

Superinverses と 単調反復法

早大 理工 室 谷 義 昭

§ 1. 序

$F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ とするとき,

$$(1.1) \begin{cases} [x_k, y_k] \supset [x_{k+1}, y_{k+1}], & \left(\text{ここに, } [x, y] \equiv \{z \in R^n \mid x \leq z \leq y\} \text{ かつ, 不等号は成分毎に} \right. \\ \left. [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は各 } [x_k, y_k] \text{ に含まれる,} \right. \end{cases}$$

となる反復列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ を求める反復法は従来から研究されていた (例えば, Collatz [1]) が, その後 Ortega and Rheinboldt [2], Muroya [3] と [4] は, 行列の (left) ^{sub}inverse という性質を利用

$$(1.2) \begin{cases} x_{k+1} = x_k - B_k F x_k \\ y_{k+1} = y_k - B_k F y_k \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

という形の単調反復法を研究した。その際, 彼等は,

$$(1.3) \quad Fy - Fx \leq A(x, y)(y - x) \quad \text{for } \forall [x, y] \subset D,$$

となる行列 $A(x, y)$ が存在し, 列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ 及び $\{B_k\}$ に対して,

$$(1.4) \quad I - B_k A(x, y) \geq 0 \quad \text{for } \forall [x, y] \subset [x_k, y_k], \quad (\text{ここに, } I \text{ は単位行列})$$

という条件の他に,

(1.5) $B_k F x_k \leq 0 \leq B_k F y_k$, 特に, $B_k \geq 0$ ($k=0, 1, 2, \dots$),
 という条件を付していた。

今度, (1.3) の条件を,

$$(1.6) \quad Fy - Fx = A(x, y)(y - x) \quad \text{for } \forall [x, y] \subset D$$

という条件に代えると, 丸めの誤差を考慮した実際の単調反復法 ([3]) にその基礎を置いた, より一般的かつ実用的な単調反復法が得られることに気付いた。その反復法は

- i) 従来の [2], [3] と [4] の反復法を含み,
- ii) 区間 $[x_0, y_0]$ の x_0, y_0 に対する条件が単に, 解の下界及び上界ベクトルになっていればよいし,
- iii) 他に何の条件を付け加えることなく *single-step technique* が使えるし,
- ⇒ 実際の反復法 ([3]) が使用できる,

という特長を持っている点で実用的である。

ここでは, 特に, (1.1) を満足する列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ を,

$$(1.7) \quad I - C_k A(x, y) \leq 0 \quad \text{for } \forall [x, y] \subset [x_k, y_k]$$

となる $[x_k, y_k]$ における $A(x, y)$ の *left superinverse* C_k を使って作り出す反復法を調べることにする。(*left subinverse* B_k を使う単調反復法は Muraya [5] で調べる予定。)

講演後に上記の点に気付いたので講演の内容と異なってしまった事をお許し下さい。(講演では 特別の場合 についてのみ報告した。)
 定理 2.3

§ 2. 予 備

定義 2. 1. $[x_0, y_0]$ で定義された行列 $A(x, y)$ に対し,
行列 C が $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の

i) left superinverse とは, $CA(x, y) \geq I$ for $\forall [x, y] \subset [x_0, y_0]$,

ii) right superinverse とは, $A(x, y)C \geq I$ for $\forall [x, y] \subset [x_0, y_0]$,

iii) superinverse とは, $CA(x, y) \geq I$ かつ $A(x, y)C \geq I$ for $\forall [x, y] \subset [x_0, y_0]$,

がそれぞれ成立するときをいう。(逆向きの不等号が成立するときは super- を sub- に代える。)

$F: [x_0, y_0] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ とするとき,
 $x \leq y$ かつ

(2.1) $\bigwedge Fx \geq Fy$ ならば つねに $x \equiv y$

となるとき, F は $[x_0, y_0]$ で単調であるという。行列 A が正則で, $A^{-1} \geq 0$ のとき A は単調であるという。

補題 2. 1. (1.6) を満足する $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し,

(2.2) $A \leq A(x, y)$ for $\forall [x, y] \subset D$

となる単調行列 A が存在すれば, A^{-1} は D に含まれる任意の区
 $A(x, y)$ の
間 $[x_0, y_0]$ における A (left) superinverse である。

証明は定義より明らかである。

補題 2. 2. (1.6) を満足する $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し,

F が $[x_0, y_0] \subset D$ で単調であるための必要十分条件は,

(2.3) $[I + (I - CA(x, y))]C \geq 0$ for $\forall [x, y] \subset [x_0, y_0]$
left

となる $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の正則な $\leftarrow$ superinverse C が存在

し、このような任意の C に対し、

$$(2.4) \quad \rho(I - CA(x, y)) < 1 \quad \text{for } \forall [x, y] \subset [x_0, y_0],$$

したがって、この C は非負になる。(ここに $\rho(\cdot)$ は行列のスペクトル半径。)

証明. $B = [I + (I - CA(x, y))]C$ とおくと、 $I - BA(x, y) = [I - CA(x, y)]^2$ であるから [4] の Proposition 2.4 より直ちに証明される。 Q.E.D.

