

退化 Garnier 系の初期値空間について

木村弘信 (Kimura Hironobu) *

1 はじめに

Garnier 系は $n+3$ 個の確定特異点をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階常微分方程式の monodromy 保存変形より得られる n 個の時間変数をもつ Hamilton 系である [7]。 $n=1$ のときは Painlevé VI 型方程式と一致する。

この小文の目的は、 $n=2$ のとき Garnier 系が退化して得られる Hamilton 系に対して、その大域的な解全体をパラメトライズする複素多様体（初期値空間と呼ぶ）が構成できることを報告することである。退化していない Garnier 系に対しては、一般の n の場合にその初期値空間が構成されている [3]。しかし、退化した場合に考察されているのは $n=1$ の場合、すなわち Painlevé 方程式の場合だけである。退化した Garnier 系はいろいろあるがここでは、変形されるべき線形常微分方程式が Poincaré rank 1 の不確定特異点 1 個と、3 個の確定特異点を 3 個もつ場合に monodromy 保存変形から得られる Hamilton 系を対象とする [2]。

このような小文を書くことの言い訳をしておきたい。 $n=1$ の場合、すなわち Painlevé 方程式の場合には、20 年程前に Okamoto [6] によってその初期値空間が構成されたが、最近になって、Takano [9], Watanabe [10] らによって再び取り上げられ、初期値空間にはいる正準構造や対称性の群との関連が調べられてきた。さらに、本考究録にもあるように代数幾何の立場から M.Saito [8], H. Umemura, H. Sakai らによって新しい視点で初期値空間が研究されている。このような流れを受けて、「初期値空間の次元が高い場合は、どのように理解されるのであろうか」という安易な問いは、だれでも思いつくであろう。このようなことを考えるためにも、具体例を増やしておきたいのである。この研究会が短期共同であることもあり、このような具体例についての経過報告も許されるのではあるまいか。

*熊本大学自然科学研究科

2 2次元退化 Garnier 系

$\mathbb{P}^1$ 上の方程式

$$(1) \quad y'' + p_1(x, t)y' + p_2(x, t)y = 0$$

で特異点 $x = 0, 1, t_2, \lambda_1, \lambda_2, \infty$ をもち、その Riemann scheme が

$$\begin{pmatrix} 0 & \overbrace{0 \ 0}^1 & t_2 & \lambda_k & \infty \\ \alpha_0 & \eta t_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & 2 & \nu + \alpha_\infty \end{pmatrix}$$

であるものを考える。但し、特異点 λ_1, λ_2 は見かけの特異点であるとする。Riemann scheme の data のうち、 ν は Fuchs-Hukuhara の関係式

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \cdot 2 + 2\nu + \alpha_\infty = 5$$

より

$$(2) \quad \nu = -\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \alpha_\infty)$$

と定まり、 p_1, p_2 は次の形まで決定される。

$$p_1 = \frac{1 - \alpha_0}{x} + \frac{\eta t_1}{(x-1)^2} + \frac{2 - \alpha_1}{x-1} + \frac{1 - \alpha_2}{x-t_2} - \sum_k \frac{1}{x - \lambda_k}$$

$$p_2 = \frac{\nu(\nu + \alpha_\infty)}{x(x-1)} + \frac{t_1 K_1}{(x-1)^2} + \frac{t_2(t_2-1)K_2}{x(x-1)(x-t_2)} - \sum_k \frac{\lambda_k(\lambda_k-1)\mu_k}{x(x-1)(x-\lambda_k)}$$

λ_1, λ_2 が見かけの特異点であることより K_1, K_2 は t, λ, μ の有理関数として定まることが分かる。 K_i の具体的な形は必要ないのでここでは述べない。[2] 参照。微分方程式 (1) において t を動かしたとき、微分方程式の解の基本系に対する monodromy 行列や Stokes 係数は t に依存して変化する。そこで λ, μ を t の関数としてうまく選んでこれらの data が t に依らないようにすることが、monodromy 保存変形である。

