

Heegaard 分解と曲面上の曲線系について

東京工大 理学部

本間龍雄

genus n の二つの solid Torus T_1, T_2 と境界 $\dot{T}_1$ から境界 $\dot{T}_2$ への同相写像 $f: \dot{T}_1 \rightarrow \dot{T}_2$ があたえられたとき, $\dot{T}_1$ の各点 p と像 $f(p)$ を同一視してできる向きづけ可能な閉 3 次元多様体 M を

$$M = \underbrace{T_1 \cup T_2}_f$$

と書き, M の f に因る Heegaard 分解 と呼ぶ。特に T_1, T_2 が M に含まれていて, $T_1 \cup T_2 = M$, $T_1 \cap T_2 = \dot{T}_1 = \dot{T}_2$ の場合は $f = \text{id.}$ とみなして, f を省略して

$$M = T_1 \cup T_2$$

と書き, 単に M の Heegaard 分解 と呼ぶ。「向きづけ可能な閉 3 次元多様体が Heegaard 分解を持つ」ことはよく知られているが, この定理は 3 次元多様体の単体分解可能性と同等である。

genus 1 の Heegaard 分解を持つ 3 次元多様体 (Lens space) は分類ができて, 構造も決定されるので, genus

2 の場合を一例の研究目標とし、genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体をできるだけ多く網羅し、その整理をしたいと心掛けている。まづ Heegaard 分解に関する代表的な結果を紹介する。

genus n の solid torus T において、互いに交わらない n 個の proper な disk $D_1, D_2, \dots, D_n$ があって、 $T = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ が連結なとき、 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ を T の meridian disk の系、 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ を meridian 系と呼ぶ。つぎの定理は明らかである。

定理 1 genus n の二つの solid torus T, T' の meridian 系 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ (又は meridian disk の系 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$) と $\{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ (又は $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\}$) があれば、

$$F(C_1) = C'_1, F(C_2) = C'_2, \dots, F(C_n) = C'_n$$

$$(\text{又は } F(D_1) = D'_1, F(D_2) = D'_2, \dots, F(D_n) = D'_n)$$

を満足する同相写像 $F: T \rightarrow T'$ が存在する。

定理 2 同じ genus をもつ二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ と $M' = T'_1 \cup_{f'} T'_2$ があり、また同相写像 $F: T_1 \rightarrow T'_1, G: T_2 \rightarrow T'_2$ があり、 $F|_{T_1} \downarrow, G|_{T_2} \downarrow$ が可換ならば、 M と M' は同相である。

証明 同相写像 $H: M \rightarrow M'$ を $H|_{T_1} = F, H|_{T_2} = G$

とあけは, 図の可換性より, well-defined である。

定理2 より つぎの定理を得る。

系1 Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ において, $F: T_1 \rightarrow T_1$
(又は $G: T_2 \rightarrow T_2$) を同相写像とすると,

$$M' = \begin{matrix} T_1 \cup T_2 \\ f \circ (F|T_1) \end{matrix}$$

$$\left(\text{又は } M'' = \begin{matrix} T_1 \cup T_2 \\ (G|T_2) \circ f \end{matrix} \right)$$

は M と同相である。

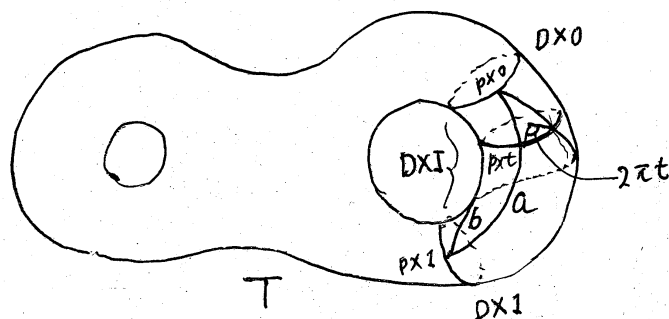
証明 つぎの図が可換であることを用いる。

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}_1 & \xrightarrow{f} & \dot{T}_2 \\ (F|T_1) \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ \dot{T}_1 & \xrightarrow{f \circ (F|T_1)} & \dot{T}_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dot{T}_1 & \xrightarrow{f} & \dot{T}_2 \\ \text{id.} \downarrow & & \downarrow G|T_2 \\ \dot{T}_1 & \xrightarrow{(G|T_2) \circ f} & \dot{T}_2 \end{array}$$