上の補題 2.1 は *left superinverse* の構成法を、また補題 2.2 は F が単調であるための必要十分条件を述べていて、いずれも次節で役立つであろう。その他に次の定義を準備しておく。

定義 2.2. $x, y \in R^n$ に対し、

$x \vee y$ は $z \geq x$ かつ $z \geq y$ となる $z \in R^n$ のうち最小のものを、

$x \wedge y$ は $z \leq x$ かつ $z \leq y$ となる $z \in R^n$ のうち最大のものを

表わす。

定義 2.3. $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ とする。 $a \in D$ に対し、

各 $x_k \leq a$ かつ $x_k \rightarrow a$ とする任意の $\{x_k\} \subset D$ に対し、 $Fx_k \rightarrow Fa$ のとき、 F は $a \in D$ で左連続であるといい、各 $y_k \geq a$ かつ $y_k \rightarrow a$ とする任意の $\{y_k\} \subset D$ に対し、 $Fy_k \rightarrow Fa$ のとき、 F は $a \in D$ で右連続であるという。 F が $a \in D$ で左及び右連続のとき、 F は順序連続といふ。

§3. 単調反復法

まず、我々の単調反復法が適用可能であるときの必要条件として、次の補題を得る。

補題 3. 1. (1.6) を満足する $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し,

各 $[x_0, y_0] \subset D$ における $A(x, y)$ の left superinverse C が存在するとき,
 $Fx=0$ が $[x_0, y_0] \subset D$ における最小解または最大解を持てば, 他
 には, $[x_0, y_0]$ における解はない。(ここに, $[\bar{x}, \bar{y}] \subset [x_0, y_0]$ かつ $\bar{x}, \bar{y}$ が $Fx=0$ の
 解で, $[x_0, y_0]$ における任意の解 $\bar{z}$ に対し $\bar{x} \leq \bar{z} \leq \bar{y}$ となるとき, $\bar{x}, \bar{y}$ を
 $[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の最小解, 最大解という。)

証明. $\bar{x}$ を $[x_0, y_0]$ における最小解とする. 任意の $[x_0, y_0]$ におけ
 る解 $\bar{z}$ に対し, $\bar{x} \leq \bar{y}$ かつ, $0 = F\bar{z} - F\bar{x} = A(\bar{x}, \bar{y})(\bar{z} - \bar{x})$,
 故に, $0 = C A(\bar{x}, \bar{y})(\bar{z} - \bar{x}) \geq \bar{z} - \bar{x}$. よって, $\bar{z} = \bar{x}$.

同様に, 最大解が存在するときも証明される。 Q. E. D.

以下の議論においては $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ かつ (1.6) を満足するものとする。

我々の単調反復法は次の定理に基礎を置いている。

定理 3. 1. (1.6) を満足する $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し,

- (3.1) $[x_0, y_0] \subset D$ かつ $[x_0, y_0]$ に $Fx=0$ の解がある
 とする。
 このとき,
 (3.2)
$$\begin{cases} x_{k+1} = (y_k - C_k F y_k) \vee x_k \\ y_{k+1} = (x_k - C_k F x_k) \wedge y_k, \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

 ここで, C_k は $[x_k, y_k]$ における $A(x, y)$ の left superinverse,
 とおくと,
 (3.3)
$$\begin{cases} C_k F x_k \leq 0 \leq C_k F y_k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ [x_0, y_0] \supset [x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \dots \rightarrow [\bar{x}, \bar{y}] \\ \text{かつ, } [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は } [\bar{x}, \bar{y}] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

更に,

1) もし, $[\bar{x}, \bar{y}]$ における $A(x, y)$ の *left superinverse* C で,
 (3.4) 「 $-CF\bar{x} \geq \bar{y} - \bar{x}$ かつ $CF\bar{y} \geq \bar{y} - \bar{x}$ 」を完全には満足しない,
 ものがあれば, $[x_0, y_0]$ を $[\bar{x}, \bar{y}]$ とおきかえて, 更に, 反復 (3.2) が続けられる。

