \square \\ d \quad c \end{array} \cdot F^{-1} \cdot \omega^{(fa+fc-fb-fd)}$$

に気をつけて計算すれば

$$A(u)_{pp'} = \delta_{pp'} \cdot \omega^{fa - \sum_{i=1}^m j_i H(p^{(i)}, p^{(i+1)}, p^{(i+2)})}$$

であることがわかる。

ゆえに

$$\eta_p = \sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})$$

§ 8 中の P_a の表示式は: $A_n^{(1)}$ の $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ の $\lambda = -\frac{1}{2}(n+1)$ に対応する。

$$P_a = \frac{\text{Trace}(S_a G A(-n-1))}{\text{Trace}(G A(-n-1))}$$

$\therefore \tau$

$$G = (G_{pp'}) \quad , \quad G_{pp'} = \delta_{pp'} G_p^{(1)}$$

$$G_a = \prod_{\mu < \nu} [a_{\mu\nu}] \propto x^{(n+1)f_a - \langle a+p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{a_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$S_a = (S_{a,pp'}) \quad , \quad S_{a,pp'} = \delta(p^{(1)}, a) \delta_{pp'}$$

τ は、以下から

$$P_a = \frac{\sum_{p, p^{(1)}=a} G_p A(-n-1)_{pp}}{\sum_p G_p A(-n-1)_{pp}}$$

$\therefore \tau$

$$u_a = x^{-\langle a+p, p \rangle} \prod_{\mu < \nu} E(x^{a_{\mu\nu}}, x^L)$$

$$X_m(a, b, c; q) = \sum_x q^{\sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_x \text{ path } p = (p^{(1)}, \dots, p^{(m+2)}) \quad \tau^n \\ p^{(1)} = a, \quad p^{(m+1)} = b, \quad p^{(m+2)} = c, \quad p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{J}_1 \\ (p^{(j)}, p^{(j+1)}) : \text{admissible for } j=1, \dots, m+1 \\ \text{「} \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{J} \text{」 の } \mathcal{E} \text{ である。} \end{array} \right)$$

と定めておく

$$P_a = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+2)})$$

$$P_m(a, b, c) = \frac{u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}{\sum_{a \in \mathcal{A}_1} u_a X_m(a, b, c; x^{n+1})}$$

と表す、と仮定する。

ここで、 $P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\xi \Lambda_\nu}^{(m+2)}$ は boundary condition としてあり、LSP P_a はこの boundary の ϵ の方に依存する、ことに注意する。 $P_{\xi \Lambda_\nu}^{(1)}$ は次のように定められる。

$\xi; A_n^{(1)}$ の level $l-1$ の dominant integral weight

Λ_ν ; fundamental weight, $0 \leq \nu \leq n$

但し、 $\Lambda_{\nu+m+1} = \Lambda_\nu + 1$ で添字を $\mathbb{Z}$ にして拡張してある。

$$P_{\xi, \Lambda_\nu}^{(1)} := \xi + \sigma^{-1}(\Lambda_\nu)$$

$$\text{よって } \sigma(\Lambda_\nu) = \Lambda_{\nu+1}$$

当然、この boundary condition は ξ と Λ_ν の ϵ の方の数にだけあり、“最低エネルギー”を持った path として特徴付けられる。すなわち $w > 1$ (Regime III である、ことに注意) であるから $\sum_j j H_j$ を “minimize” する j の path である、と定めてある。

以上で「 $(A_n'', \text{vector 表現, level } l)$ 」なる model を扱ったが、 $(A_n'', N \text{ 次対称表現, level } l > N)$ なる model に対しても平行に議論を進めることが出来る。この場合について 1D sum の表示における H-Junction は以下の様になることを予想されている。

$$H(a, b, c) = H(b-a, c-b) \\ = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{i=1}^N \theta(\mu_i \geq \nu_{\sigma(i)})$$

ここで

$$b-a = \hat{\mu}_1 + \cdots + \hat{\mu}_N$$

$$c-b = \hat{\nu}_1 + \cdots + \hat{\nu}_N$$

$\mathfrak{S}_N$: N 次対称群.

boundary condition は

ξ : level $l-N$ の dominant integral weight

η : level N の dominant integral weight

として

$$p_{\xi, \eta}^{(i)} = \xi + \sigma^{i-1}(\eta)$$

vertex model in face formulation

ここで Trigonometric T quantum R-matrix
に付随する vertex model を考える。

$A_n^{(1)}$ の vector 表現に付随する quantum R-matrix R

$$R(\omega) \in \text{End}(V_\square \otimes V_\square) \quad , \quad \omega = x^{-u}$$

$$R(\omega) = (\omega - x) \sum_{\mu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\mu\mu} + \sqrt{x}(\omega - 1) \sum_{\mu \neq \nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu} \\ + (1 - x) \left(\sum_{\mu < \nu} + \omega \sum_{\mu > \nu} \right) E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

T も T であり、よって YBE

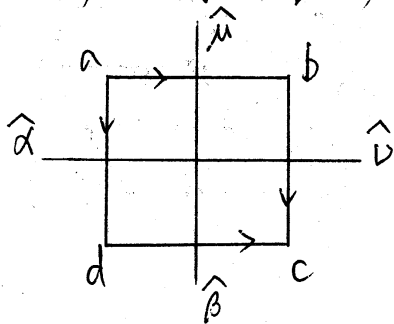
$$(R(\omega) \otimes 1)(1 \otimes R(\omega\omega'))(R(\omega') \otimes 1) \\ = (1 \otimes R(\omega'))(R(\omega\omega') \otimes 1)(1 \otimes R(\omega))$$

を導く。ここで CTM の方法により LSP を
求めるために、この vertex model を face model
として考え直す、と考える。

vertex model を face model として読みかえるには
次のようにする。まず vertex model は lattice L
の site 上に $\square$ の元がある T だが、対応する
face model はその dual lattice の site 上に
local state がある T もある T である。よって
local state は

$$W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix}\right) := \begin{cases} R(w)_{\alpha\beta\mu\nu} & , \text{ if } \begin{matrix} b-a=\hat{\mu}, c-b=\hat{\nu} \\ d-a=\hat{\alpha}, c-d=\hat{\beta} \end{matrix} \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

