

ある種の半中心度関数により定まるグラフ の中心の位置とブロックとの関係

東工大 竹内 正士 (Masashi Takeuchi)

東工大 副島 昌二 (Syoji Soejima)

1. まえがき

グラフの点集合上で定義され、点の中心らしさを表わす関数をグラフの中心度関数といい、輸送網における配送センターや集積センターの位置決定などを抽象化したネットワークにおける中心設定問題の基礎として種々の定義が提案されている^{[1]~[8]}。しかし、その研究は中心度関数を一般化することが主であり、中心の位置とグラフの結線構造との関係についてはあまり調べられていない。このことについて古くから知られているのはグラフが木の場合の center や median が高々2個であり2個の場合には隣接するという結果^[9]や、同一ブロック内に center が存在するという結果^[10]であるが、これらの結果において考察の対象とされている中心らしさは特定のものであり、一般的な中心度関数による中心の位置につ

いてはあまり調べられていない。ここでは、グラフの2点間の距離に基づくやや一般的な形の中心らしさを表わす関数を考察の対象とし、その関数により定まる中心が同一ブロック内にあるための条件について考察し、凸半中心度関数を得ている。又、これを δ -凸半中心度関数に拡張し、 δ -凸半中心度関数による中心の位置とグラフのブロックとの関係を調べている。

2. 凸半中心度関数とグラフのブロック

対象とするグラフ $G=(V, E)$ は連結無向グラフで、各枝 e ($e \in E$) には長さ $l(e)(>0)$ が、各点 v ($v \in V$) には重み $p(v)$ が、それぞれ割りあてられているものとする。又、 G の2点 u, v 間の距離を $d(u, v)$ とする。さらに R^+ を正の実数全体、 W を実数の部分集合とし、 $R^+ \times W$ 上で定義された2変数実数値関数 φ_w を考える。又、グラフ全体の集合を $\mathcal{G}$ 、総ての点の重みが W 内にあるグラフ全体の集合を $\mathcal{G}_W$ とする。このとき、 $\mathcal{G}_W$ に属す G の点集合 V 上で定義された次の形の関数 $f(v)$ を考える。ただし $\varphi_w(x, y)$ は x の連続関数とする。

$$f(v) = \sum_{w \in V} \varphi_w(d(v, w), p(w)) \quad (1)$$

ここで、 $f_w(x, y)$ が各 $y (\in W)$ に対して x の単調非減少関数のとき、 $\mathcal{G}_w$ に属す G に対して定まるこれらの f_w を $\mathcal{G}_w$ の半中心度関数という。又、各 $y (\in W)$ に対して $f_w(x, y)$ が x の単調非減少な凸関数のとき f_w を $\mathcal{G}_w$ の中心度関数とし、各 $y (\in W)$ に対して $f_w(x, y)$ が x の単調増加な凸関数のとき f_w を $\mathcal{G}_w$ の凸半中心度関数という。以下では簡単のために、これらを単に半中心度関数、中心度関数、凸半中心度関数ということもある。又、 f_w による $G (\in \mathcal{G}_w)$ の中心とは f_w を最小にする点 v のことをいう。次に、グラフ $G = (V, E)$ に対して $G^* = (V^*, E^*)$ を次のように定める。

$$V^* = V \quad (2)$$

$$E^* = \{ e \in E \mid \exists u, \exists v (u, v \in V) \text{ } e \text{ は } u, v \text{ を結ぶある最短パスに含まれる。} \} \quad (3)$$

〔定義 1〕 グラフ G が拡張された意味で可分であるとは G^* が通常の意味で可分であることをいう。又、可分グラフ G の切断点とは G^* の通常の切断点のことをいう。 (定義終)

可分でないグラフを非可分グラフという。

〔定義 2〕 グラフ G の拡張された意味のブロックとは、 G^* の通常の意味のブロックの点集合から誘導される G の部分グラフのことをいう。 (定義終)

以下では混同の恐れがないう限り、拡張された意味での可分、

非可分, ブロックを単に, 可分, 非可分, ブロックというようにする。グラフがブロックに一意に分解されることは, グラフの通常のブロックへの分解の一意性からわかる。又, 次の性質が成り立つこともわかる。

