

(Z, λ) -核型写像と Z -核型空間

島大 文理 城市篤夫

Persson と Pietsch はバナッハ空間の間の古典的な核型写像, 擬核型写像を発展させて, バナッハ空間における P -核型写像, P -擬核型写像の概念を導入し, その理論を展開した。これは最近宮崎氏によって点列空間 $\ell_{p,q}$ を使って (p,q) -核型写像, (p,q) -擬核型写像の概念に拡張された。一方これはまた Ceitin によって (Z, p) -核型写像, (Z, p) -擬核型写像の概念に拡張された。ここではこれ等二種類の概念を抽象点列空間 λ を使って (Z, λ) -核型写像, (Z, λ) -擬核型写像の概念に拡張する。ここで $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ で $\lambda = \ell_{p,q}$, Z が 1 次元ならば (Z, λ) -核型写像は宮崎氏の導入した (p,q) -核型写像と一致し, $\lambda = \ell_p$ ならば (Z, λ) -核型写像は Ceitin によって導入された (Z, p) -核型写像と一致する。また我々の Ceitin によって導入された (Z, ℓ_1) -核型写像を λ を使って核型空間の概念を Z -核型空間に拡張し, 核型空間とバナッハ空間と

このテニソル積は L_0 -核型空間となることを示す。

第1節にかいてはまず C_0 上に拡張された測度 μ が与えられたとする。そのとき $\lambda \subset C_0$ を $\lambda = \{x \in C_0 \mid p(x) < \infty\}$ で定義し、 $p \in \|\cdot\|_\lambda$ で表わす。この λ は零でない空間でその条件を満たすものとする。

(a) 任意の $u = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in \lambda$ に対して $u^i = (u_1, \dots, u_n, 0, \dots) (i=1, 2, \dots)$ とおけば、 $i \rightarrow \infty$ のとき $\|u - u^i\|_\lambda \rightarrow 0$ 。

(b) $\|\cdot\|_\lambda$ は絶対的単調である。

(c) λ は K -対称である。

(d) 任意の $u = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in \lambda$ に対して、 $v \in \mathbb{R}$ かつ $v \neq u_n (n=1, 2, \dots)$ のとき $u_j = 0$ なる部分点列 $(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}, \dots)$ をとる。このとき $\|vu\|_\lambda = \|u\|_\lambda$ となる。

上の λ を L 型という。条件 (b) (c) (d) を満たす λ を L_0 型という。このとき $\lambda_{p,q} (1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty)$ は L_0 型となり、 $\lambda_{p,q} (1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty)$ は L 型となる。

第2節にかいては $\lambda(Z)$ について調べる。まず次の定義を述べる：

定義、 λ を L_0 型とし、 Z をバナッハ空間とする。このとき $\lambda(Z)$ を $\|(\|u_i\|\|)\|_\lambda < \infty$ なる Z の中に値をとり、点列 (u_i) のすべての集合とする。

定義、 λ を L 型とし、 Z をバナッハ空間とする。このとき

$\lambda(Z)$ であり $\|C\|_{\lambda} \|A_i\|_{\lambda'} < \infty$ なる Z' の中に適する点列 (u_i) のすべての集合とする。

この定義の下に次の結果が得られる。

定理 λ を L 型で完備とし, Z をバナッハ空間とする。このとき $\lambda(Z)$ の双対空間は $\lambda'(Z')$ となる同型となる。

次の節においては (Z, λ) -核型写像の概念を与える。そのために次の定義を与えよう。

定義 λ を L 型とし, E, F, Z をバナッハ空間とする。

$T \in L(E, F)$ が (Z, λ) -核型写像 (右 (Z, λ) -核型写像) とは

$\|C\|_{\lambda} \|A_i\|_{\lambda'} < \infty$, $\sup_{\|w\| \leq 1} \|C\|_{\lambda} \|B_i' w\|_{\lambda'} < \infty$ ($\sup_{\|u\| \leq 1} \|C\|_{\lambda} \|A_i u\|_{\lambda'} < \infty$, $\|C\|_{\lambda} \|B_i\|_{\lambda} < \infty$) なる点列 $\{A_i\} \subset L(E, Z)$, $\{B_i'\} \subset L(Z, F)$ が存在して任意の $u \in E$ に対して $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} B_i' A_i u$ と表わせることとする。このとき $N_{Z, \lambda}(E, F)$ で (Z, λ) -核型写像の全体を表わし, $N^{Z, \lambda}(E, F)$ で右 (Z, λ) -核型写像のすべての集合を表わす。それ等の上に次の和を擬ノルムと導入する。