である。vertex $\hat{\alpha} \xrightarrow{\hat{\mu}} \hat{\nu}$ $\in$ face $\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix}$ に重なる
次の図に図1に表わすを理解しやす。い。



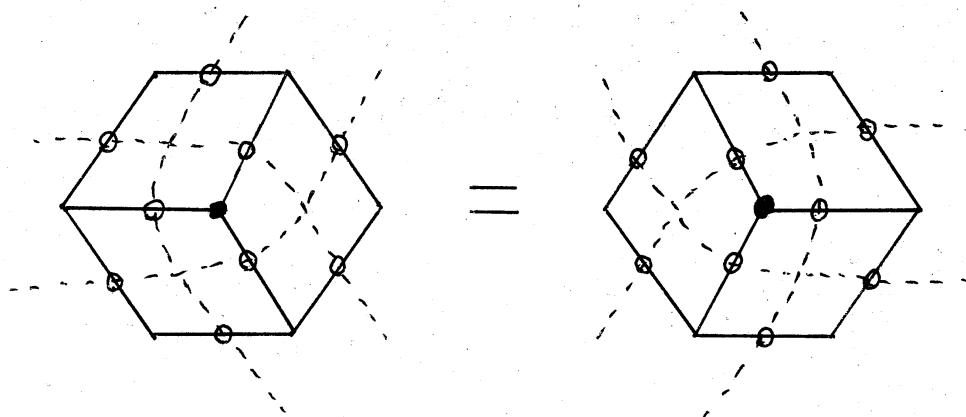
$$\begin{aligned} b-a &= \hat{\mu} \\ c-b &= \hat{\nu} \\ d-a &= \hat{\alpha} \\ c-d &= \hat{\beta} \end{aligned}$$

すなわち、vertex model の local state は face model の Boltzmann weight の edge 上にあるかの図に表わすのである。vertex model の Boltzmann weight は a, b, c, d に対する $\frac{1}{2}$ に1か依り1'である。 a, b, c, d は $P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$ に属する E とする。

対 応 表

	vertex model	face formulation
lattice	L	L の dual
local state	$V_{\square}$ の weight	$P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}\delta$
Boltzmann weight	$R(w)_{\alpha\beta\mu\nu}$	$W\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ d & c \end{smallmatrix}\right) = W\left(\begin{smallmatrix} a+r & b+r \\ d+r & c+r \end{smallmatrix}\right)$ for $r \in R$

新しく作られたこのFace model がやITY STR
を満すといふ。



の形に 先の読みかえを STR において直接
行なえば YBE が明らかである。

上の図は破線が vertex model での YBE を
表す。このとき 0 の部分での和は

$$\alpha \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \square \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \nu = 0 \quad \text{if } \hat{\mu} + \hat{\nu} \neq \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

の 0 の部分のみの和に置き変えることに
注意する。

いくつか R-matrix の性質を挙げておこう。

R-matrix の性質

(i) $\hbar$ -invariance.

$$[R(w, x), \hbar \otimes 1 + 1 \otimes \hbar] = 0 \quad \text{for } \forall \hbar \in \hbar$$

7" あ 子 > e e

$$R(w, x)_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad \text{unless } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$$

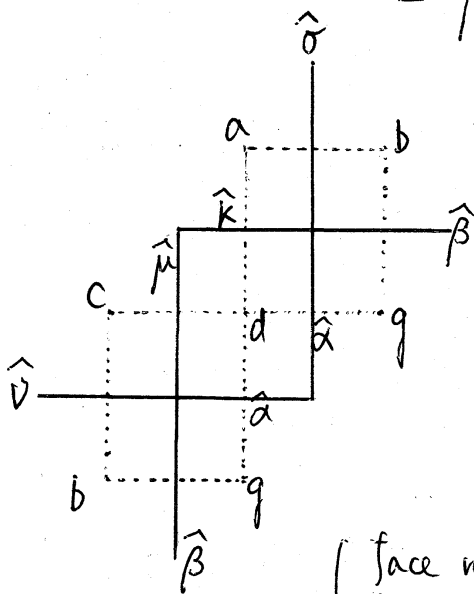
e 1 1 同値

(ii) $R(1, x) = (\text{scalar}) \times (\text{identity})$

(iii) 2-nd inversion relation

$$\sum_{\alpha, \beta} R(w x^{-1}, x)_{k\alpha\sigma\beta} \cdot R(w^{-1} x^{-1}, x)_{\nu\beta\mu\alpha} \cdot \frac{g_\alpha g_\beta}{g_\mu g_\sigma}$$

$$= \rho_2(w) \delta_{k\mu} \delta_{\sigma\nu}$$



実線 1 丁 vertex model と

破線 1 丁 face formulation と

表わす

$$\hat{\sigma} = b - a, \quad \hat{\beta} = g - b$$

$$\hat{k} = d - a, \quad \hat{\alpha} = g - d$$

$$\hat{\mu} = d - c, \quad \hat{\nu} = b - c$$

(face model の 2-nd inversion の
読みかえ e' f, 7" 子 > e 1 に注意)

(iv) diagonal nature at $x=0$

$$R(w, 0) = \sum_{\mu, \nu} w^{H(\hat{\mu}, \hat{\nu})} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

このほか、これから trigonometric R-matrix より
 定まる vertex model に対しても、face formulation
 を通じて CTM の方法を用いることができて、
 LSP を求めることができる。その結果は $A_n^{(1)}$
 のとき 1 次の形になる。

vertex model の 1 点函数

$$\Lambda \in \{\Lambda_0, \dots, \Lambda_n\}$$

に対して boundary condition は

$$P_\Lambda^{(j)} = \sigma^{(j-1)}(\Lambda)$$

と置く。

$$P(a|\Lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_\Lambda^{(m+1)}, P_\Lambda^{(m+2)})$$

ここに

$$P_m(a, b, c) = \frac{x^{-\langle a, \rho \rangle} f_m(b-a, c-b; x^{n+1})}{\sum_{a'} x^{-\langle a', \rho \rangle} f_m(b-a', c-b; x^{n+1})}$$

$$f_m(x, \eta; q) = \sum_{\text{admissible path}} q^{\sum_{j=1}^m j H(\eta(j), \eta(j+1))}$$