〔性質 1〕 異なるブロックに属す 2 点 u, v に対して G の点集合 V の二つの部分集合 V_1, V_2 及び, 切断点 w が存在して次の (i) から (v) までが成り立つ。

$$(i) \quad V = V_1 \cup V_2 \quad (4)$$

$$(ii) \quad V_1 \cap V_2 = \{w\} \quad (5)$$

$$(iii) \quad |V_1| \geq 2, |V_2| \geq 2 \quad (6)$$

$$(iv) \quad V_1 \text{ の点と } V_2 \text{ の点を結ぶ最短パスは } w \text{ を通る。}$$

$$(v) \quad u \in V_1, v \in V_2, w \neq u, w \neq v \quad (7)$$

(性質終)

図 1 (a), (b) に非可分グラフの例を, 図 1 (c) に可分なグラフのブロックへの分解の例を示す。ただし, 各枝の側の数字は枝の長さとする。又, ここで定義された可分性, 非可分性, 切断点, ブロックは枝の長さが総て 1 の場合には通常の意味の可分性, 非可分性, 切断点, ブロックに一致する。

3. 凸半中心度関数による中心の位置とブロックとの関係

式(1)の $f(u)$ による中心に関する次の二つの性質を考える。

(P1) 木の中心は高々2個で2個の場合には隣接する。

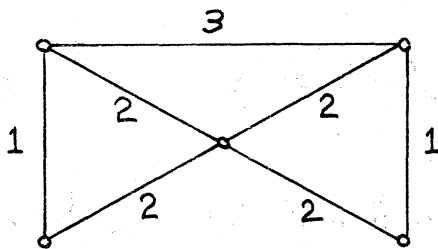
(P2) 中心は同一ブロック内にある。

この性質P1, P2 に関して次の定理が成り立つ。

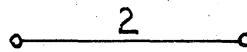
[定理1] $\mathcal{G}_w$ に属す任意の木に対して性質P1 が成り立つための必要十分条件は $f(u)$ が $\mathcal{G}_w$ の凸半中心度関数であることである。

[定理2] $\mathcal{G}_w$ に属す任意の G に対して性質P2 が成り立つための必要十分条件は $f(u)$ が $\mathcal{G}_w$ の凸半中心度関数であることである。

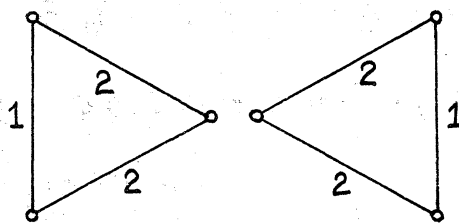
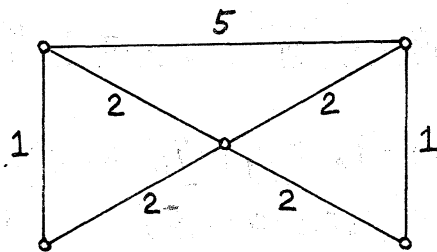
(証明) 定理1の必要性と定理2の十分性を示せばよい。



(a)



(b)



(c)

定理1の必要性： まず、 $\varphi_w(x, y)$ が x の単調増加関数であることを示す。もしそうでないとする x_1, x_2 ($x_2 > x_1 > 0$) と y ($y \in W$) が存在して $\varphi_w(x_1, y) \geq \varphi_w(x_2, y)$ が成り立つ。このとき、図2(a)のグラフ G_1 を考える。ただし、各点の重みは y とし、各枝の長さは $l(e_1) = l(e_3) = (x_2 - x_1)/2$, $l(e_2) = x_1$ とする。 G_1 の各点の中心度を計算し、上の不等式を使うと、 $f(v_1) = f(v_4) \leq f(v_2) = f(v_3)$ となり、中心に関する性質 $P1$ は満たされない。 G_1 は $\mathcal{G}_w$ に属す木であるから仮定に反する。

次に、 $\varphi_w(x, y)$ が x の凸関数であることを示す。もしそうでないとする $\varphi_w(x, y)$ が x の連続関数であることから、 x_1, x_2 ($x_2 > x_1 > 0$) と y ($y \in W$) が存在して次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \{ \varphi_w(x_1, y) + \varphi_w(x_2, y) \} < \varphi_w\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y\right) \quad (8)$$

