

Ultradistribution の或る特徴づけについて

京大 数理研 西和田 公正

序 正則函数の境界値を *ultradistribution* として捉えようというのが本稿のテーマである。この種の研究としては小松[3]がある。次の2つの問題について考える。

1. (Singularity の order の問題)

正則函数の境界への増大度と、その境界値が属する *ultradistribution* の class との関係。

2. (wave front の問題)

境界値のとられる方向と *ultradistribution* の Fourier 像が急減少する方向との関係

1. については Martineau [4] の結果の一部が *ultradistribution* の場合にも成り立つことを調べる。2. については Hörmander [2] によつて導入された *analytic wave front set* を、正則函数の境界値の言葉によつて言換える。

§1. Test functions & Ultradistributions

notations の煩雑さを避ける為に、ここでは Roumieu type の Gevrey class のみを考える。即ち

定義1 (Test functions) $1 \leq s$ とする。 $\mathbb{R}^n \supset \Omega$: open, $\Omega \supset K$: regular compact, $h > 0$ に対して

$$E_{s,h}(K) = \left\{ \varphi \in C^\infty(K) : \exists c > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leq c h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \right\}$$

$$D_{s,h}(K) = E_{s,h}(K) \cap C_0^\infty(K)$$

と置く。両方とも Banach 空間である。更に

$$E_s(K) = \varinjlim_{h \rightarrow \infty} E_{s,h}(K)$$

$$E_s(\Omega) = \varprojlim_{K \Subset \Omega} E_s(K)$$

$$D_s(K) = \varinjlim_{h \rightarrow \infty} D_{s,h}(K)$$

$$D_s(\Omega) = \varprojlim_{K \Subset \Omega} D_s(K).$$

まとめると

$$E_s(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \forall K, \exists c, \exists h > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leq c h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

$$D_s(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \exists c, \exists h > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leq c h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

定義 2 Ultradistribution of growth class of order s ($s > 1$) を $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ で定義する. $\mathcal{E}'_s(\Omega)$ ($\subset \mathcal{D}'_s(\Omega)$) は compact support を持つ ultradistribution の全体である.

定義 1.2 の諸空間の topology については 小松 [3] に詳しい.

Ultradistribution と正則函数の境界値との関連を調べるのだから, Test functions も $\mathbb{C}^n$ 上の函数の制限と考えるのが自然であるように思われる.

定理 1 $\mathbb{R}^n \supset \Omega$: open, V : Ω の complex nbd. のとき $\varphi \in \mathcal{C}'(\Omega)$ に対して次の (a) と (b) は同値である.

(a) $\varphi \in \mathcal{E}_s(\Omega)$

(b) 或る $\psi \in \mathcal{C}'(V)$ が存在して $\psi|_{\Omega} = \varphi$, 更に次の許可をみち. : $\forall K \subset \subset \Omega$ に対して $\exists c, \exists h$

$$(1.1) \quad \sup_K |\bar{\partial} \psi(x+iy)| \leq c \exp(-|h y|^{\frac{1}{1-s}}) \quad (s > 1 \text{ の時})$$

$$(\quad \bar{\partial} \psi(x+iy) = 0 \quad \text{near } K \quad s=1 \text{ の時})$$

証明 (a) $\Rightarrow$ (b), $s > 1$ の時. $\varphi \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$ と仮定

してよい。従って、

$$\exists h > 0, \sup |D^\alpha \varphi| \leq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s$$

形式的に

$$\psi(x+iy) = \sum \varphi^{(\alpha)}(x) (iy)^\alpha \chi(b_{|\alpha|} y) / \alpha!$$

と置く。 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi = 1$ if $|y| \leq \frac{1}{2}$, $\chi = 0$

$$\text{if } |y| \geq 1 \quad b_{|\alpha|} = h' |\alpha|^{(s-1)} \quad \text{if } h < e^{s-1} h'$$