$\eta^{(i)}$: weight of vector representation of $A_n^{(1)}$
 $\eta^{(m+1)} = \eta$: fixed $= p(\eta^{(1)}) - p(\eta)$

$$H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \theta(\mu \geq \nu)$$

f_m の表式中の H -function において admissible path について和をとり得る。この admissibility は unrestricted model の "weak" admissibility であることに注意する。

尚 B, C, D 型の vertex model についても同様の計算において LSP が求められている。

§ 10 1 D sums for finite m

本節中で $f_m(x, x, q)$ の q を省略して書くことにしておく。本節での目標は 1 点函数

$$\sum_{p^{(2)}, \dots, p^{(m)} \in \mathcal{J}_x} q \sum_{j=1}^m j H(p^{(j)}, p^{(j+1)}, p^{(j+2)})$$

$p^{(1)} = a, p^{(m+1)} = b, p^{(m+2)} = c : \text{fixed}$
 $P : \text{admissible}$

を $m \rightarrow \infty$ の極限 かんがえやすくなるような形に書き改めることである。

上の和が 実際には どのようなものであるのかと例を通じて観察してみよう。

例 $n=1$

$$\hat{o} = \Lambda_1 - \Lambda_0, \quad \hat{i} = \Lambda_0 - \Lambda_1, \quad \hat{o} + \hat{i} = 0$$

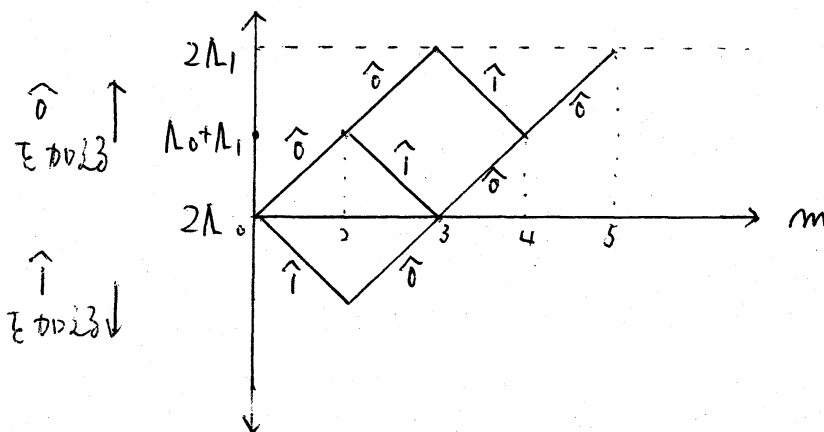
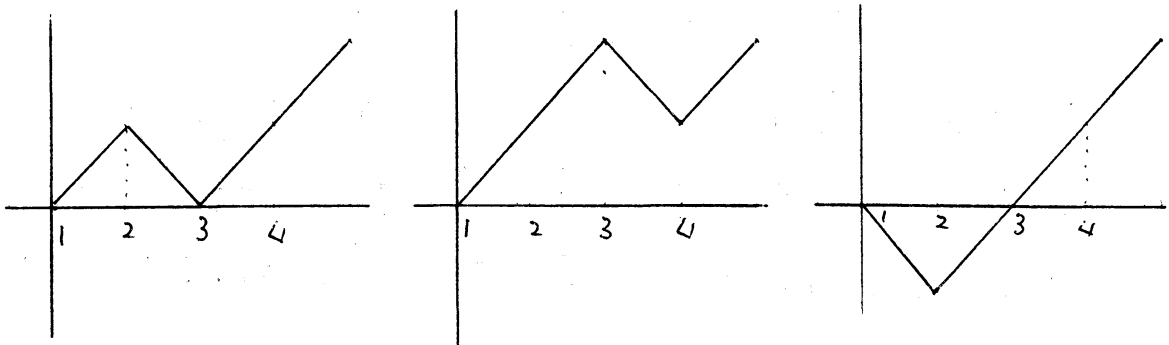


図 71 $f_3(\hat{0}, \hat{0})$ に寄与する path 17.



の 3 個である。ゆえに

$$\begin{aligned} f_3(\hat{0}, \hat{0}) &= q^{2+3} + q^{1+3} + q^{1+2+3} \\ &= q^4(1 + q + q^2) \quad (= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

比較のため、 $l=2$ の restricted model に対する X_3 を求めると上の初めの 2 個の path により

$$\begin{aligned} X_3(2\Lambda_0, \Lambda_0 + \Lambda_1, 2\Lambda_1) &= q^{1+3} + q^{2+3} \\ &= q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - q^6 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

f_* は $q=1$ として与えられ単に path の個数に

その値を代入して与えられる。($q \neq 1$ のときは q -analogue)

つまり $q=1$ のとき $f_m(r, \eta)$ は

$$r = r_0 \hat{0} + \cdots + r_n \hat{n}, \quad \sum r_i = m, \quad r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

として

$$f_m(\gamma, \eta) = \frac{m!}{\gamma_0! \gamma_1! \cdots \gamma_n!} \quad (q=1)$$

である。既に $f_3(\hat{o}, \hat{o})$ の表式中で定義せずに
に用いていた $[\quad]$ の記号は 多項係数の
の q -analogue として次のように定義されている。
る。

$$[\gamma_0, \dots, \gamma_m] := \begin{cases} \frac{(q)_m}{(q)_{\gamma_0} \cdots (q)_{\gamma_m}} & \text{if } \sum \gamma_\mu = m, \\ & \gamma_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[\quad] := 1$$

$$(q)_k := \prod_{i=1}^k (1 - q^i) \quad k \geq 1$$

$$(q)_0 := 1$$

さらに $\gamma \in \mathfrak{h}^+$ に対して

$$\gamma \equiv \gamma_0 \hat{o} + \cdots + \gamma_n \hat{n} \pmod{\mathbb{C}\mathfrak{f}}$$

と表す

$$[\gamma]^m = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]^m$$

と書くことにする。

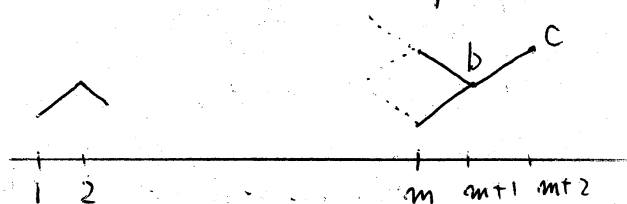
これら 2 式は $\frac{r}{2}$ の r に対して $m < +\infty$ に対して $1-D$ sum
 形式の形に表わされる。