2) もし, $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ の部分列 $\{C_{k_m}\}_{m=0}^{\infty}$ の中で,
 (3.5) $\lim_{m \rightarrow \infty} C_{k_m} = C$ かつ $\rho(I - CA(\bar{x}, \bar{y})) < 1$
 となるものがあり, F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続である
 ならば, $\bar{x} = \bar{y}$ であり $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の唯一の解で
 ある。

証明. (3.2) より, $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$, かつ $y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots$.
 $[x_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の解を $\hat{x}$ とすると $x_0 \leq \hat{x} \leq y_0$ であるから,

$$F\hat{x} - Fx_0 = A(x_0, \hat{x})(\hat{x} - x_0)$$

$$\therefore C_0(F\hat{x} - Fx_0) = C_0 A(x_0, \hat{x})(\hat{x} - x_0) \geq \hat{x} - x_0.$$

$$\therefore \hat{x} \leq x_0 + C_0(F\hat{x} - Fx_0) = x_0 - C_0 Fx_0 \leq \hat{x} - C_0 Fx_0.$$

よって,

$$\hat{x} \leq (x_0 - C_0 Fx_0) \wedge y_0 = y_1, \text{ かつ } C_0 Fx_0 \leq 0.$$

同様にして, $\hat{x} \geq (y_0 - C_0 Fy_0) \vee x_0 = x_1$ かつ $C_0 Fy_0 \geq 0$.

故に, $x_0 \leq x_1 \leq \hat{x} \leq y_1 \leq y_0$ かつ $C_0 Fx_0 \leq 0 \leq C_0 Fy_0$.

$[x_0, y_0]$ を $[x_1, y_1]$ とおき代えることにより, $x_1 \leq x_2 \leq \hat{x} \leq y_2 \leq y_1$ かつ
 $C_1 Fx_1 \leq 0 \leq C_1 Fy_1$.

この操作を無限に続けていくと $x_k \rightarrow \bar{x}$ かつ $y_k \rightarrow \bar{y}$ となる

$\bar{x}, \bar{y}$ が存在し, $\bar{x} \leq \hat{x} \leq \bar{y}$.

これより (3.3) を得る。

次に, 1) の証明は反復の作り方 (3.2) より明らかである。

2) の証明. まず, $-CF\bar{x} \leq \bar{y} - \bar{x}$ かつ $CF\bar{y} \geq \bar{y} - \bar{x}$ と示す。

$x_m - C_m F x_m \rightarrow \bar{x} - CF\bar{x}$, ($m \rightarrow \infty$) であるから

$$y_{m+1} = (x_m - C_m F x_m) \wedge y_m$$

で $m \rightarrow \infty$ とすると

$$\bar{y} = (\bar{x} - CF\bar{x}) \wedge \bar{y},$$

これより, $-CF\bar{x} \leq \bar{y} - \bar{x}$ を得る。同様に $CF\bar{y} \geq \bar{y} - \bar{x}$ を得る。

したがって, $CF\bar{y} - CF\bar{x} \geq (\bar{y} - \bar{x}) + (\bar{y} - \bar{x})$.

$$(3.6) \quad \therefore [I + (I - CA(\bar{x}, \bar{y}))](\bar{y} - \bar{x}) \leq 0.$$

一方, 条件 (3.5) より, C は $[\bar{x}, \bar{y}]$ における $A(\bar{x}, \bar{y})$ の *left super-inverse* で, かつ $\rho(I - CA(\bar{x}, \bar{y})) < 1$ であるので,

$$[I + (I - CA(\bar{x}, \bar{y}))]^{-1} = I + (CA(\bar{x}, \bar{y}) - I) + (CA(\bar{x}, \bar{y}) - I)^2 + \cdots \geq 0$$

よって, (3.6) より $\bar{y} - \bar{x} \leq 0$.

故に, $\bar{y} = \bar{x}$ となり, (3.1) と (3.3) により $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における

$Fx = 0$ の唯一の解である。

Q. E. D.

定理 3.1 の単調反復法 (3.2) の特長は、^{まず} $\wedge[x_0, y_0] \subset D$ かつ x_0, y_0 が $Fx = 0$ の解の一つの下界と上界ベクトルであることだけを要求しており, 必ずしも条件 (1.5) を満足していてもよい。更に, C_k を非負に制限していない。

我々の単調反復法の有効性のもう一つの特長は, 他に何の条件を付け加えることなく, *single-step technique* が使える

ことである。([3], [4] の Corollary 3.2 と比較せよ。)

定理 3.1 の
系 3.1. $\wedge(1.6)$ と (3.1) を仮定し,

$$(3.7) \quad \begin{cases} x_{k+1}^i = (y_k^i - C_k^i F y_{k,i}) \vee x_k^i \\ y_{k+1}^i = (x_k^i - C_k^i F x_{k,i}) \wedge y_k^i \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