以下、パラメータ $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty, \eta)$ をまとめて α で表すことにする。

Proposition 2.1 $(\lambda(t), \mu(t))$ がモノドロミー不変な family を与えるための必要十分条件は、 $(\lambda(t), \mu(t))$ が次の Hamilton 系を満たすことである。

$$\mathcal{K}(\alpha): \quad d\lambda_k = \sum_{i=1,2} \frac{\partial K_i}{\partial \mu_k} dt_i, \quad d\mu_k = - \sum_{i=1,2} \frac{\partial K_i}{\partial \lambda_k} dt_i$$

Hamiltonian K_i は $(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ という項を含んでいることがわかる。 $\lambda_1 = \lambda_2$ は、Pfaff 方程式系としての特異点になっているが、次の変換によって解消することができる。

変換 $(t, \lambda, \mu) \rightarrow (s, q, p)$ を

$$(3) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{t_1}, & s_2 &= \frac{t_2 - 2}{t_2 - 1} \\ q_1 &= -\frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{t_1(t_2 - 1)}, & q_2 &= \frac{(t_2 - \lambda_1)(t_2 - \lambda_2)}{(t_2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

及び条件

$$(4) \quad \sum_k p_k dp_k \equiv \sum_k \mu_k d\lambda_k \mod dt_1, dt_2$$

で定める。これは正準変換である。具体的には

$$\begin{aligned} p_1 &= -t_1 \frac{(\lambda_1 - t_2)\mu_1 - (\lambda_2 - t_2)\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ p_2 &= -(t_2 - 1) \frac{(\lambda_1 - 1)\mu_1 - (\lambda_2 - 1)\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

である。

Theorem 2.2 上に定めた正準変換によって Hamilton 系 $\mathcal{K}(\alpha)$ は

$$\mathcal{H}(\alpha) : \quad dq_k = \sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} dt_i, \quad dp_k = - \sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dt_i$$

にうつされる。ここで H_1, H_2 は $\mathbb{C}(s)[q, p]$ の元で

$$e_i H_i = \sum_{j,k=1,2} E_{j,k}^i(s, q) p_j p_k + \sum_{j=1,2} F_j^i(s, q) p_j + \nu(\nu + \alpha_\infty) q_i$$

$e_i, E_{j,k}^i, F_j^i$ は次で与えられる。

$$e_1 = s_1^2, \quad e_2 = s_2(s_2 - 1).$$

$$\begin{aligned}
E_{11}^1 &= q_1^2(q_1 - s_1) \\
E_{12}^1 &= E_{21}^1 = q_1^2 q_2 \\
E_{22}^1 &= q_1 q_2(q_2 - s_2) \\
F_1^1 &= -(\alpha_0 + \alpha_2 - 1)q_1^2 - \alpha_1 q_1(q_1 - s_1) - \eta(q_1 - s_1) - \eta s_1 q_2 \\
F_2^1 &= -(\alpha_0 + \alpha_1 - 1)q_1 q_2 - \alpha_2 q_1(q_2 - s_2) - \eta(s_2 - 1)q_2 \\
E_{11}^2 &= q_1^2 q_2 \\
E_{12}^2 &= E_{21}^2 = q_1 q_2(q_2 - s_2) \\
E_{22}^2 &= q_2(q_2 - 1)(q_2 - s_2) + \frac{s_2(s_2 - 1)}{s_1} q_1 q_2 \\
F_1^2 &= -(\alpha_0 + \alpha_1 - 1)q_1 q_2 - \alpha_2 q_1(q_2 - s_2) - \eta(s_2 - 1)q_2 \\
F_2^2 &= -(\alpha_0 - 1)q_2(q_2 - 1) - \alpha_1 q_2(q_2 - s_2) - \alpha_2(q_2 - 1)(q_2 - s_2) - \frac{s_2(s_2 - 1)}{s_1}(\alpha_2 q_1 + \eta q_2)
\end{aligned}$$