定理 ($m < +\infty$ vertex model)

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^m r_{\mu}(r_{\mu}-1) + \sum_{\mu=0}^m H(\hat{\mu}, \hat{v}) r_{\mu}} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \quad (0 \leq m < +\infty)$$

(証明)

$$f_m(r, \eta) = \sum_{\text{admissible path}} q^{\sum_j H(\eta^{(j)}, \eta^{(j+1)})}$$



であるから、

$$\begin{cases} f_m(r, \hat{v}) = \sum_{0 \leq \mu \leq m} f_{m-1}(r - \hat{\mu}, \hat{\mu}) q^{m H(\mu, v)} \\ f_0(r, \hat{v}) = \delta_{r,0} \quad (\text{初期条件}) \end{cases}$$

なる式が path に v について $1-D$ sum 形式に
 変換される。

逆に上の 2 式は帰納的に f_* に定められ
 定理中の表式が、この 2 式に満たすことを示
 せば証明は完了する。

初期条件に関して自明である。

もう一つの式が定理の表式を導くために示すには。

$$[r_0, \dots, r_m] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{\text{Pow}(\mu)} [r_0, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_m]$$

$$\begin{aligned} \text{Pow}(\mu) = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^m \left\{ r_{\lambda}'(r_{\lambda}'-1) - r_{\lambda}(r_{\lambda}-1) \right\} \\ & + \sum_{\lambda=0}^m \left\{ H(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) r_{\lambda}' - H(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) r_{\lambda} \right\} + m H(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{に} \quad r_{\lambda}' = \begin{cases} r_{\mu-1} & (\lambda = \mu) \\ r_{\lambda} & (\lambda \neq \mu) \end{cases}$$

と示せば右辺の式が $\text{Pow}(\mu)$ を計算する。

$$\text{Pow}(\mu) = \begin{cases} m - (r_0 + \dots + r_m + r_0 + \dots + r_{\mu}) & \text{for } \mu < \nu \\ m - (r_0 + \dots + r_{\mu}) & \text{for } \mu \geq \nu \end{cases}$$

これより。

$$[r_0, \dots, r_m] = \sum_{0 \leq \mu \leq m} q^{m - (r_{\sigma(0)} + \dots + r_{\sigma(\mu)})} \cdot \begin{bmatrix} m-1 \\ * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-1 \\ * \end{bmatrix} = [r_{\sigma(0)}, r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(\mu)}-1, \dots, r_{\sigma(m)}]$$

$\therefore$ に σ は $n+1$ 次対称群の元

より. 定義より q -multinomial $r_0, \dots, r_m$ について対称であるから, 定理が示すように. $\square$

注意

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r - \hat{v}|^2 + C_m(v)} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(v) = \frac{(m-v)(m-v+n+1)}{2(n+1)}$$

の形に f_m を表すことができる. この式は f_m を用いて X_m を表すことに有効である.

r が q の $A_n^{(1)}$ の元の場合に f_m の定義域を拡張しておくのが自然なので.

上式より

$$f_m(r + k\delta, \hat{v}) = q^{-k} f_m(r, \hat{v})$$

δ : null root

と定めることにする.

定理 ($m < +\infty$, face model)

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \det(w) f_m(b + p - w(a + p), c - b)$$

W : affine Weyl group of type $A_n^{(1)}$

$$0 \leq m < +\infty$$

前節のCTMについてのBaxterの議論は lattice size が有限のときには“積極的ニュース”である。しかし、やはり lattice size 有限に対する量である χ_m は 数学的に (combinatorial に) 興味深い量であるということが定理を示しているといえる。

定理の証明の前に、 $A_n^{(1)}$ の affine Weyl group について若干の準備をしておく。

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n : \text{root lattice}$$

$$\alpha_j = \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j \quad : \text{simple root.}$$

ここに ε_i は $\mathbb{C}^n$ の orthonormal base.

$$a_\mu = \langle a + \rho, \hat{\mu} \rangle$$

そして $A_n^{(1)}$ の affine Weyl group W は

$$W := \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes Q$$

である。これは $\mathfrak{h}^*$ に次のように作用する。

$\mathfrak{S}_{n+1}$ は $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ の置換

$\alpha \in Q$ は translation t_α として

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, \delta \rangle \alpha - \left\{ \langle \lambda, \delta \rangle \frac{|\alpha|^2}{2} + \langle \lambda, \alpha \rangle \right\} \delta$$

の作用をする。また $T = W$ の fundamental reflection r_μ として

$$r_{\mu}(\Lambda_k) = \Lambda_k - \delta_{\mu k}(2\Lambda_k - \Lambda_{k+1} - \Lambda_{k-1})$$

なるもののことである。

(定理の証明)

この場合も先の vertex model に対する定理の証明と同様に X_m を定める漸化式を用いる。
 以下の。

$$\begin{cases} X_0(a, b, c) = \delta_{ab} & (\text{初期条件}) \\ X_m(a, b, c) = \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq m \\ d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}}} X_{m-1}(a, d, b) q^{mH(d, b, c)} \end{cases}$$

初期条件に関してはこちらに示す。

もうひとつの式に関しても $\sum$ 中の $d = b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}$ なる条件がなければ、これは f_m に関する漸化式と全く同じものになる。

$d = b - \hat{\mu} \notin \mathcal{A}$ なる d からの和に寄与しないことを示せば、先の f_m についての議論を援用して、定理を証明することが出来る。

つづ。

$$\begin{array}{l} b \in \mathcal{A} \\ b - \hat{\mu} \notin \mathcal{A} \end{array} \quad \text{ならば} \quad X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0$$

を示す。

$b \in \mathcal{A}$, $b - \hat{\mu} \in \mathcal{A}$, なる状況を探してみよう。

$$b = b^0 \lambda_0 + \dots + b^m \lambda_m, \quad b^i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\sum_{i=0}^m b^i = l$$