ならば $\psi \in C^\infty(V)$ がわかる。この時

$$(1.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(x+iy) = \sum \varphi^{(\alpha+1_j)}(x) (iy)^\alpha (\chi(b_{|\alpha|} y) - \chi(b_{|\alpha|+1} y)) / 2\alpha! \\ + \sum \varphi^{(\alpha)}(x) (iy)^\alpha b_{|\alpha|} \chi_j'(b_{|\alpha|} y) / 2\alpha!$$

$$\frac{1}{2b_{|\alpha|+1}} \leq |y| \leq \frac{1}{b_{|\alpha|}} \quad \text{on } \text{supp}(\chi(b_{|\alpha|} y) - \chi(b_{|\alpha|+1} y))$$

$$(b_{|\alpha|+1} y) \quad \text{or } \text{supp} \chi_j'(b_{|\alpha|} y) \quad (\text{注意})$$

これは (1.2) の summation は

$$(2h' |y|)^{\frac{1}{1-s}} - 1 \leq |\alpha| \leq (h' |y|)^{\frac{1}{1-s}}$$

の範囲でよいことがわかる。

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \right| \leq 2^{n-1} \sup_{(2h'|y|)^{\frac{1}{1-s}} - 1 \leq |\alpha| \leq (h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}} \{ C h^{|\alpha|+1} (|\alpha|+1)^s (\alpha!)^{s-1} |y|^{|\alpha|} \}$$

$$\leq C \exp(-|h'y|^{1/s}) \quad \text{if } h < h'e^{s-1}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) この場合も $s > 1$ とし $\psi \in C_0^\infty(V)$ と仮定してかまわない。(a) を証明する為に φ を Cauchy kernel を使って表現した場合 どうしても $\sup \left| \frac{\partial^j \psi}{\partial \bar{z}_1 \cdots \partial \bar{z}_j} (x+iy) \right|$ との、たものの実軸の近くでの減少度を仮定しなければならぬ。それを避ける為に dirac 関数の平面波展開

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{|\omega|=1} \frac{d\omega}{(x \cdot \omega + i0)^n}$$

を利用する。 $\varphi = \varphi|_{\Omega}$ に対して

$$\varphi(x) = \int \varphi(x-x') \delta(x') dx'$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \iint \varphi(x-x') \frac{dx' d\omega}{(x' \cdot \omega + i0)^n}$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \iiint_{t>0} \frac{\langle \bar{\partial} \psi(x-x'+it\omega), \omega \rangle}{\langle x'+it\omega, \omega \rangle^n} dt dx' d\omega$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \iiint_{t>0} \frac{\langle \bar{\partial} \psi(x-x'+it\omega), t\omega \rangle}{\langle x'+it\omega, t\omega \rangle^n} t^{n-1} dt d\omega dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \iint \frac{\langle \bar{\partial} \psi(x-x'+iy'), y' \rangle}{\langle x'+iy', y' \rangle^n} dy' dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \iint \frac{\langle \bar{\partial} \psi(z'), g_m z' \rangle}{\langle x-z', g_m z' \rangle^n} dx' dy'$$

$$\begin{aligned}
\therefore |D^\alpha \varphi| &\leq C \alpha! \sup (|g_m z|^{-n-|\alpha|} |\bar{\partial} \psi(z)|) \\
&\leq C \alpha! \sup (|y|^{-n-|\alpha|} \exp(-|h y|^{\frac{1}{1-s}})) \\
&\leq C h'^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \quad \exists h'.
\end{aligned}$$

以後 Ω, V は定理1の意味でとる. $\mathbb{R}^n$ の open convex cone Γ に対して $T(\Gamma) = \mathbb{R}^n + i\Gamma$ とおく.

定理2 正則函数 $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ に対して次の4条件は同値である.

任意の $\Gamma' \subset \subset \Gamma$ に対して

(a) $\lim_{\substack{y \downarrow 0 \\ y \in \Gamma'}} f(x+iy)$ が $\mathcal{O}_s'$ の中で存在する.

(b) $\Gamma' \ni y$ が小さい時, x の函数族 $\{f(x+iy)\}$ は $\mathcal{O}_s'$ の中で有界.