Heegaard 分解をもつ多様体どうしの同相性を確かめる手段として, handle のひねり, わたり, cancel があつた, ひねりとわたりを回によって説明する。

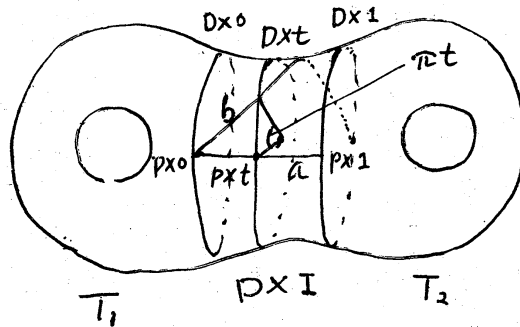
handle のひねり

(1) solid torus T に
handle $D \times I$ ($\dot{T} \cap (D \times I)$
 $= \dot{D} \times I$) が埋め込ま



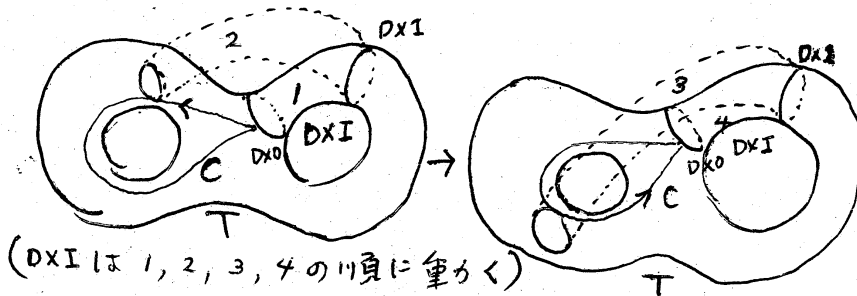
れているとき, $D \times t$ を円板とみなして $2\pi t$ だけ回転し, $0 \leq t \leq 1$, $T - (D \times I)$ はそのまま動かさない T から T への同相写像を handle の 2π のひねり と呼ぶ。図のように線 $a (= p \times I, p \in \dot{D})$ は線 b に写される。

(2) solid torus T に $D \times I$ ($\dot{T} \cap (D \times I) = \dot{D} \times I$) が埋め込まれていて, $T - D \times I$ が連結でないとき, この $D \times I$ を bridge と呼ぶ。 $D \times t$ を円板と見なし, πt だけ回転し, $D \times I$ によって T



は二つの部分 T_1 と T_2 に分割されるが, 図の T_1 はそのまま固定し, T_2 を π だけ回転する T の同相写像を, bridge の π のひねり と呼ぶ。図の線 $a (= p \times I, p \in \dot{D})$ は b に写される。 handle の 2π のひねり, bridge の π のひねり を絡めて handle のひねり と呼ぶ。

handle のあたり



($D \times I$ は 1, 2, 3, 4 の順に動く)

図のよう

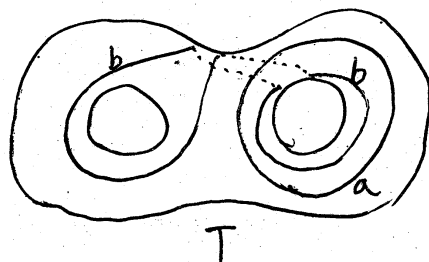
に handle

$D \times I$ を,

$D \times 1$ を固

定したま, $D \times 0$ を向きのついた閉曲線 C 上を滑べらして, も

との位置にもどした結果できる
同相写像を handle のあたり と
呼ぶ。図のような閉曲線 a は
handle のあたりによつて、
閉曲線 b に写される。



Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ が与えられたとき, handle
のあたりとあたりを系 1 に適用して, 簡単な Heegaard 分解
に手直しすることが可能な場合が少なくない。

Heegaard 分解 $M = T_1 \cup_f T_2$ において, T_1, T_2 の meridian
系をそれぞれ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ とし,
 $f(C_i) = B_i, i=1, 2, \dots, n$ とおくと, 定理 1 及び定理 2 より
 M の構造は同相性を除いて, $\{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ により
 $T_1 = N$ とし
て, $\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を Heegaard
の diagram と呼ぶ。これは genus n の閉曲面 N と, 互いに
交わらない単一閉曲線の系が二つ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$
が与えられ, $N - A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ も $N - B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$
も連結であれば, $\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ を
Heegaard の diagram とする Heegaard 分解をもつ向き
づけ可能な閉 3 次元多様体が存在する。