であるはず。 $\hat{\mu} = \lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu}$ により

$$b - \hat{\mu} = b^0 \lambda_0 + \dots + (b^{\mu} + 1) \lambda_{\mu} + (b^{\mu+1} - 1) \lambda_{\mu+1} + \dots + b^m \lambda_m$$

だから、このほか $\mathcal{A}$ に属する項はない。

λ_i の係数 a_i は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 中に属する。

つまり

$$b^{\mu+1} = 0$$

であることがわかる。

帰納法の仮定より

$$\chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = \sum_{w \in W} \det(w) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - w(a + \rho), \hat{\mu})$$

であり、 $b^{\mu+1} = 0$ がある。 Fundamental reflection

$r_{\mu+1}$ に対して

$$r_{\mu+1}(b - \hat{\mu} + \rho) = b - \hat{\mu} + \rho$$

だから

$$\begin{aligned} & \chi_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) \\ &= \sum \det(w) f_{m-1}(b + \rho - \hat{\mu} - w(a + \rho), \hat{\mu}) \\ & \quad \therefore f_{m-1}(r_{\mu+1}(x), \hat{\mu}) = f_{m-1}(x, \hat{\mu}) \end{aligned}$$

$$= \sum \det(\omega) f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega(a + \rho), \hat{\mu})$$

$$= \sum - \det(\omega') f_{m-1}(b - \hat{\mu} + \rho - \omega'(a + \rho), \hat{\mu})$$

$(\omega' = r_{\hat{\mu}+1}^{-1} \omega)$

$$= -X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b)$$

ゆえに

$$X_{m-1}(a, b - \hat{\mu}, b) = 0.$$

∴ 以上で定理が証明された。



§11 1 D sums in terms of modular forms.

§10 において lattice size m が有限の n に対して 1 D sum である.

vertex model である

$$f_m(r, \hat{v}) = q^{\frac{1}{2}|r - \Lambda_0|^2 + C_m(v)} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_m(v) = \frac{(m-v)(m-v+n+1)}{2(n+1)}$$

face model である

$$X_m(a, b, c) = \sum_{w \in W} \det(w) f_m(b + \rho - w(a + \rho), c - b)$$

と表わすことができる。実際 $m \rightarrow \infty$ の極限において f_∞, X_∞ として表わすことができる。

affine Lie algebra の level 1 の表現の string function, branching coefficient である。まず、これらの結果を述べるための準備をしておく。

以下である。

$L(\Lambda)$: irreducible $\Lambda_n^{(1)}$ -module with the highest weight Λ

$L(\Lambda)_\mu := \{u \in L(\Lambda) \mid hu = \mu(h)u, h \in \mathfrak{h}\}$
 $\mu \in \mathfrak{h}^*, \mathfrak{h} : \text{Cartan subalgebra of } \Lambda_n''$
 とする。

path について

定義 path

$p = (p^{(j)})_j$ が path であるとは、 $p^{(j)}$ が
 local state である。

$\gamma^{(j)}(p) = p^{(j+1)} - p^{(j)} \in \{\hat{0}, \dots, \hat{n}\}$
 である。

例 §10 で現れた ground state P_{Λ_0}
 は path である。

$$P_{\Lambda_0} = (P_{\Lambda_0}^{(j)})_{j \geq 1}, \quad P_{\Lambda_0}^{(j)} = \Lambda_0 + j - 1$$

次に一般の path ではなく境界条件 (+ 分岐
 の様子) を指定した path を考える。

定義 Λ_0 -path

path $p = (p^{(j)})_j$ が ある $k \in \mathbb{N}$ より大なり
 j に対して ground state の path P_{Λ_0} と
 一致するとは、 $p^{(j)} \in \Lambda_0$ -path である。

は $P(\Lambda_0)$ で表わす。

$$P(\Lambda_0) := \bigcup_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0) := \left\{ p = (p^{(j)}) : \text{path} \mid \begin{array}{l} p^{(j)} = p_{\Lambda_0}^{(j)} \\ \text{for } j > m \end{array} \right\}$$

さらに $p \in P(\Lambda_0)$ に対して path p の degree $\omega(p)$ は

$$\omega(p) := \sum_{j=1}^{\infty} j \left\{ H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p)) - H(\eta^{(j)}(P_{\Lambda_0}), \eta^{(j+1)}(P_{\Lambda_0})) \right\}$$

と定める。このように Λ_0 -path の定義は有限和で与えられることに注意する。

また $\mu \in \mathcal{H}^+$ に対して

$$P(\Lambda_0)_{\mu} := \{ p \in P(\Lambda_0) \mid p^{(1)} - \omega(p)\delta = \mu \}$$

$$P^{(m)}(\Lambda_0)_{\mu} := P(\Lambda_0)_{\mu} \cap P^{(m)}(\Lambda_0)$$

$$\omega_m(p) := \sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}(p), \eta^{(j+1)}(p))$$

と定める。

$$\begin{aligned} & q^{-\omega_m(P_{\Lambda_0})} f_m(P_{\Lambda_0}^{(m+1)} - a, \eta^{(m+1)}(P_{\Lambda_0}); q) \\ &= \sum_i \#(P^{(m)}(\Lambda_0)_{a-i\delta}) q^i \end{aligned}$$

と $\frac{1}{q} < \dots < 1$ が成り立つ。

path に属する T のためにいくつかの列を挙げてみる。

例 $n=1$

$$P_{\Lambda_0} : \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \dots$$

$$\eta(P_{\Lambda_0}) : \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \dots$$

1 は ground state である。ground state で 1 は path の列を適当に挙げてみる。

$$P_1 : \quad 3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 \quad 2\Lambda_0 - \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \dots$$

$$\eta(P_1) : \quad \hat{0} \quad \hat{0} \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \dots$$

$$P_2 : \quad -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad -2\Lambda_0 + 3\Lambda_1 \quad -\Lambda_0 + 2\Lambda_1 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \Lambda_1 \quad \Lambda_0 \quad \dots$$

$$\eta(P_2) : \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{1} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \quad \hat{1} \quad \hat{0} \quad \dots$$