このとき、図2(b)のグラフ G_2 を考える。ただし、各点の重みは総て y とし $l(e'_i) = l(e''_i) = x_1$ ($1 \leq i \leq N$), $l(e_1) = l(e_2) = (x_2 - x_1)/2$ とする。各点の中心度を計算して次式を得る。

$$\begin{aligned} f(v_2) - f(v_1) = N \{ & 2\varphi_w\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y\right) - \varphi_w(x_1, y) - \varphi_w(x_2, y) \} \\ & + \varphi_w\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, y\right) - \varphi_w(x_2 - x_1, y) \end{aligned} \quad (9)$$

式(8), (9)より十分大きな N に対して $f(v_2) > f(v_1)$ が成り立つ。しかし G_2 は $\mathcal{G}_w$ に属す木であるから性質 $P1$ が成り立ち、グラフの対称性から中心は v_2 のみであり、これは矛盾である。

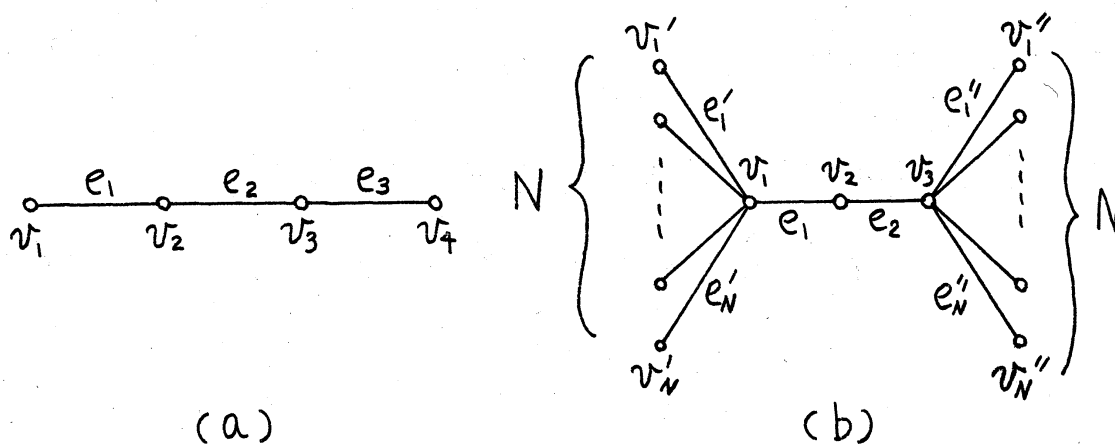


図 2

定理 2 の十分性： G の異なるブロックに属す 2 点 u, v と G の任意の点 x を考える。 u, v に対して性質 1 の (i) から (v) まですみたす V_1, V_2 ，切断点 w が存在する。 $\lambda_1 = d(u, w)$ ， $\lambda_2 = d(v, w)$ とし、 $P_x = \lambda_2 d(u, x) + \lambda_1 d(v, x) - (\lambda_1 + \lambda_2) d(w, x)$ とおき、 $P_x \geq 0$ ， $P_w > 0$ を示す。 $x \in V_1$ の場合には v, x を結ぶ最短パスは w を通るので $d(v, x) = d(v, w) + \lambda_2$ であり、 P_x は次のように変形される。

$$P_x = \lambda_2 \{d(u, x) - d(w, x) + \lambda_1\} \quad (10)$$

$d(u, x) \geq d(w, x)$ の場合には $P_x > 0$ であり、特に $P_w > 0$ である。 $d(u, x) < d(w, x)$ の場合には三角不等式 $d(u, x) + d(u, w) \geq d(w, x)$ より $P_x \geq 0$ が成り立つ。 $x \in V_2$ の場合も同様である。従って次式が得られ、特に $x = w$ の場合には真の不等号が成り立つ。

$$\lambda_2 d(u, x) + \lambda_1 d(v, x) \geq (\lambda_1 + \lambda_2) d(w, x) \quad (11)$$

一方、 φ_w の凸性より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \varphi_w(d(u, x), p(x)) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \varphi_w(d(v, x), p(x)) \\ & \geq \varphi_w\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} d(u, x) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} d(v, x), p(x)\right) \end{aligned} \quad (12)$$