$M = T_1 \cup_f T_2$ において, $f(T_2)$ を再び T_2 とおきかえ,
 $f = \text{id}$ とみなすことができるから, Heegaard diagram

$\{N; A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ の $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ は solid torus T_1 と T_2 の meridian 系と看えて差支えない。 N と $\bigvee$ に交わらない単一閉曲線 $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ があって、 A_i と L_i は1点で交わり (代数的にも幾何的にも) $A_i \cap L_j = \emptyset$, $i \neq j$, であるとき, $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ を $\bigvee$ の longitude 系 と呼ぶ。

N の 整数係数の1次元 Homology 群 は $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ に対する 1-cycle $\pm \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ とすると, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ を生成元とする自由加群である。 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ に対する 1-cycle を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ とすると, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ がそれぞれ T_1 と T_2 の meridian 系であることより, $M = T_1 \cup T_2$ の整数係数の1次元 Homology 群 は T_1 の longitude 系 $\bigvee$ に対する 1-cycle $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ を生成元とし, T_2 の meridian 系に対する 1-cycle を $\{\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0\}$ とする関係 によって与えられる加群である。 M の Homology 群 $H_1(M)$ においては, $\beta_i = c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 + \dots + c_{in}\lambda_n$, $i=1, 2, \dots, n$, と表わすと, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ が T_2 の meridian 系であることより, 係数 $\{c_{ij}\}$, $i, j=1, 2, \dots, n$, の最大公約数は1である。

また $H_1(M)$ は行列

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

によって完全に決定できる。さらに M が Homology-sphere になるため ($H_1(M) = \{0\}$) には, T_1 の longitude 系が T_2 の meridian 系で表わされねばならず, 表わしたとき, それ等の係数の最大公約数が 1 であることより, つぎの定理が成立する。

定理 3 M が Homology-sphere になるための必要十分条件は, C の行列式 $|C|$ の値が ± 1 となることである。

いえる Homology 群の決定は, Heegaard diagram がなえうれば比較的簡単であるが, 基本群は一般に可換でなく決定は面倒である。例えば定理 3 にあおするような Homotopy-sphere にあする定理は見当らない。ただし基本群 $\pi_1(M)$ にあしても, 生成元と関係だけは $H_1(M)$ の場合と全く同様である。 T_1 の longitude 系にあする道を $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$, T_2 の meridian 系にあする道を $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n\}$ とおくと, つぎの定理が成立つ。

定理 4 基本群 $\pi_1(M)$ は $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n\}$ を生成元, $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_n = 1$ を関係とする群である。

既に知られている Heegaard 分解に関する重要結果として
つぎのようなものがあげられる。

定理 5 3次元球面 S^3 の任意の Heegaard 分解 $S^3 = T_1 \cup T_2$ に対し, T_1 の meridian 系と T_2 の meridian 系を適当に選んで, T_2 の meridian 系が T_1 の longitude 系となるようにできる。(Waldhausen)

つぎの定理は自明であるが、良く用いられるのであげておく。

定理 6 genus n の Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ において, T_1 の meridian と T_2 の meridian で一点だけで交わる (代数的にも幾何学的にも) ものが ~~存在~~ 存在すれば, genus $n-1$ の Heegaard 分解が存在する。

この定理はそれぞれの meridian にみえる handle はないものとして良いという意味である。これを handle の cancel と呼ぶ。すでに述べた handle のひねり, わたりでは genus は変化しなかったが, handle の cancel ができる場合は, genus が下るのであるから, Heegaard 分解は簡単になったと理解して良い。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ において, 同相写像 $F: M \rightarrow M'$ が存在し, $F(T_1) = T_1'$, $F(T_2) = T_2'$ を満足するとき, $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は equivalent