Hamiltonian の形から、Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ は $B \times T^*\mathbb{C}^2$, $B = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup \{s_1 s_2 (s_2 - 1) = 0\}$, 上で定義されているものとみなすことができる。

3 退化 Garnier 系の対称性

初期値空間の構成に必要となる Garnier 系の対称性について述べる。たとえば、 $\mathcal{H}(\alpha)$ の対称性とは、双有理的正準変換 $(s, q, p) \rightarrow (s', q', p')$ で $\mathcal{H}(\alpha)$ を別のパラメータ α' に対する $\mathcal{H}(\alpha')$ に移すものをいう。このような変換全体をつかまえることはできていないが、具体的に以下のものを作ることができる。アイディアは、線形方程式 () の確定特異点 $x = 0, t_2, \infty$ の入れ替える変換を考え、これが (s, q, p) およびパラメータにどのような変換を引き起こすかを見ることである。パラメータ $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty, \eta)$ において α_0 と α_2 を入れ替える置換を σ_1 , また α_0 と α_∞ を入れ替える置換を σ_2 とする。

Proposition 3.1 双有理変換 $T_i : (t, \lambda, \mu) \rightarrow (t', \lambda', \mu'), i = 1, 2$, を

$$\begin{aligned}
(T_1) \quad t'_1 &= \frac{t_1}{1 - t_2}, \quad t'_2 = \frac{t_2}{t_2 - 1} \\
\lambda'_k &= \frac{\lambda_k - t_2}{1 - t_2}, \quad \mu'_k = (1 - t_2)\mu_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_2) \quad t'_1 &= -t_1, \quad t'_2 = \frac{1}{t_2} \\
\lambda'_k &= \frac{1}{\lambda_k}, \quad \mu'_k = -\lambda_k^2 \mu_k + \varepsilon \lambda_k
\end{aligned}$$

変換 T_i は正準変換で、Hamilton 系 $\mathcal{K}(\alpha)$ を $\mathcal{K}(\sigma_i \cdot \alpha)$ にうつす。

正準変換 T_i は変換 $()$ により、 $\mathcal{H}(\alpha)$ たちの間の変換を誘導する。それを $\tilde{T}_i : (s, q, p) \rightarrow (s', q', p')$ とする。

Proposition 3.2 双有理的正準変換 $\tilde{T}_i$ は次で与えられる。

$$(\tilde{T}_1) \quad \begin{cases} s'_1 = -\frac{s_1}{s_2 - 1}, & s'_2 = \frac{s_2}{s_2 - 1} \\ q'_1 = -\frac{q_1}{s_2 - 1}, & q'_2 = \frac{s_2}{s_2 - 1} \left(1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}\right) \\ p'_1 = -(s_2 - 1) \left(p_1 - \frac{s_2}{s_1} p_2\right) \\ p'_2 = -(s_2 - 1) p_2 \end{cases}$$

$$(\tilde{T}_2) \quad \begin{cases} s'_1 = -s_1, & s'_2 = -\frac{1}{s_2 - 1} \\ q'_1 = -\frac{q_1}{1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}}, & q'_2 = \frac{s_2 - 1}{s_2} \frac{q_2}{1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}} \\ p'_1 = \left(1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}\right) \left(-\left(1 - \frac{q_1}{s_1}\right) p_1 + \frac{q_2}{s_1} p_2\right) \\ p'_2 = \left(1 - \frac{q_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}\right) \left(-\frac{q_1}{s_2} p_1 + \left(1 - \frac{q_2}{s_2}\right) p_2\right) \end{cases}$$

$\tilde{T}_i$ によって Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ は $\mathcal{H}(\sigma_i \cdot \alpha)$ にうつされる。

4 初期値空間の構成

4.1 (q, p) -空間のコンパクト化

(s, q, p) の空間である B 上のファイバー空間 $B \times \mathbb{C}^4 = B \times T^*\mathbb{C}^2$ のファイバーをコンパクト化として $B \times \mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^2$ -bundle を以下のように構成する。 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ を $\mathbb{P}^2$ の homogeneous coordinate, $U_i = \{\xi \in \mathbb{P}^2 \mid \xi_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^2$ を第 i アファイン座標近傍とする。 $q \in \mathbb{C}^2$ は U_0 の affine coordinate である。すなわち

$$q_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad q_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}.$$