とおく。ここに,

$$(3.8) \quad \begin{cases} x_{k,1} = x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)^T \\ y_{k,1} = y_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)^T \\ x_{k,i} = (x_{k+1}^1, x_{k+1}^2, \dots, x_{k+1}^{i-1}, x_k^i, \dots, x_k^n)^T \\ y_{k,i} = (y_{k+1}^1, y_{k+1}^2, \dots, y_{k+1}^{i-1}, y_k^i, \dots, y_k^n)^T \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots; i=2, 3, \dots, n),$$

$$(3.9) \quad \begin{cases} C_k^i = (C_k^{i1}, C_k^{i2}, \dots, C_k^{in}) \text{ かつ} \\ C_{k,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_k^{i1} & C_k^{i2} & \dots & C_k^{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \text{ は } [x_{k,i}, y_{k,i}] \text{ における } A(x, y) \text{ の left super-} \\ \text{inverse である。} \quad (k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, n).$$

このとき,

$$(3.10) \quad \begin{cases} [x_0, y_0] = [x_{0,1}, y_{0,1}] \supset [x_{0,2}, y_{0,2}] \supset \dots \supset [x_{0,n}, y_{0,n}] \supset [x_{1,1}, y_{1,1}] \supset \dots \rightarrow [\bar{x}, \bar{y}] \\ \text{かつ, } [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は } [\bar{x}, \bar{y}] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

更に, $\wedge$ もし $[\bar{x}, \bar{y}]$ における $A(x, y)$ の left superinverse C で,

$$(3.11) \quad \neg C F \bar{x} \geq \bar{y} - \bar{x} \text{ かつ } C F \bar{y} \geq \bar{y} - \bar{x}$$

もなければ, $[x_0, y_0]$ を $[\bar{x}, \bar{y}]$ とおきかえて, 更に反復 (3.7) が繰り返れる。

もし, $\{C_{k,i}\}_{k=0}^{\infty}$ の部分列 $\{C_{k_m,i}\}_{m=0}^{\infty}$ の中で,

$$(3.12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} C_{k_m,i} = C_{\Delta,i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ かつ } C = \sum_{i=1}^n C_{\Delta,i} \text{ に対し, } \rho(I - CA(\bar{x}, \bar{y})) < 1,$$

となるものがあり, F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続ならば,
 $\bar{x} = \bar{y}$ で, $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の唯一つの解である。

証明. (3.7) は次の様に書くことができる。

$$(3.13) \quad \begin{cases} x_{k,i+1} = (y_{k,i} - C_{k,i} F y_{k,i}) \vee x_{k,i} \\ y_{k,i+1} = (x_{k,i} - C_{k,i} F x_{k,i}) \wedge y_{k,i} \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, n).$$

これは (3.2) と同じ形であるので, 定理 3.1 の証明と全く同様に
 して, この系が成立することがわかる。 Q. E. D.

次に, 反復式 (3.2) が次の反復式と同値になる場合を考える。

$$(3.14) \quad \begin{cases} x_{k+1} = y_k - C_k F y_k \\ y_{k+1} = x_k - C_k F x_k \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

定理 3.2. (1.6) を満足する $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ に対し,

$$(3.15) \quad [x_0, y_0] \subset D, \quad 0 \leq -C_0 F x_0 \leq y_0 - x_0, \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_0 F y_0 \leq y_0 - x_0$$

と $[x_0, y_0]$ における $A(x_0)$ の left superinverse C_0

となるベリトル x_0 と y_0 が存在するとする。

$\{x_k\}, \{y_k\}$ は (3.14) で定義されるものとする。ただし,

$$(3.16) \quad \begin{cases} \text{各 } C_k \text{ は } [x_k, y_k] \text{ における } A(x_k) \text{ の left superinverse で, かつ} \\ C_{k+1} = N_k C_k \text{ かつ } N_k \text{ は行列で, } 0 \leq N_k \leq I, (k=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

このとき,

$$(3.17) \quad 0 \leq -C_{k-1} F x_k \leq y_k - x_k, \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_k F y_k \leq y_k - x_k \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

したがって,

$$(3.18) \quad 0 \leq -C_k F x_k \leq y_k - x_k, \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_k F y_k \leq y_k - x_k \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

となり, (3.14) は (3.2) と同値となり, かつ, (3.3) が成立する。

更に, もし,

$$(3.19) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C \quad \text{かつ} \quad \bigwedge^C I + (I - CA(\bar{x}, \bar{y})) \text{ が正則,}$$

となるものが存在し, F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続ならば,
 $\bar{x} = \bar{y}$ で, $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の唯一つの解である。

証明. (1.6) と (3.14) より, $\forall x \in [x_0, y_0]$ に対し,

$$\begin{aligned} -C_0 Fx &= y_1 - x + (x - x_0) - C_0(Fx - Fx_0) \\ &= y_1 - x + [I - C_0 A(x_0, x)](x - x_0) \\ &\leq y_1 - x. \end{aligned}$$

一方, (3.15) より, $x_0 \leq x_1 \leq y_0$ かつ $x_0 \leq y_1 \leq y_0$.