式(11), (12) と φ_w の単調増加性より次式が成り立つ。特に、 $x=w$ の場合には真の不等号が成り立つ。

$$\lambda_2 \varphi_w(d(u, x), p(x)) + \lambda_1 \varphi_w(d(v, x), p(x)) \geq (\lambda_1 + \lambda_2) \varphi_w(d(w, x), p(x)) \quad (13)$$

この式を総ての x について加えると次式を得る。

$$\lambda_2 f(u) + \lambda_1 f(v) > (\lambda_1 + \lambda_2) f(w) \quad (14)$$

今、 u, v が共に中心であるとする。と $f(u) = f(v)$ より $f(u) = f(v) > f(w)$ となり u, v が中心であることに反する。従って $G \in \mathcal{G}_w$ の中心は同一ブロック内にある。

(証明終)

例えば、 $W = (0, \infty)$, $\varphi_w(x, y) = xy$ の場合、 $f(w)$ は凸半中心度関数である。

$$f(w) = \sum_{v \in V} d(v, w) p(v) \quad (15)$$

この $f(w)$ による中心は点に正の重みのある場合の median であり、次の系が成り立つ。

[系 1-1] 木の正の点重み付き median は高々 2 個で 2 個の場合には隣接する。

〔系 2-1〕 連結グラフ G の正の点重み付き median は同一ブロック内にある。

系 1-1 は枝の長さも点重みも総て 1 の場合には Jordan と Sylvesten による良く知られた結果^[9]である。又、系 2-1 は連結グラフの center に関する Harary と Norman による結果^[10]に類似した結果である。

4. $\mathcal{S}$ -凸半中心度関数による中心の位置とブロックとの関係について

$\mathcal{S}$ を、 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ とし、 $V \times \mathcal{S}$ 上で定義された実数値関数 $d(v, S)$ ($v \in V$, $S \in \mathcal{S}$) を次のように定める。

$$d(v, S) = \sum_{u \in S} m_{S,u} d(v, u) \quad (16)$$

ただし、 $m_{S,u}$ は v に依存しない正の定数である。又、各 S に対して単調増加な凸関数 $\varphi_S(x)$ が割り当てられているとする。このとき、 V 上で定義された次の関数 $f(v)$ を G の $\mathcal{S}$ -凸半中心度関数、あるいは単に $\mathcal{S}$ -凸半中心度関数とすることにする。

$$f(v) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \varphi_S(d(v, S)) \quad (17)$$

例えば、 $\varphi(x, y)$ を $R^+ \times W$ 上で定義され、各 y に対して x の

単調増加な凸関数とし、 $\mathcal{S} = \{S \mid v \in V\}$, $m_{S,u} = 1 \ (v \in V)$, $\varphi_{S,u}(x) = \varphi(x, p(u))$ とすると $f(u)$ は凸半中心度関数となる。この $f(u)$ による中心は定理 2 から同一ブロック内にある。しかし、例えば枝の長さを総て 1 とし、 $\mathcal{S} = \{S\}$, $S \subseteq 2^V$, $S \neq \emptyset$, $m_{S,u} = 1 \ (u \in S)$, $\varphi_S(x) = x$ とした $f(u) = \sum_{u \in S} d(v, u)$ による中心は S -centroid^[11] となり、この S -centroid は必ずしも同一ブロック内にはないことが知られている^[11]。一般の $\mathcal{S}$ に対しては次の定理が成り立つ。

〔定理 3〕 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ に属す G の総ての切断点で G^* を分離したグラフの連結成分の一つに $\mathcal{S}$ -凸半中心度関数による中心は総て含まれる。 (定理終)

証明は省略する (定理 2 の十分性の証明と同様にできる)。例として、 $m_{S,u} = 1$, $\varphi_S(x) = x$ とした $\mathcal{S}$ -凸半中心度関数を考える。枝の長さが総て 1 の図 3(a) のグラフ G において、 $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$, $S_1 = \{v_1, v_2, v_7, v_8\}$, $S_2 = \{v_3, v_5\}$ とすれば $f(v_1) = f(v_2) = 16$, $f(v_3) = f(v_4) = f(v_5) = 12$, $f(v_6) = 14$, $f(v_7) = f(v_8) = 18$ より中心は v_3, v_4, v_5 である。 G^* を $S_1 \cup S_2$ に含まれる切断点 v_3, v_5 で分離すると図 3(b) のようになり、中心は確かに、 v_3, v_4, v_5 からなる連結成分に含まれている。又、 $\mathcal{S} = \{S\}$, $S = \{v_1, v_2, v_7, v_8\}$ とした場合の中心は v_3, v_4, v_5, v_6 である。 S は切断点を含んでいないからこの場合には定理 3