であるという。また定理2の条件をみたす $M = T_1 \cup_f T_2$ と $M' = T_1' \cup_f T_2'$ は equivalent であると言っても同じである。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ に対し、さらに三番目の Heegaard 分解 $M'' = T_1'' \cup T_2''$ が存在し、 $T_1'' \cup T_2''$ を有限回 handle の cancel をすると $T_1 \cup T_2$ と equivalent となり、同様に $T_1'' \cup T_2''$ において有限回 handle を cancel すると $M' = T_1' \cup T_2'$ と equivalent になるとき、 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は stably equivalent であるという。つぎの定理は 3次元多様体に関する Hauptvermutung に関連している。

定理7 一つの M の二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は stably equivalent である。

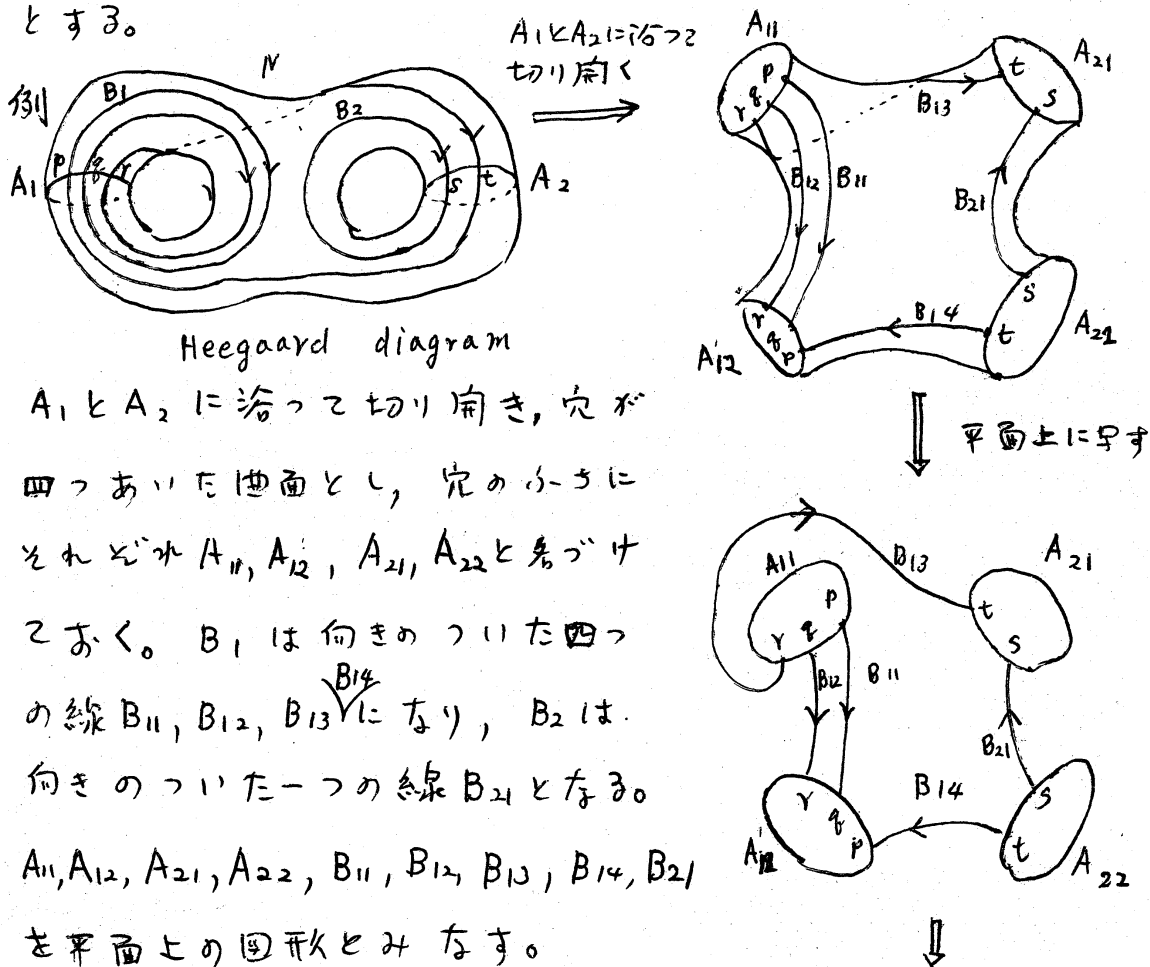
cancel 不可能な Heegaard 分解を 極小 であるという。多少乱暴であるがつぎのような予想もある。これは極小な Heegaard 分解は 最小 であるだろうという予想である。