上の P_1, P_2 はともに Λ_0 -path である。

$$P_1 \in P(\Lambda_0)_{3\Lambda_0 - 2\Lambda_1 - \delta}$$

$$P_2 \in P(\Lambda_0)_{-\Lambda_0 + 2\Lambda_1 - 3\delta}$$

である。さらに

$$P_{\Lambda_0} \in P(\Lambda_0)_{\Lambda_0}$$

定理 (vertex model, $m \rightarrow \infty$)

$$\# P(\Lambda_\nu)_\mu = \dim L(\Lambda_\nu)_\mu$$

且 T は同値 $\sim$ と T は " "

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{-\omega_m(P_{\Lambda_\nu})} f_m^{(m+1)}(P_{\Lambda_\nu} a, \eta^{(m+1)}(P_\Lambda)) = \sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-i\delta} q^i$$

注意

- ・定理中の第2式の右辺は level 1 の string function である。
- ・この定理は fundamental weight だけでなくさらに一般の dominant integral weight に対して拡張されている。

系

$$\begin{aligned}
 P(a|\Lambda_\nu) &:= \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \frac{\sum_i \dim L(\Lambda_\nu)_{a-i\delta} \cdot \chi^{-\langle a-i\delta+p, p \rangle}}{\sum_\mu \dim L(\Lambda_\nu)_\mu \chi^{-\langle \mu+p, p \rangle}}
 \end{aligned}$$

(系の証明)

定理を仮定して行う。

§9 例

$$\begin{aligned}
 &\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a, P_{\Lambda_\nu}^{(m+1)}, P_{\Lambda_\nu}^{(m+2)}) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\chi^{-\langle a, p \rangle} f_m(b-a, c-b; x^{n+1})}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', p \rangle} f_m(b-a', c-b; x^{n+1})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi^{-\langle a, p \rangle} q^{\omega(p_{\Lambda_0})} \sum_{i=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_0)_{a-is} \cdot q^i}{\sum_{a'} \chi^{-\langle a', p \rangle} q^{\omega(p_{\Lambda_0})} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_0)_{a'-is} \cdot q^i} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \dim L(\Lambda_0)_{a-is} \cdot \chi^{\langle a-is+p, p \rangle}}{\sum_{\mu} \dim L(\Lambda_0)_{\mu} \chi^{-\langle \mu+p, p \rangle}} \quad (q = x^{n+1}) \\
&\quad \therefore \langle \delta, p \rangle = n+1 \quad \square
\end{aligned}$$

(定理の証明)

定理中第2式の右辺は string function

$$q^{\frac{1}{2}|A|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_0|^2} \varphi(q)^{-n}, \quad \varphi(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$$

であることは既知とする。

w_m の定義より

$$w_m(p_{\Lambda_0}) = \sum_{j=1}^m j H(\eta^{(j)}(p_{\Lambda_0}), \eta^{(j^*)}(p_{\Lambda_0}))$$

より $T = p_{\Lambda_0}$ について

$$\begin{aligned}
\eta^{(j)}(p_{\Lambda_0}) &= p_{\Lambda_0}^{(j^*)} - p_{\Lambda_0}^{(j)} = \Lambda_{0+j} - \Lambda_{0+j+1} \\
&= \overbrace{\nu + j - 1}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
w_m(p_{\Lambda_0}) &= (n+1-\nu) + (n+1-\nu+n+1) + \cdots \\
&\quad \cdots + \{n+1-\nu + (n+1)\alpha\}
\end{aligned}$$

∴ 1にαは

$$m - (n+1) < m+1 - V + (n+1)\alpha \leq m$$

↑は整数 ∴

$$\alpha = \frac{m+V-V_m}{n+1}$$

$$0 \leq V_m \leq n$$

$$V_m \equiv V+m \pmod{n+1}$$

∴ 以下から

$$W_m(P_{\Lambda_V}) = C_m(V_m) + \frac{|\Lambda_V|^2}{2}$$

7.10 の $m < +\infty$ の q の vertex model の
1D sum に関する定理から

$$f_m(r, \hat{V}) = q^{\frac{1}{2}|r - \Lambda_V|^2 + C_m(V)} \cdot \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}$$

7.7. ∴ $r = \Lambda_{V_m} - a$ とおけば

(定理第2式の左辺)

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|\Lambda_{V_m} - a - \Lambda_{V_m}|^2 + C_m(V_m) - C_m(V_m) - \frac{|\Lambda_V|^2}{2}} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{V_m} - a \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_V|^2} \cdot \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{V_m} - a \end{bmatrix}$$

さらに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m \\ \Lambda_{V_m} - a \end{bmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(q)_m}{(q)_{r_0} (q)_{r_1} \cdots (q)_{r_m}}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} (q)_k = \varphi(q) \quad \text{F1}$$

$$(\text{定理の第2式左辺}) = q^{\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|Aa|^2} \varphi(q)^{-n} \quad \square$$

χ_m と branching coefficient の関係についての定理を述べる。再び若干の準備としておく

theta 函数

$$M \in \mathbb{R}_{>0}, \quad u, \mu \in \overline{\mathfrak{h}}^* = \sum_{j=1}^n \mathbb{C} \overline{\Lambda}_j \quad \left(\begin{array}{l} \text{classical} \\ \text{part の 意} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{Q} = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n, \quad \text{Im } \tau > 0$$

と 17 theta 函数

$$\Theta_{\mu, M}(u, \tau) := \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}} e^{\pi i \tau |\alpha + \frac{\mu}{M}|^2} \cdot e^{-2\pi i M \langle \alpha + \frac{\mu}{M}, u \rangle}$$

$$\Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} \det(w) \Theta_{w(\mu), M}(u, \tau)$$

を定める。以下に 17 次の性質をもつ

$$(i) \quad \Theta_{w(\mu), M}(0, \tau) = \Theta_{\mu, M}(0, \tau)$$

$$(ii) \quad \Theta_{w(\mu), M}^{(-)}(u, \tau) = \det(w) \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau)$$

$$(iii) \quad \Theta_{\mu, M}^{(-)}(u, \tau) = 0$$

$$\text{if } (\langle \mu, \theta \rangle - M) \prod_{i=1}^n \langle \mu, \alpha_i \rangle = 0, \quad \theta: \text{highest root of } A_n^{(1)}$$

∴ 以下を用いる

a : level l の dominant integral weight

$$L = l + n + 1$$

と 17. highest weight 表現 $L(a)$ の character を χ_a とする

$$\chi_a(z_1, \dots, z_n; q) = \frac{\Theta_{\bar{a} + \bar{\rho}, L}(u, \tau)}{\Theta_{\bar{\rho}, n+1}(u, \tau)}$$