$X_i := B \times U_i \times \mathbb{P}^2$ ($i = 0, 1, 2$) とおき、この第 3 成分の $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $\eta^{(i)}$ とする。このとき X_i たちを次の関係で貼り合わせた多様体を X で表す。

$$\eta^{(i)} = g_{i0} \cdot \eta^{(0)}$$

ここで

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu q_1 & -q_1^2 & -q_1 q_2 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix}, \quad g_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \nu q_2 & -q_1 q_2 & -q_2^2 \end{pmatrix}$$

で、 ν は (2) であたえられたものである。

Remark 4.1 $\nu = 0$ ならば $X = B \times T^*\mathbb{P}^2 \cup (B \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1)$ と *split* する。

$$X^\circ = \bigcup_{i=0}^2 X_i^\circ, \quad X_i^\circ = \{(s, \xi, \eta^{(i)}) \in X_i \mid \eta_0^{(i)} \neq 0\}$$

とおけば、 $D = X \setminus X^\circ$ は $B \times \mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle であり、次のことがわかる。

Proposition 4.2 *Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ は $B \times X$ 上の Pfaff 方程式系 $\mathcal{H}(0)(\alpha)$ に延長され、その特異点は D である。この延長された Pfaff 方程式系は、各 X_i° 上では X_i° におけるファイバー方向のアファイン座標の多項式を *Hamiltonian* とする *Hamilton* 系である。*

Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ は Painlevé property をみたすので、その任意の解は、 B の任意の曲線に沿って meromorphic に解析接続することができる。このことを用いて、 D のどのような点が、Pfaff 方程式系の積分多様体の閉包に含まれるかを決定することが第一の step になる。このような点集合を *accessible singularity* と呼ぶことにする。

Proposition 4.3 $\mathcal{H}^{(0)}(\alpha)$ の *accessible singularity* A は次の 4 つの連結成分 A_i ($i = 0, \dots, 3$) からなる D の *codimension 2* の *submanifold* である。

$$\begin{aligned} A_0 &= \{(s, \xi, \eta^{(1)}) \mid \xi_0 = 0, \eta_0^{(1)} = \eta_2^{(1)} = 0\} \cup \{(s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \xi_0 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_1^{(2)} = 0\} \\ A_1 &= \{(s, \xi, \eta^{(0)}) \mid \xi_1 = 0, \eta_0^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0\} \cup \{(s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \xi_1 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_2^{(2)} = 0\} \\ A_2 &= \{(s, \xi, \eta^{(0)}) \mid \xi_2 = 0, \eta_0^{(0)} = \eta_1^{(0)} = 0\} \cup \{(s, \xi, \eta^{(1)}) \mid \xi_2 = 0, \eta_0^{(1)} = \eta_2^{(1)} = 0\} \\ A_3 &= \left\{ (s, \xi, \eta^{(0)}) \mid \frac{\xi_1}{s_1} + \frac{\xi_2}{s_2} = \xi_0, \eta_0^{(0)} = 0, s_1 \eta_1^{(0)} = s_2 \eta_2^{(0)} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ (s, \xi, \eta^{(1)}) \mid \frac{\xi_1}{s_1} + \frac{\xi_2}{s_2} = \xi_0, \eta_0^{(1)} = 0, s_2 \eta_2^{(1)} + \eta_1^{(1)} = 0 \right\} \\ &\quad \cup \left\{ (s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \frac{\xi_1}{s_1} + \frac{\xi_2}{s_2} = \xi_0, \eta_0^{(2)} = 0, s_1 \eta_1^{(2)} + \eta_2^{(2)} = 0 \right\} \end{aligned}$$