予想 向きづけ可能な 3次元多様体 M の二つの極小な Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は equivalent である！

この予想は S^3 の場合と $S^2 \times S^1$ の場合に肯定的に解決されている。 S^3 の場合は定理5を使い。 $S^2 \times S^1$ の場合はつぎの Haken の結果を用いる。

定理8. Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ があって, M の 2次元球面 S^2 で M の 3次元球の境界とならないものが存在すれば, さらに M の 2次元球面 $\bar{S}^2$ が存在し, $\bar{S}^2$ と $\dot{T}_1 (= \dot{T}_2)$ の交わりは $\dot{T}_1$ 上で homotop でない単一閉曲線となる。

Heegaard diagram を 有向 graph を用いて表わす方法があるので, 図を画いて説明する。Heegaard diagram $\{N; A_1, A_2, B_1, B_2\}$ において T_2 の meridian B_1 と B_2 に向きをきえておき, meridian 系どうしの交差を p, q, r, s, t とする。



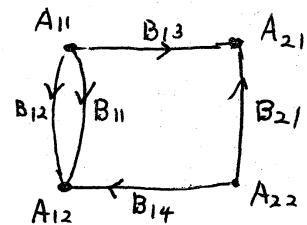
$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を結ぶて点とする
と, 頂点が $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ で, 向き
のついた辺 $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{21}$ をもつ
平面上の有向グラフ $G(M)$ を得る。

このように Heegaard diagram M
 $= T_1 \cup T_2$ が与えられていれば, そ
れから有向グラフ $G(M)$ をつくる

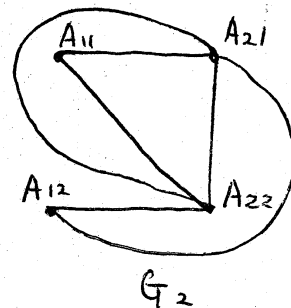
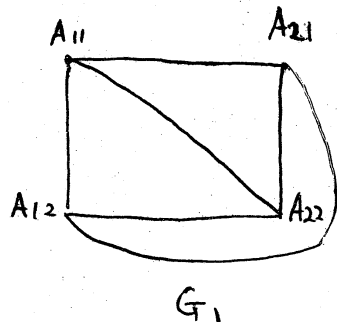
ことができ, 逆に $G(M)$ から Heegaard diagram を再現す
ることが可能である。genus n の Heegaard 分解においては,
それを表わす平面上の有向グラフは, T_1 の meridian 系に対
する $2n$ 個の頂点と, T_2 の meridian 系に対応する, 向きをつ
いた辺の集合系 n 個とから構成されている。相当複雑な Hee-
gaard diagram でもこの有向グラフにするとかなり簡単にな
るので, Heegaard 分解研究の手段として有力である。

特に genus 2 の Heegaard 分解の場合は, handle の
ひねり, わたり等手法によって単純化することと, 有向グラ
フ $G(M)$ において, 向きを無視し同じタイプの辺を一まとめ

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$
を点にする



有向 Graph $G(M)$ の例



にして一つの辺と見なすことにより、図のような二種類の無向グラフに reduce される。従って genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3次元多様体 M の位相的構造は無向グラフ G_1 または G_2 に属する有向グラフの構造によって決定でき、そのような有向グラフ $G(M)$ の構造の研究、分類が必要となる。

文献表

1. W. Haken : Some Results on Surfaces in 3-Manifolds. MAA Studies in Mathematics, Vol. 5.
2. C. D. Papakyriakopoulos ; Some Problems on 3-dim. Manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958).
3. K. Reidemeister ; Zur Dreidimensionalen Topologie ; Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 9 (1933) p. 189 ~ 194.
4. H. Seifert und W. Threlfall ; Lehrbuch der Topologie ; Teubner, Leipzig, (1934).
5. J. Singer ; Three-dimensional Manifolds and their Heegaard-diagrams ; Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) p. 88 ~ 111.
6. J. Stallings ; On Fiberings Certain 3-Manifolds and Related Topics. Prentice - Hall. (1962)

7. J. Stallings : On the Loop Theory : Ann. Math.
72 (1960) P. 12 ~ 19.
8. F. Waldhausen, Über Involution der 3-Sphäre;
Top. Vol. 8, P. 81 ~ 91.
9. F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-
Sphäre ; Topology, 7 (1968) P. 195 ~ 203.