したがって, 特 $x = x_1$ 及び $x = y_1$ とおくことにより,

$$-C_0 Fx_1 \leq y_1 - x_1 \quad \text{及び} \quad -C_0 Fy_1 \leq 0 \quad \text{を得る.}$$

同様にして, $C_0 Fy_1 \leq y_1 - x_1$ と $C_0 Fx_1 \leq 0$ を得る.

よって, $0 \leq -C_0 Fx_1 \leq y_1 - x_1$ かつ $0 \leq C_0 Fy_1 \leq y_1 - x_1$ を得る.

また, $C_1 = N_0 C_0$ で $0 \leq N_0 \leq I$ であるから,

$$0 \leq -C_1 Fx_1 \leq -C_0 Fx_1 \leq y_1 - x_1 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_1 Fy_1 \leq C_0 Fy_1 \leq y_1 - x_1.$$

$[x_0, y_0]$ を $[x_1, y_1]$ とおき代えると,

$$0 \leq -C_1 Fx_2 \leq y_2 - x_2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_1 Fy_2 \leq y_2 - x_2.$$

これと (3.16) より $0 \leq N_1 \leq I$, $C_2 = N_1 C_1$ であるから,

$$0 \leq -C_2 Fx_2 \leq -C_1 Fx_2 \leq y_2 - x_2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq C_2 Fy_2 \leq C_1 Fy_2 \leq y_2 - x_2.$$

このような操作を無限に続けると (3.17) と (3.18) を得る.

これより, (3.14) は (3.2) と同値で, しかも (3.3) も成立する.

次に, (3.19)を仮定し, F が $\bar{x}$ で左連続, $\bar{y}$ で右連続とすると,
 (3.14)の左を ~~$k \rightarrow \infty$~~ $k \rightarrow \infty$ とすると,

$$\bar{x} = \bar{y} - CF\bar{y} \quad \text{かつ} \quad \bar{y} = \bar{x} - CF\bar{x} \quad \text{を得る。}$$

これから, $[I + (I - CA(\bar{x}, \bar{y}))](\bar{y} - \bar{x}) = 0$ を得るが, (3.19)によ,

$$\bar{y} - \bar{x} = 0 \quad \text{となる。すなわち, } \bar{y} = \bar{x}.$$

$$\therefore CF\bar{x} = 0.$$

C が正則であるので $F\bar{x} = 0$.

故に $\bar{x}$ は $Fx = 0$ の解で, (かも (3.3)によ) $[x_0, y_0]$ には他に解はない。Q.E.D.

注意 3.1 定理 3.2 の反復法 (3.14) において, もし $[x_0, y_0]$ に解が存在するにわかかっているときは, (3.16) の N_k の条件は単に, $N_k \subseteq I$ ($k=0, 1, 2, \dots$) だけでよい。(その理由は, 解を $\bar{x}$ とすると, $x_k \leq \bar{x} \leq y_k$ のとき, $-C_k F y_k \leq 0 \leq C_k F y_k$ が, C_k が単に, $[x_k, y_k]$ における $A(x, y)$ の left superinverse という条件だけで成り立つからである。)

上の定理 3.2 においては $[x_0, y_0]$ に $Fx = 0$ の解が存在するに
 を始めに仮定している。このため, $[x_0, y_0]$ に $Fx = 0$ の解が存在
 するための一つの十分条件に関して 次の系を得る。

系 3.2. (1.6) を満足する $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ に対し, (3.14) を
 満足するベリトル x_0, y_0 と $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の ~~left~~ superinverse C_0
 が存在するとき, F が $[x_0, y_0]$ で順序-連続で, かつ C_0 が

$$(3.20) \quad \rho(I - C_0 A(x, y)) < 1 \quad \text{for } \forall [x, y] \subset [x_0, y_0]$$

を満足すれば $Fx = 0$ の解が $[x_0, y_0]$ に唯一存在する。

証明. 定理 3.2 で 各 $C_k = C_0$ ($k=0, 1, 2, \dots$) とすると直ちに
証明される. Q. E. D.