退化 Garnier 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ の対称性 $\tilde{T}_i$ ($i = 1, 2$) は自然に X の双正則変換に持ち上げることができる。この双正則変換を同じ記号 $\tilde{T}_i$ で表すことにする。

Proposition 4.4 $\tilde{T}_i$ ($i = 1, 2$) の生成する変換群は *accessible singularity* の集合 $\{A_0, A_2, A_3\}$ に推移的な置換群として働く。また A_1 はこの群によって固定される。

	A_0	A_2	A_3
$\tilde{T}_1$	A_2	A_0	A_3
$\tilde{T}_2$	A_3	A_2	A_0

4.2 Accessible singularity A_0, A_2, A_3

Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ を X に延長して得られる Pfaff 方程式系 $\mathcal{H}^{(0)}(\alpha)$ の accessible singularity には、 $\mathcal{H}(\alpha)$ の解で定義される積分多様体たち (foliation の leaf) が入ってきて交わっている可能性がある。そこで、これらの accessible singularity に沿った blow up を行うことにより、これ等の交わっている leaf たちを分離することを考えるのである。ここでは、Proposition 4.4 を考慮にいて、 A_2 に沿って blow up することを考える。

1. 多様体 X を A_2 に沿って blow up して得られる多様体を $X^{(1)}$ で、 $D = D^{(0)}$ の proper transform を再び同じ記号 $D^{(0)}$ で、exceptional divisor を $D_2^{(1)}$ で表すことにする。 $\mathcal{H}^{(0)}(\alpha)$ から $X^{(1)}$ に誘導される Pfaff 方程式系を $\mathcal{H}^{(1)}(\alpha)$ とすると、次のことが分かる。

- $D^{(0)}$ と exceptional divisor $D_2^{(1)}$ の余次元 1 の部分多様体 $A_2^{(1)}$ に特異点をもつ。
- $D_2^{(1)} \setminus A_2^{(1)}$ に Pfaff 系 $\mathcal{H}^{(1)}(\alpha)$ の特異点はないが、この部分多様体に含まれるすべての leaf は、ファイバー空間 $\pi : X^{(1)} \rightarrow B$ のファイバーに含まれる。

具体的に状況を見てみれば、次のようになる。 $X_{02} := \{(s, q, \eta^{(0)}) \in X_0 \mid \eta_2^{(0)} \neq 0\}$ において accessible singularity を見てみる。 X_{02} における局所座標 (s, q, u) を

$$q_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad q_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}, \quad u_1 = \frac{\eta_1^{(0)}}{\eta_2^{(0)}}, \quad u_2 = \frac{\eta_0^{(0)}}{\eta_2^{(0)}}$$

により定義すると、 $X_{02} \cap A_2 = \{(s, q, u) \mid q_2 = u_1 = u_2 = 0\}$ である。 A_2 に沿った blow up $X_{02}^{(1)}$ を

$$X_{02} \times \mathbb{P}^2 \supset X_{02}^{(1)} := \left\{ (s, q, u, \zeta) \mid \begin{aligned} \zeta_0 u_1 - \zeta_1 q_2 &= 0 \\ \zeta_0 u_2 - \zeta_2 q_2 &= 0 \\ \zeta_1 u_2 - \zeta_2 u_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

とすると

$$D^{(0)} \cap X_{02}^{(1)} = \{\zeta_2 = 0\}, \quad D_2^{(1)} \cap X_{02}^{(1)} = \{q_2 = 0\}, \quad A_2^{(1)} \cap X_{02}^{(1)} = \{q_2 = \zeta_0 - \alpha_2 \zeta_2 = 0\}$$

である。

2. 第1回目の blow up によって現れた exceptional divisor $D_2^{(1)}$ に埋め込まれている $\mathcal{H}^{(1)}(\alpha)$ の特異点集合 $A_2^{(1)}$ を考察する。 $X^{(1)}$ を $A_2^{(1)}$ に沿って blow up して得られる多様体を $X^{(2)}$ とし、 $D^{(0)}, D_2^{(1)} \subset X^{(1)}$ の proper transform を再び同じ記号で表す。また新たに現れる exceptional divisor を $D_2^{(2)}$ と書くことにする。このとき次のことが分かる。