の内容は自明である。この例は S -centroid を 3 個以上持つ木の例として知られているものである^[11]。

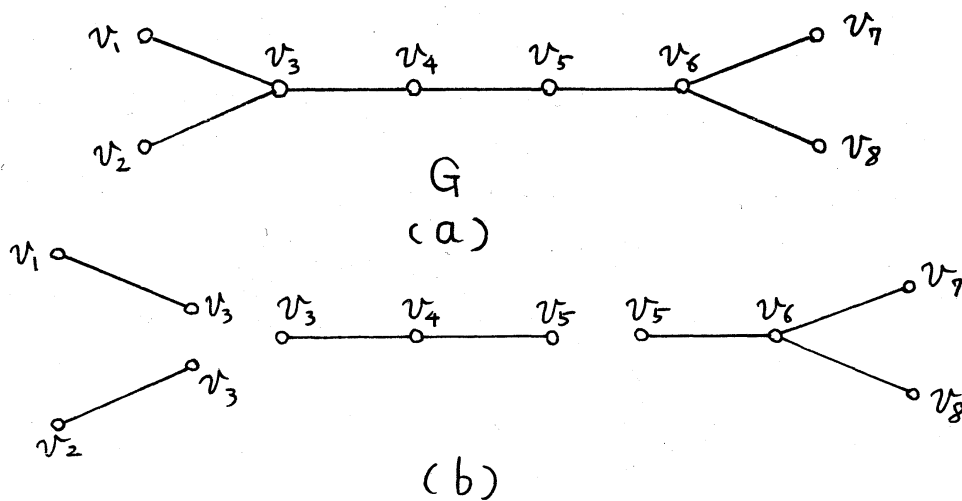


図3

文 献

- [1] 梶谷, 丸山: "グラフにおける中心度の関数表示 - 通信網の評価への応用 -", 電子通信学会論文誌(A), J59-A, 7, pp. 531-538 (1976-07).
- [2] 岸, 佐々木: "無向グラフにおける最短パスの交差関数", 電子通信学会論文誌(A), J63-A, 11, pp. 745-752 (1980-11).
- [3] 篠田, 仙石: "グラフにおける2点一致と中心度関数", 電子通信学会論文誌(A), J65-A, 8, pp. 787-793 (1982-04).

- [4] 篠田, 仙石: "距離空間における点の中心らしさを表
 む関数の公理的基礎づけ", 電子通信学会論文誌(A),
 J66-A, 4, pp. 352-359 (1983-04).
- [5] 岸, 竹内, 伊藤: "2節点を分離するカットセットの
 最小枝数を用いた中心度関数", 電子通信学会技術研究報告
 CAS 83-2, pp. 9-16 (1983-05).
- [6] 岸, 竹内: "有向グラフの中心度関数の一形式", 電
 子通信学会論文誌(A), J66-A, 7, pp. 470-477 (1983-06).
- [7] 仙石, 加納, 篠田: "複数点対間の縮小と中心度関数"
 , 電子通信学会技術研究報告, CAS 83-1, pp. 1-8 (1983-05).
- [8] 篠田, 仙石: "ネットワークの枝の中心らしさを測る
 関数", 電子通信学会技術研究報告, CAS 83-119, pp. 7-12
 (1984-02).
- [9] C. Jordan: "Sur les assemblages de lignes",
 J. Reine Angew. Math. 70 pp. 185-190 (1869).
- [10] F. Harary, R. Z. Norman: "The dissimilarity
 characteristic of Husimitrees", Ann. of Math. 58,
 pp. 134-141 (1953).
- [11] P. J. Slater: "Centers to Centroids in Graphs",
 Jour. Graph Theory, 2, pp. 209-222 (1978).