と表わす。 ∴

$$z_j = e^{2\pi i F \langle \alpha_j, u \rangle}, \quad q = e^{2\pi i F \tau}$$

branching coefficients

diagonal embedding

$$A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)} \supset \Delta(A_n^{(2)})$$

に従って、 $L(\xi) \otimes L(\Lambda_\nu)$ の $\Delta(A_n^{(2)})$ に関する既約分解を考える。

$$\text{level of } \xi = l-1$$

$$\text{level of } \Lambda_\nu = 1$$

∴ 現わす表現の level は

$$(\text{level of } \xi) + (\text{level of } \Lambda_\nu) = l$$

である。

$$\begin{array}{ccc}
 A_m^{(1)} & \oplus & A_m^{(1)} & \supset & \Delta(A_m^{(1)}) \\
 \text{highest weight} & \bar{z} & \Lambda_0 & & a \\
 \text{level} & l-1 & 1 & & l
 \end{array}$$

既約分解

$$L(\bar{z}) \otimes L(\Lambda_0) = \bigoplus_{a \in J_1} \Omega_{\bar{z}\Lambda_0 a} \otimes L(a)$$

$\Omega_{\bar{z}\Lambda_0 a}$ は $\Delta(A_m^{(1)})$ における highest weight a の vector の空間.

$\mathbb{C}$ character の言葉で書けば

$$\begin{aligned}
 & \chi_{\bar{z}}(z_1, \dots, z_n; q) \chi_{\Lambda_0}(z_1, \dots, z_n; q) \\
 &= \sum_{\substack{a \in J_1 \\ a \equiv \bar{z} + \Lambda_0 \pmod{\theta}}} b_{\bar{z}\Lambda_0 a}(q) \chi_a(z_1, \dots, z_n; q)
 \end{aligned}$$

としよう。この $b_{\bar{z}\Lambda_0 a}(q)$ は branching coefficient
 といふ。 Λ_0 は level 1 であるといふ。これから

$$b_{\bar{z}\Lambda_0 a}(q) = \eta(\tau)^{-n} \sum_{\omega \in G_{m+1}} \det(\omega) \Theta_{-L(\bar{z}+\bar{\rho})+(L-1)\omega(\bar{a}+\bar{\rho}), L(L-1)}(0, \tau)$$

$$L = l + n + 1, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \varphi(q), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

といふといふからわかる。 ($\Omega_{\bar{z}\Lambda_0 a}$ の上には Virasoro algebra が働く。特に $n=1$ の

場合 には $c < 1$ の Virasoro algebra の既約指標 χ に対して知られている。)

また, γ, ϕ_m は次のように定めおく

$$\gamma(\xi, \Lambda_v, a) := \frac{|\xi + \rho|^2}{2(L-1)} + \frac{|\Lambda_v + \rho|^2}{2(n+2)} - \frac{|a + \rho|^2}{2L} - \frac{|\rho|^2}{2(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \phi_m &:= \gamma(\xi, \Lambda_v, a) - \sum_{j=1}^m j H(p_{\xi, \Lambda_v}^{(j)}, p_{\xi, \Lambda_v}^{(j+1)}, p_{\xi, \Lambda_v}^{(j+2)}) \\ &= \gamma(\xi, \Lambda_v, a) - \left\{ C_m(v_m) + \frac{1}{2} |\Lambda_v|^2 \right\} \end{aligned}$$

以上の準備のもとに

定理 (Face model, $m \rightarrow \infty$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} \chi_m(a, p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+1)}, p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+2)}) = b_{\xi, \Lambda_v} a(q)$$

$$\text{すなわち } p_{\xi, \Lambda_v}^{(j)} = \xi + \sigma^{j-1}(\Lambda_v) \quad (\text{cf } \S 9)$$

系

$$P_a = \frac{b_{\xi, \Lambda_v} a(x^{n+1}) \chi_a(x, \dots, x; x^{n+1})}{\chi_{\xi}(x, \dots, x; x^{n+1}) \chi_{\Lambda_v}(x, \dots, x; x^{n+1})}$$

(定理の証明)

$$\text{まず } p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+1)} = \xi + \Lambda_{v+m} = \xi + \Lambda_{v_m}, \quad p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+2)} = \xi + \Lambda_{v+m+1}$$

$$\chi_m(a, p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+1)}, p_{\xi, \Lambda_v}^{(m+2)}) = \sum_{\omega \in W} \det(\omega) f_m(\xi + \Lambda_{v_m} + \rho - \omega(a + \rho), \hat{v}_m)$$

2 は 17

$$f_m(\gamma, \hat{D}) = q^{\frac{1}{2}|\gamma - \Lambda_D|^2 + C_m(D)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

17 から

$$X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{w \in W} \det(w) q^{\frac{1}{2}|\xi + \rho - w(a + \rho)|^2 + C_m(D_m)} \begin{bmatrix} m \\ D \end{bmatrix}$$

17 7

$$w = t_\alpha \bar{w}, \quad \alpha \in Q, \quad \bar{w} \in G_{m+1}$$

17 7

$$\begin{aligned} & |\xi + \rho - w(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - t_\alpha \bar{w}(a + \rho)|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{w}(a + \rho) - L\alpha + \left(\frac{L}{2}|\alpha|^2 - \langle \bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle\right)\delta|^2 \\ &= |\xi + \rho - \bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho}) - L\alpha|^2 - L|\alpha|^2 - 2\langle \bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho}), \alpha \rangle \\ &= L(L-1) \left| \alpha - \frac{\bar{\xi} + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L} \right|^2 - \frac{|\bar{\xi} + \bar{\rho}|^2}{L-1} + \frac{|\bar{a} + \bar{\rho}|^2}{L} \end{aligned}$$