上の系は定理 3.1 の条件 (3.1) を満足する $[x_0, y_0]$ を構成する
のに役立つこともある。 $\gamma = \bar{x}$, (3.15) を満足するベクトル x_0, y_0 の作り方として、
次の補題を得る。

補題 3.2. (A6) を満足する $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ に対し、次の条件を
満足する、任意の $[x, y] \subset D$ における $A(x, y)$ の left superinverse C_0 とベクトル
 $\bar{x} \in D$, E_1 と E_2 が存在するとする。

$$(3.21) \quad \begin{cases} -(C_0 F \bar{x}) \wedge 0 + E_1 \geq 0, & (C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_2 \geq 0, \\ -(C_0 F \bar{x}) \wedge 0 + E_1 \geq [I - C_0 A(\bar{x}, y_0)] [(C_0 F \bar{x}) \wedge 0 + E_2] \\ (C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_2 \geq [I - C_0 A(x_0, \bar{x})] [(C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_1] \end{cases}$$

ここに,

$$(3.22) \quad \begin{cases} x_0 = \bar{x} - [(C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_1] \\ y_0 = \bar{x} - [(C_0 F \bar{x}) \wedge 0 - E_2] \end{cases} \quad \text{かつ } [x_0, y_0] \subset D.$$

このとき、ベクトル x_0, y_0 , と C_0 は 定理 3.2 の条件 (3.15) を満足する。

証明. (3.21) と (3.22) より, $x_0 \leq \bar{x} \leq y_0$ かつ $\bar{x} - C_0 F \bar{x} - x_0 = y_0 - x_0 - [(C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_2]$
 $= -(C_0 F \bar{x}) \wedge 0 + E_1 \geq 0$.

従って, $-C_0 F x_0 = -C_0 F \bar{x} + C_0 A(x_0, \bar{x})(\bar{x} - x_0)$

$$= (\bar{x} - C_0 F \bar{x} - x_0) - [I - C_0 A(x_0, \bar{x})](\bar{x} - x_0)$$

$$= y_0 - x_0 - [(C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_2] - [I - C_0 A(x_0, \bar{x})] [(C_0 F \bar{x}) \vee 0 + E_1]$$

よ,

$$0 \leq -C_0 F x_0 \leq y_0 - x_0.$$

同様にして, $0 \leq C_0 F y_0 \leq y_0 - x_0$ を得る。

故に, ベクトル x_0, y_0 , と C_0 は 条件 (3.15) を満足する. Q. E. D.

定理 3.1 の条件 (3.1) を満足するベクトル x_0 と y_0 の他の構成法については [5] ~~で示す~~ で行う予定。

次に, ~~行列~~ の right superinverse を利用した単調反復法として次の定理を得る。

定理 3.3. $y \geq x$ のとき $R[y, x] = [x, y]$ とし $\forall [x, y] \subset D$ に対し, (1.6) を満足する $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し, $[x, y]$ における $A(x, y)$ の非負な right superinverse C_0 が存在し,

$$(3.23) \quad C_0 [I + (I - A(x, y) C_0)] \geq 0 \quad \text{for } \forall [x, y] \subset D$$

をみたすとき, $F y_0 \geq 0$ とする $y_0 \in D$ に対し,

$$(3.24) \quad y_{k+1} = y_k - C_k F y_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

と置く。ここに, C_k は次の条件をみたすものとする。

$$(3.25) \quad \begin{cases} C_k \text{ は } [y_{k-1}, y_k] \text{ における } A(x, y) \text{ の非負な right superinverse で,} \\ C_k [I + (I - A(x, y) C_k)] \geq 0 \text{ for } \forall [x, y] \subset [y_{k-1}, y_k] \\ 0 \leq C_{k+1} \leq C_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

このとき,

$$(3.26) \quad \begin{cases} y_0 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{2k-2} \geq y_{2k} \geq \dots \rightarrow \bar{y} \\ y_1 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{2k-1} \leq y_{2k+1} \leq \dots \rightarrow \bar{x} \\ \bar{x} \leq \bar{y} \\ F y_{2k+1} \leq 0 \leq F y_{2k} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

更に, F が $x = \bar{x}$ で左連続, $x = \bar{y}$ で右連続で, $C = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ とおけるとし,

とき, $C [I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}))]$ の各列ベクトルが 0 になる。

よば, $\bar{x} = \bar{y}$ で $\bar{x}$ は $[y_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の唯一の解である。

証明. $y_1 = y_0 - C_0 F y_0 \leq y_0$ より, $F y_1 = F y_0 + A(y_1, y_0)(y_0 - y_1) = [I - A(y_1, y_0) C_0] F y_0 \leq 0$.