(c) $\forall K \subset \subset \Omega, \forall h > 0$ にとると $\exists \delta > 0, \exists M, \exists C > 0$

$$(1.3) \quad \left| \iint f(x+iy) \phi(x, y) dx dy \right| \leq C \sup_{\substack{\alpha, (x, y) \\ |\beta| \leq M}} \left| \frac{D_x^\alpha D_y^\beta \phi(x, y)}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s} \right|$$

for $\forall \phi \in \mathcal{O}_{s, h}((K+i\Gamma') \cap \{|y| \leq \delta\})$

(d) $\forall K \subset \subset \Omega, \forall h > 0$ にとると $\exists C > 0$

$$(1.4) \quad \sup_{x \in K} |f(x+iy)| \leq C \exp(|h y|^{\frac{1}{1-s}}), \quad y \in \Gamma': \text{small}$$

注意1 (d) $\Rightarrow$ (a) は小松 [3] によつて証明された。ここの我々の証明は [3] のものと若干異なる。hyperdifferential operator を用いない代わりに定理1を用いる。

注意2 (c) は f が境界 Ω を越えて R^{2n} の ultradistribution として (y 方向には distribution) 定義される可能性を示唆している。この種の関係は Martineau によつて発見されたが、ここではどういう表現を表に出すことはしなかった。Martineau は更に f の distribution としての prolongement $\tilde{f}$ として $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \partial \tilde{f} \otimes \delta(y)$ ($\partial \tilde{f}$ は f の境界値, $n=1$ の時の式) なるものが存在することを示した。我々の証明 ((d) $\Rightarrow$ (a)) はこの考えに負う所が大きい。

定義3 $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ が定理2の同値条件を満たす時 f は $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ の中に境界値 $f(x+iy) = \lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$ を持つと云う。

定理2の証明 (d) $\Rightarrow$ (a) $\forall \varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$ に対し $\lim_{y \downarrow 0} \langle f(x+iy), \varphi(x) \rangle$ が存在することを示せばよい。定理1による φ の $\mathbb{C}^n$ への拡張を $\psi(x+iy)$ とする。(supp $\psi \subset V$ としてよい。) 任意の $u \in C_0^1(\mathbb{C})$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(z) dz = 2i \iint_{y>0} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} u(x+iy) dx dy, \quad (z=x+iy)$$

であることに注意すれば、 $\theta \in \Gamma'$ を勝手に固定した時、

$$\begin{aligned} & \lim_{y \downarrow 0} \langle f(x+iy), \psi(x) \rangle \\ &= \lim_{y \downarrow 0} 2i \iint_{x>0} f(x+iy+it\theta) \langle \bar{\psi}(x+it\theta), \theta \rangle dx dt. \end{aligned}$$

右辺は $y \in \Gamma'$ がどのような path γ に 0 に収束しようとも (1.1) と (1.4) によって 絶対収束する積分

$$(1.5) \quad 2i \iint_{x>0} f(x+it\theta) \langle \bar{\psi}(x+it\theta), \theta \rangle dx dt$$

に収束する、

(a) $\Rightarrow$ (b) は明らかである。

(b) $\Rightarrow$ (c) $\{f(x+iy)\}_{\Gamma' \ni y: \text{small}}$ は $\mathcal{D}'_s(\Omega')$ ($\Omega' \subset \subset \Omega$)

の中で有界であるから、~~同様~~ $\mathcal{D}'_s(\Omega')$ の上で同程度連続である。($\mathcal{D}_s$ は tonnellé であることに注意) 従って、

$\mathcal{D}_{s,h}(K)$ ($\forall K \subset \subset \Omega, \forall h > 0$) 上でも同程度連続である。

$$\therefore |\langle f(x+iy), \psi(x) \rangle| \leq C \sup_{x, \alpha} \frac{|D_x^\alpha \psi|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_{s,h}(K)$$

C は small $y \in \Gamma'$ に independent である。

$$\therefore \left| \iint f(x+iy) \phi(x,y) dx dy \right|$$

$$\leq C \int_{|y| \leq \delta} \sup_{x, \alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x, y)|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s} dy$$

$$\leq C' \sup_{x, y, \alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x, y)|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) $K', \Gamma'' \subset K + i\Gamma' \subset K' + i\Gamma'' \subset \Omega + i\Gamma$
 と仮定する。或る $\varepsilon > 0$ が存在し $z = x + iy \in K + i\Gamma'$
 に対して $\text{dist}(x, \partial K') > \varepsilon$, $\text{dist}(y, \partial \Gamma'') > \varepsilon |y|$
 とできる。 $\psi(\tau) \in \mathcal{D}_s(\mathbb{C})$ を $\psi = 1$ if $|\tau| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
 $\psi = 0$ if $|\tau| \geq \varepsilon$ と仮定する。 $\phi(z) = \prod_{j=1}^m \psi(z_j)$
 は $\mathcal{D}_{s, h}(\mathbb{C}^n)$ の元である。 $h > 0$ は任意に大きくとれ
 る。 Cauchy の積分定理によつて $z = x + iy \in K + i\Gamma'$
 に対して