$$V_{Z, \lambda}(T) = \inf \left(\|C\|_{\lambda} \|A_i\|_{\lambda'} \cdot \sup_{\|w\| \leq 1} \|C\|_{\lambda} \|B_i' w\|_{\lambda'} \right)$$

$$V^{Z, \lambda}(T) = \inf_{\|u\| \leq 1} \left(\sup_{\|u\| \leq 1} \|C\|_{\lambda} \|A_i u\|_{\lambda'} \cdot \|C\|_{\lambda} \|B_i\|_{\lambda} \right)。$$

$1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ で $\lambda = L_{p, q}$, Z がノルム空間ならば (Z, λ) -核型写像 (右 (Z, λ) -核型写像) は宮崎氏によって導入された (p, q) -核型写像 (右 (p, q) -核型写像) と一致する。また $\lambda = L_p$ のとき (Z, λ) -核型写像は Ceitin によって導入された

(Z, p) -核型写像と一致する。また次の結果が得られる。

定理 λ を $\mathcal{L}$ 型とし、 E, F, Z をバナッハ空間とする。

もし $T \in N_{Z, \lambda}(E, F)$ ならば随伴写像 T' は $N_{Z', \lambda}(F', E')$ に属し、 $V_{Z', \lambda}(T') \leq V_{Z, \lambda}(T)$ となる。さらに E, F, Z が反射的ならば $T' \in N_{Z', \lambda}(F', E')$ のとき $T \in N_{Z, \lambda}(E, F)$ となり、 $V_{Z', \lambda}(T') = V_{Z, \lambda}(T)$ となる。

定理 λ を $\mathcal{L}$ 型とし、 E, F, G, Z をバナッハ空間とする。もし $T \in N_{Z, \lambda}(E, F)$ 、 $S \in L(F, G)$ ならば $ST \in N_{Z, \lambda}(E, G)$ 、 $V_{Z, \lambda}(ST) \leq \|S\| V_{Z, \lambda}(T)$ となる。また $T \in L(E, F)$ 、 $S \in N_{Z, \lambda}(F, G)$ ならば、もし $ST \in N_{Z, \lambda}(E, G)$ 、 $V_{Z, \lambda}(ST) \leq V_{Z, \lambda}(S) \cdot \|T\|$ となる。

定理 λ を $\mathcal{L}$ 型とし、 λ をバナッハ空間とする。また E, F, Z をバナッハ空間とするとき $T \in L(E, F)$ が (Z, λ) -核型写像であるための必要十分条件は $T = Q_1 D_1 P_1 : E \xrightarrow{P_1} \ell_\infty(Z) \xrightarrow{D_1} \lambda(Z) \xrightarrow{Q_1} F$ に分解されることである。ここで $P_1 \in L(E, \ell_\infty(Z))$ が $\|P_1\| \leq 1$ 、 $Q_1 \in L(\lambda(Z), F)$ が $\|Q_1\| \leq 1$ 、また $D_1 \in L(\ell_\infty(Z), \lambda(Z))$ は $(\rho_i) \in \lambda$ が存在して $D_1((\alpha_i)) = (\rho_i \alpha_i)$ なる写像である。

第4節では (Z, λ) -擬核型写像を導入しこれについて研究する。まず (Z, λ) -擬核型写像の定義を述べる。

定義 λ を $\mathcal{L}_0$ 型とし、 E, F, Z をバナッハ空間とする。

$T \in L(E, F)$ が (Z, λ) -擬核型写像とは $(\|A_i\|) \in \lambda$, $\|T\| \leq \|(\|A_i\|)\|_\lambda$ ($\lambda \in E$) なる可算点列 $\{A_i\} \subset L(E, Z)$ が存在することである。このとき $V_{Z, \lambda}^{\otimes}(T) = \inf \|(\|A_i\|)\|_\lambda$ で表わし, $N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F)$ によって (Z, λ) -擬核型写像の全体の集合を表わす。

このとき $\lambda = \ell_{p, q}$, Z がノルム空間ならば (Z, λ) -擬核型写像は宮崎氏の導入した (p, q) -擬核型写像と一致する。また $\lambda = \ell_p$ のとき (Z, λ) -擬核型写像は Ceitin によって導入された (Z, p) -擬核型写像と一致する。これに対して次の結果が得られる。