17 7

$$\begin{aligned} & q^{\phi_m} X_m(a, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+1)}, P_{\xi, \Lambda_D}^{(m+2)}) \\ &= \sum_{w \in G_{m+1}} \det(w) \sum_{\gamma \in Q - \frac{\bar{\xi} + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L}} q^{\frac{1}{2}L(L-1)|\gamma|^2 - \frac{1}{2}|\Lambda_D|^2 + \frac{|\Lambda_D + \rho|^2}{2(m+2)} - \frac{|\rho|^2}{2(m+1)}} \begin{bmatrix} m \\ \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるが、実際

$$\frac{1}{2}|\Lambda_v|^2 + \frac{|\Lambda_v + \rho|^2}{2(n+2)} = 0, \quad \frac{|\rho|^2}{2(n+1)} = \frac{1}{24}$$

を「 p 」とから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\phi_m} X_m(a, p_{3, \Lambda_v}^{(m+1)}, p_{5, \Lambda_v}^{(m+2)})$$

$$= \sum_{\bar{w} \in \mathcal{G}_{m+1}} \sum_{\tau \in \mathcal{Q} - \frac{\bar{z} + \bar{\rho}}{L-1} + \frac{\bar{w}(\bar{a} + \bar{\rho})}{L}} \det(w) q^{\frac{1}{2}L(L-1)|\tau|^2} \eta(\tau)^{-\frac{1}{24}}$$

$$= b_{3, \Lambda_v} a(q).$$



References

- [1] Onsager, L., "Crystal Statistics I, A Two dimensional model with an order-disorder transition", Phys. Rev. vol 65, 3, Feb 1 117, (1944)
- [2] Yang, C. N., "The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model", Phys. Rev. vol 85, 5, Mar 1, 808-816 (1952)
- [3] Baxter, R. J., "Eight Vertex Model in Statistical Mechanics and One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain I II III", Ann. Phys, 76, 1-24, 25-47, 48-71, (1973)
- [4] Andrews, G. E., Baxter, R. J., Forrester, P. J., "Eight-Vertex SOS Model and Generalized Roger-Ramanujan-Type Identities", Jour. Stat. Phys, 35, 193-266 (1984)
- [5] Baxter, R. J., "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" Academic Press, London (1982)

- [6] Kac, V. G., "Infinite Dimensional Lie Algebra 2nd ed", Cambridge Univ. Press (1985)
- [7] Humphreys, J. E., "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, 2nd printing revised", GTM 9, Springer-Verlag (1972)
- [8] Pasquier, V., "Etymology of IRF Model", Comm. Math. Phys. 118, 357-364 (1988)
- [9] Jimbo, M., "A q -Difference Analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter Equation", Lett. Math. Phys. 10, 63-69 (1985)
- [10] Jimbo, M., "A q -Analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke Algebra, and the Yang-Baxter Equations", Lett. Math. Phys. 11, 247-252 (1986)
- [11] Jimbo, M., "Quantum R Matrix for the Generalized Toda System", Comm. Math. Phys. 102, 537-547 (1986)
- [12] Drinfeld, V. G., "Quantum Groups", ICM Proceedings, Berkeley, 798-820 (1986)

- [13] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.
 "Solvable Lattice Models", RIMS
 preprint 590 (1987), to be published.
- [14] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Solvable
 Lattice Models Related to the Vector
 Representation of Classical Simple Lie Algebra",
 Comm. Math. Phys., 116, 507-525 (1988)
- [15] Date, E., Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M.
 "Fusion of the Eight Vertex SOS Model",
 Lett. Math. Phys., 12, 209-215 (1986)
- [16] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Symmetric
 Tensors of the A_n Family", in Algebraic
 Analysis, 253-266, Academic Press, London
 (1988)
- [17] Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M.
 "The A_n Face Models", Comm. Math
 Phys., 119, 543-565 (1988)
- [18] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T. and Okado, M.,
 "One-Dimensional Configuration Sums in
 Vertex Models and Affine Lie Algebra
 Characters", Lett. Math. Phys 17, 69-77 (1989)

- [19] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M., "Solvable Lattice Models Whose States are Dominant Integral Weights of $A_{n-1}^{(1)}$ ", Lett. Math. Phys 14, 123 - 131 (1987)
- [20] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, local height probabilities and theta function identities", Nucl. Phys. B290 [FS20], 231-273 (1987)
- [21] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Exactly Solvable SOS Models, proof of the star-triangle relation and combinatorial identities", Adv. Stud. Pure. Math 16, 17-122 (1988)
- [22] Jimbo, M., Miwa, T., and Okado, M. "Local height Probabilities of Solvable Lattice Models: An $A_{n-1}^{(1)}$ Family", Nucl. Phys B300 [FS22], 74-108 (1988)
- [23] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., and Okado, M. "Paths, Maya diagrams and representations of $\hat{sl}(n, \mathbb{C})$ ", To appear in Adv. Stud Pure. Math 19.

ここに挙げた reference は奇然の事ながら全く完全なものでない。

2次元の格子 model (2D Ising) が初めて厳密に解かれたのは L. Onsager [1] でありその LSP は C. N. Yang [2] に初めて公にされた。その後の現在の一連の研究の端緒と言えるものとして Baxter [3], ABF [4] が挙げられる。[3] は eight-vertex model を調べ上げてのものであり、[4] では face model, vertex-face 対応 (少し異なる)、restriction など論じられ、CTM の解説とともに face model の LSP がおめられている。(A¹_n の vector 表現に対応する model. (か [4] では Lie algebraic picture ではない。)) [5] の Baxter の本は上の [1] から [4] なども解説した教科書である。

affine 及び classical Lie algebra とその表現論については教科書 [6], [7] と参照したい。

§2 の vertex-face 対応は Pasquier [2] に
 いるものである。

§3 の quantum R matrix と YBE に関する
 は多くの論文があるが、ここでは Jimbo [9], [10],
 [11], Drinfeld [12] を挙げておく。

§4, §5, §6 の $X_m^{(1) \# 1}$ face model とその
 STR の証明 (restricted, unrestricted) は [14]
 にある。

§7 の fusion procedure は [16], [17] に入る。
 [16] では symmetric 1 場合のみ扱い、一般の
 表現については [17] で論じられている。

Corner Transfer Matrix については [4], [5]
 に解説がある。

LSP の計算は, face model については [20]
 [21], [22] ([22] は rank の高い場合), vertex
 model の face formulation は [18] で議論
 されている。

また path に関する表現の構成 (§11 定理 vertex
 $m \rightarrow \infty$) の詳細については [23] などを見らLたい。