- $\alpha_2 \neq 0$ とするとき、 $X^{(2)}$ に誘導される Pfaff 系は $D_2^{(2)} \setminus (D^{(0)} \cup D_2^{(1)}) \cap D_2^{(2)}$ に特異点をもたず、この部分多様体の点を通る leaf はファイバー空間 $\pi : X^{(2)} \rightarrow B$ のファイバーに transversal である。
- $X^{(2)}$ 上の Pfaff 系の leaf で $D_2^{(2)} \setminus (D^{(0)} \cup D_2^{(1)}) \cap D_2^{(2)}$ に完全に含まれてしまうものはない。

以上により、accessible singularity A_2 に入ってくる $\mathcal{H}(\alpha)$ の積分多様体は集合 $D_2^{(2)} \setminus (D^{(0)} \cup D_2^{(1)}) \cap D_2^{(2)}$ でパラメトライズされることがわかった。

Accessible singularity A_0, A_3 に対しても上と同様の操作を行い、得られる divisor を $D_i^{(1)}, D_i^{(2)}$ ($i = 0, 3$) とする。

4.3 Accessible singularity A_1

前の節と同様の process を accessible singularity A_1 について実行する。以下では、前の節と記号が重複することがあるが、ここで実行する process は A_0, A_2, A_3 とは独立に A_1 の近傍だけで考えればよいので、誤解は生じないであろう。

1. $A_1 \subset X$ に沿って blow up を行い、得られる多様体を $X^{(1)}$ とする。 $D^{(0)}$ の proper transform を同じ記号 $D^{(0)}$ で、新しく現れる exceptional fiber を $D_1^{(1)}$ で表す。

- $D_1^{(1)}$ の中に誘導された Pfaff 系は $D_1^{(1)} \setminus (D^{(0)} \cap D_1^{(1)})$ に特異点を持たない。
- $D_1^{(1)} \setminus (D^{(0)} \cap D_1^{(1)})$ においては leaf はすべてファイバー空間 $\pi : X^{(1)} \rightarrow B$ のファイバーに含まれる。

2. $D_1^{(1)}$ の余次元 1 の部分多様体 $D^{(0)} \cap D_1^{(1)}$ に沿って blow up を行い、得られた多様体を $X^{(2)}$ とする。 $D^{(0)}, D_1^{(1)}$ の proper transform を同じ記号で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(2)}$ とする。このとき $D_1^{(2)}$ は $X^{(2)}$ に誘導された Pfaff 系の特異点であるが、 $\mathcal{H}(\alpha)$ の解の定める leaf の閉包に含まれる可能性のある点は、 $D_1^{(2)}$ の余次元 2 の部分集合となる。これを $A_1^{(2)} \subset D_1^{(2)}$ とかく。