定理 λ を $\mathcal{L}$ 型とし, E, F, Z をバナッハ空間とすると $N_{Z, \lambda}(E, F) \subset N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F)$, $V_{Z, \lambda}^{\otimes}(T) \leq V_{Z, \lambda}(T)$ が成立する。

定理 λ を $\mathcal{L}_0$ 型とし, E, F, Z をバナッハ空間とすると $T_k \in N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F)$ ($k=1, \dots, M$) ならば $\sum_{k=1}^M T_k \in N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F)$, $V_{Z, \lambda}^{\otimes}(\sum_{k=1}^M T_k) \leq M \cdot C^{M-1} (\sum_{k=1}^M V_{Z, \lambda}^{\otimes}(T_k))$ となる。

定理 λ を $\mathcal{L}$ 型とし, E, F, Z をバナッハ空間とする。 F が拡張性をもつならば $N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F) \subset N_{Z, \lambda}(E, F)$ となり任意の $T \in N_{Z, \lambda}^{\otimes}(E, F)$ に対して $V_{Z, \lambda}^{\otimes}(T) = V_{Z, \lambda}(T)$ が成立する。

本節では核型空間を Ceitin によって導入された (Z, λ) -核型写像を用いて Z -核型空間に拡張する。次に定義を与える。

定義 E, F, Z をバナッハ空間として $T \in L(E, F)$ が Z -核型写像とは $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \cdot \|B_i\| < \infty$ の可算点列 $\{A_i\} \subset L(E, Z)$,

$\{B_v\} \subset L(Z, F)$ が存在して $Tu = \sum_{v=1}^{\infty} B_v A_v u \quad (u \in E)$ と表わされることである。

ここで Z が 1 次元ならば Z -核型写像は核型写像と一致する。さうにこの定義を局所凸空間に拡張する。

定義 局所凸空間 E から局所凸空間 F への線型写像 T が Z -核型写像とは、 $T(U) \subset B$ および $T_0 \in L(E_U, F_B)$ をもって $T = \phi_B \circ T_0 \circ \phi_U$ の如く F_B が完備の持な F の絶対的凸 0 -近傍 B と U の絶対的凸有界集合 U が存在して $\widehat{F_U}$ から F_B への T_0 によって誘導される写像 $\overline{T}_0$ が Z -核型写像であることである。

このとき E, F をバナッハ空間とすれば、 $T: E \rightarrow F$ がバナッハ空間として Z -核型写像であるための必要十分条件は、 E と F を局所凸空間として Z -核型写像であることである。このとき次の結果が得られる。

定理 E, F を局所凸空間とし、 Z をバナッハ空間とする。 $T \in L(E, F)$ が Z -核型写像であれば、 T は $\overline{T} \in L(\widehat{E}, F)$ に一意に拡張されて $\overline{T}$ は Z -核型写像となる。

また次の定義も与える。

定義 Z をバナッハ空間とする。局所凸空間 E が Z -核型空間とは、各絶対的凸 0 -近傍 U に対して $U \supset V$ なる絶対的凸 0 -近傍が存在して $\phi_{U,V}: \widehat{F_V} \rightarrow \widehat{F_U}$ が Z -

核型写像となったことである。

そのとき次の結果が得られる。

定理 次のことは同値である：

- (a) E は Σ -核型空間である。
- (b) $\phi_V : E \rightarrow \tilde{E}_V$ が Σ -核型写像なる E の 0-近傍 V の基座みがある。
- (c) E から任意のバナッハ空間の中への任意の連続写像は Σ -核型写像である。

参考文献

- [1] I. I. Ceĭtlin, A generalization of the Perisson-Pietsch classes of operators, Soviet Math. Dokl., 14 (1973), 819-823.
- [2] A. Jōichi, (λ, μ) -absolutely summing operators, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 395-406.
- [3] A. Jōichi, (Σ, λ) -nuclear mappings and Σ -nuclear spaces, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 33-59.
- [4] M. Kato, On Lorentz spaces $l_{p,q}(E)$, Hiroshima Math. J., 6 (1976), 73-93.
- [5] K. Miyugaki, (p, q) -nuclear and (p, q) -integral operators, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99-132.

- [6] A. Perason and A. Prietsch, P -nukleare und p -integrale Abbildungen in Banachräumen, *Studia Math.*, 33 (1969), 19-62.
- [7] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan, New York, 1966.
- [8] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic press, New York and London, 1967.