したがって, $y_2 = y_1 - C_1 F y_1 \geq y_1$ で,

$$\begin{aligned} y_0 - y_2 &= y_0 - y_1 + C_1 F y_1 \\ &= C_0 F y_0 + (C_1 - C_0) F y_1 + C_0 [F y_0 - A(y_1, y_0)(y_0 - y_1)] \\ &= (C_1 - C_0) F y_1 + C_0 [I + (I - A(y_1, y_0) C_0)] F y_0 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

よって, $y_0 \geq y_2 \geq y_1$ で,

$$F y_2 = F y_1 + A(y_1, y_2)(y_2 - y_1) = [I - A(y_1, y_2) C_1] F y_1 \geq 0.$$

以下同様にして, (3.26) が成立するこゝが証明できる。

次に, F が $\bar{x}$ で左連続, $\bar{y}$ で右連続で, $C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}))]$ の各列ベクトルが 0 にならないとすると,

$$y_{2k} - y_{2k-2} = (C_{2k+1} - C_{2k}) F y_{2k+1} + C_{2k} [I + (I - A(y_{2k+1}, y_{2k}) C_{2k})] F y_{2k}$$

において, $k \rightarrow \infty$ とすると, $y_{2k}, y_{2k+2} \rightarrow \bar{y}$, $y_{2k+1} \rightarrow \bar{x}$ であるから

$$0 = C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}) C)] F \bar{y}.$$

非負行列

こゝで, $\wedge C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}) C)]$ の各列ベクトルが 0 にならないから $F \bar{y} = 0$ となる。よって, (3.24) で k を $2k$ とおいて $k \rightarrow \infty$ とすると, $\bar{x} = \bar{y} - C F \bar{y} = \bar{y}$ を得る。解 $\bar{x} = \bar{y}$ が $[y_1, y_0]$ で唯一であることは明らかである。 Q.E.D.

(3.23) を満足する C_0 が存在するための十分条件は, 補題 2.2 を少し修正することにより, F が $[x, y] \subset D$ で単調であることによりわかる。しかも, このとき $C_0[I + (I - A(x, y))]$ の各列ベクトルが 0 にならない。

次に反復法 (3.2) の加速に関して次の系を得る。

系 3.3. 定理 3.1 の条件 (1.6), (3.1) と (3.2) に加えて,

$$(3.27) \quad [x'_0, y'_0] \subset [x_0, y_0] \text{ かつ } [x'_0, y'_0] \text{ に } Fx=0 \text{ の解があり,}$$

$$(3.28) \quad \begin{cases} x'_{k+1} = (y'_k - C'_k F y'_k) \vee x'_k \\ y'_{k+1} = (x'_k - C'_k F x'_k) \wedge y'_k \\ \text{ここに, 各 } C'_k \text{ は } [x'_k, y'_k] \text{ における } A(x, y) \text{ の left superinverse で,} \\ C'_k = Q_k C_k, \quad Q_k \text{ は } Q_k \leq I \text{ となる行列} \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

を仮定すると, 列 $\{x'_k\}$, $\{y'_k\}$ と $\{C'_k\}$ に対しても (3.3) が成立し, しかも,

$$(3.29) \quad [x'_k, y'_k] \supset [x_k, y_k] \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

証明. $[x_k, y_k] \supset [x'_k, y'_k]$ と仮定すると C_k は $[x_k, y_k]$ における $A(x, y)$ の left superinverse であるので, $\wedge C_k F y'_k \geq 0$ が導けるので,

$$x'_{k+1} - x_{k+1} = [I - C_k A(y'_k, y_k)](y'_k - y_k) + (Q_k - I) C'_k F y'_k \geq 0.$$

同様に, $y'_{k+1} - y_{k+1} \leq 0$ が証明できるので (3.29) を得る。 Q. E. D.

丸めの誤差を考慮した実際の単調反復法として次の定理を得る。

定理 3.4. (1.6) と (3.1) を仮定し, (3.2) を次のように修正する。

$$(3.30) \quad \begin{cases} x_0^* = x_0 & x_{k+1}^* = f_k^*(y_k^*; x_k^*) \vee x_k^* \\ y_0^* = y_0 & y_{k+1}^* = g_k^*(x_k^*; y_k^*) \wedge y_k^* \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

ここに, $[x_k^*, y_k^*]$ における $A(x, y)$ の left superinverse C_k^* に対し,

$$(3.31) \quad \begin{cases} f_k^*(y_k^*; x_k^*) = y_k^* - C_k^* F y_k^* \\ g_k^*(x_k^*; y_k^*) = x_k^* - C_k^* F x_k^* \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