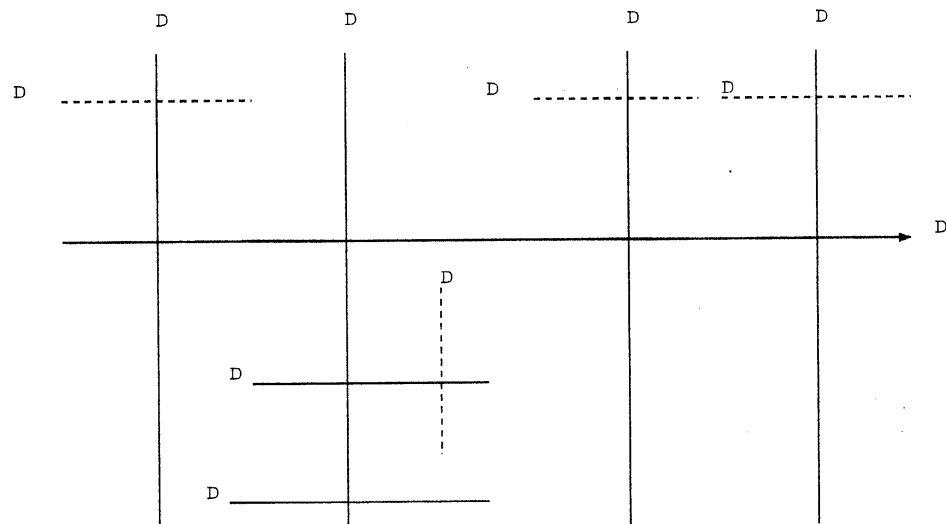
3. $A_1^{(2)}$ に沿って第 3 回目の blow up を行い多様体 $X^{(3)}$ を得る。現れる proper transform を $D^{(0)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}$, 部分多様体 $A_1^{(2)}$ から現れる exceptional divisor を $D_1^{(3)}$ とする。 $X^{(3)}$ に誘導された Pfaff 系の $D_1^{(3)}$ に含まれる特異点は $D_1^{(3)}$ の余次元 1 の部分多様体になる。これを $A_1^{(3)} \subset D_1^{(3)}$ とかく。このとき、 $D_1^{(3)} \setminus A_1^{(3)}$ の点を通るすべての leaf はファイバー空間 $X^{(3)} \rightarrow B$ のファイバーに含まれてしまう。

3. $X^{(3)}$ を $A_1^{(3)}$ に沿って第 4 回目の blow up を行い多様体 $X^{(4)}$ を得る。前と同様に、proper transform を $D^{(0)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_1^{(3)}$ で表し、新しく現れる exceptional divisor を $D_1^{(4)}$ とかく。このとき次が分かる。

- $X^{(4)}$ に誘導される Pfaff 系は $D_1^{(4)}$ 上に特異点を持たない。
- $D_1^{(4)} \setminus (D_1^{(3)} \cap D_1^{(4)})$ では leaf は, ファイバー空間 $\pi : X^{(4)} \rightarrow B$ のファイバーに transversal である。

5 Conclusion

各 accessible singularity A_i ($i = 0, \dots, 3$) に対して上の節で行ったすべての blow up の結果として得られる多様体を $\bar{E}$ とし、現れる divisor を、上と同じ記号 $D_i^{(k)}$ で表す (これ等の配置の概略図参照)。



Theorem 5.1 Hamilton 系 $\mathcal{H}(\alpha)$ のパラメータは

$$\alpha_0, \alpha_2, \alpha_\infty, \eta \neq 0$$

を満たすとする。 $E := \bar{E} \setminus \bigcup D_i^{(k)}$ とおくと、ファイバー空間 $\pi : E \rightarrow B$ は次の性質を持つ。

- $\mathcal{H}(\alpha)$ から E に誘導された Pfaff 系によって定義される E の foliation の leaf はファイバーに transversal に交わる。
- $s_0 \in B$ を始点とする B 内の任意の曲線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ と $p \in \pi^{-1}(s_0)$ が与えられた時、 γ は p を通る leaf に持ち上げることができる。

参考文献

- [1] R. Garnier: Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.
- [2] H. Kimura: The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura. Appl. , **155**(1989), 25-74.
- [3] H. Kimura : Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$, Anali.Scuola Norm. Sup. di Pisa , **20**(1993), 1-60.
- [4] B. Malgrange: Sur les déformation isomonodromiques, I. Singularités régulières, séminaire E.N.S. Birkhäuser, 1982.
- [5] T. Miwa : Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ functions, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **17**(1981), 703-721.
- [6] K. Okamoto : Sur les feuilletages associé aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Jap. J. Math., **5**(1979), 1-79.
- [7] K. Okamoto : Isomonodromic deformation and Painlevé equations and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Math. **33** (1986), 575-618.
- [8] M.Saito: Article in this volume.
- [9] T. Shioda , K.Takano: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), 271-291.
- [10] H. Watanabe: Defining variety and birational canonical transformations of the fifth Painlevé equation, preprint Kyushu University(1997)