とし, $f_k^*(y_k^*; x_k^*)$, $g_k^*(x_k^*; y_k^*)$ はそれぞれ $f_k(y_k^*; x_k^*)$, $g_k(x_k^*; y_k^*)$ を計算し下すので,

$$(3.32) \quad \begin{cases} f_k^*(y_k^*; x_k^*) \leq f_k(y_k^*; x_k^*) \\ g_k^*(x_k^*; y_k^*) \geq g_k(x_k^*; y_k^*) \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

とする。このとき,

$$(3.33) \quad \begin{cases} [x_0, y_0] \supset [x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \dots \rightarrow [x^*, y^*] \\ \text{かつ } [x_0, y_0] \text{ における } \nabla x=0 \text{ の解は } [x^*, y^*] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

しかも,

$$(3.34) \quad \begin{cases} x_{k_0}^* = x_{k_0+1}^* = x_{k_0+2}^* = \dots = x^* \\ y_{k_0}^* = y_{k_0+1}^* = y_{k_0+2}^* = \dots = y^* \end{cases}$$

となる有限の正整数 k_0 が存在する。更に,

$$(3.35) \quad \rho(I - C_{k_0}^* A(x^*, y^*)) < 1$$

ならば,

$$(3.36) \quad y^* - x^* \leq [I + (I - C_{k_0}^* A(x^*, y^*))]^{-1} \{ (f_{k_0}^*(y^*; x^*) - f_{k_0}^*(y^*; x^*)) + (g_{k_0}^*(x^*; y^*) - g_{k_0}^*(x^*; y^*)) \}$$

証明. 定理 3.1 及び定義より (3.33) が得られる。また, (3.34) は各 x_k, y_k が有限桁の数であることより明らかである。最後に, (3.35) が成立すれば, $[I + (I - C_{k_0}^* A(x^*, y^*))]^{-1} \geq 0$ が成立するので

$$x^* \geq f_{k_0}^*(y^*; x^*) \text{ と } y^* \leq g_{k_0}^*(x^*; y^*) \text{ より導かれる。} \quad Q. E. D.$$

注意 3.2 もし, 前もって,

$$(3.37) \quad \begin{cases} C_{k_0}^* A(x^*, y^*) - I \leq K_0, & \rho(K_0) < 1 \\ f_{k_0}^*(y^*; x^*) - f_{k_0}^*(y^*; x^*) \leq E_1, & g_{k_0}^*(x^*; y^*) - g_{k_0}^*(x^*; y^*) \leq E_2 \end{cases}$$

となる行列 K_0 とベクトル E_1, E_2 がわかれば, (3.36) より,

$$(3.38) \quad y^* - x^* \leq (I - K_0)^{-1} (E_1 + E_2)$$

($K_0^2(E_1+E_2)$ が無視できる)

と前もって, $y^* - x^*$ の評価ができる。特に, $K_0^2(E_1+E_2) \approx 0$ のときは近似的に, $y^* - x^* \leq (I + K_0)(E_1 + E_2)$ が成立する。更に, もし,

$$(3.39) \quad (x_{k+1}^* - x_{k_1}^*) + (y_{k_1}^* - y_{k+1}^*) \leq E_3$$

のとき計算を止めたとき, x^*, y^*, k_0 をそれぞれ x_k^*, y_k^*, k_1 とおき代えて (3.37) が成立すれば,

$$(3.40) \quad y_{k+1}^* - x_{k+1}^* \leq (I - K_0)^{-1}(E_1 + E_2 + K_0 E_3)$$

を得る。このとき, $K_0 E_3 \ll E_1 + E_2$ ($K_0 E_3$ が $E_1 + E_2$ に比べると無視できる) ならば, (3.40) の右辺は近似的に (3.38) の右辺に等しくなる。

最後に, 解の一群の上界と下界が得られているとき, 解の上界, 下界の改良を行うところに単調収束法の特長があるので近似解の誤差評価の計算にも我々の方法を適用できる。
(数値例は [5] で示す予定)。

参考文献

- [1] L. Collatz, "Funktionalanalysis und Numerische Mathematik", Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [2] J. Ortega and W. Rheinboldt, Monotone iterations for nonlinear equations with application to Gauss-Seidel methods, SIAM J. Numer. Anal., 4(1967), 171-190.
- [3] Y. Muroya, Practical monotonous iterations for nonlinear equations, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A. vol 22 No.1, (1968), 56-73.
- [4] ———, Left subinverses of matrices and monotonous iterations for nonlinear equations, Mem. Sch. Sci. & Eng. Waseda Univ. No.34(1970), 157-171.
- [5] ———, Practical monotonous iterations for nonlinear equations II, (to appear) (予定)