$$f(z) = (-\pi)^n \iint \frac{f(\zeta)}{\prod_{j=1}^m (\zeta_j - z_j)} \frac{z^n}{2\bar{\zeta}_1 \cdots 2\bar{\zeta}_n} \left[\phi(\zeta - x + i \frac{\eta - y}{|y|}) \right] d\bar{\zeta} d\eta$$

$$\therefore |f(z)| \leq C \sup_{\substack{\alpha, (\zeta, \eta) \\ |\eta| \leq M \\ |\zeta_j - z_j| \geq \frac{\varepsilon}{2} |y|}} \left(\frac{D_\eta^\beta D_\zeta^\alpha \left[\frac{z^n}{2\bar{\zeta}_1 \cdots 2\bar{\zeta}_n} \left(\phi(\zeta - x + i \frac{\eta - y}{|y|}) \right) \right]}{h^{|\alpha|} |\alpha|^{s|\alpha|}} \right)$$

$$\leq C |y|^{-2n-M} \sup_\alpha \left(1 / \left| \frac{\varepsilon y}{2} \right|^\alpha h^{|\alpha|} |\alpha|^{(s-1)|\alpha|} \right)$$

$$\leq C |y|^{-2n-M} \exp \left(\left(\frac{\varepsilon}{2} h |y| \right)^{\frac{1}{1-s}} \right)$$

$$\leq C_{h'} \exp \left(|h' y|^{\frac{1}{1-s}} \right) \quad (h' \text{ は任意に大きくとれる})$$

§2 Analytic wave front set

Roumieu [7] により E'_s の元に対して Fourier 変換, Parseval's, Fourier inversion formulae, convolution の Fourier 像 etc. が E' の時と同じように成立つてことが確認された. 従って [2] の方法によって $f \in \mathcal{D}'_s$ に対して $\text{WFA}(f)$ が定義される.

定義4 $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega) \setminus 0$,

$$(x_0, \xi_0) \notin \text{WFA}(f) \iff \exists U : x_0 \text{ の mbd }, \\ \exists V : \xi_0 \text{ の conical mbd },$$

$$\exists \{f_N\} : \text{bdd seq. in } \mathcal{E}'_s(\Omega)$$

$$\text{s.t.} \quad f_N = f \quad \text{in } U,$$

$$(2.1) \quad |\hat{f}_N(\xi)| \leq C(CN/|\xi|)^N, \quad \xi \in V, \quad N=1, 2, \dots$$

補題1 $K \subset \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, N : 自然数, $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists \chi_N \in \mathcal{D}'_s(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } \chi_N = 1 \text{ in } K,$$

$$\chi_N = 0 \text{ in } \{x; \text{dist}(x, K) \geq r\},$$

$$(2.2) \quad |D^{\alpha+\beta} \chi_N| \leq C(C/r)^{|\alpha|} |\alpha|^{s|\alpha|} (CN/r)^{|\beta|}, \quad |\beta| \leq N$$

C は s と m によって決まる.

補題2 $f, (x_0, \xi_0), U, V$ に対して (2.1) が正

し)とする. $U \ni K$: compact nbd of x_0 , $V \ni \Gamma$: conical nbd of ξ_0 . を任意にとる. $\chi_N \in C_0^\infty(U)$, $\sum = 1$ on K は (2.2) をみたすとする. この時 $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'_s$ の中で有界で Γ の上で (2.1) をみたす.

補題 1.2 の証明は [2] と全く同様に証明できる. $\{\chi_N\} \subset \mathcal{D}_s$ が (2.2) をみたせば $\{\chi_N\}$ は $\mathcal{D}_{s'} (s' \geq s)$, $\mathcal{D}$ の中でも有界である. ゆえに $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'_{s'} (s' \geq s)$ の中で有界であるから 次の系を得る.

系 1 $\mathcal{D}, \mathcal{D}_s, \mathcal{D}_{s'} (1 \leq s' \leq s)$ に於ける analytic wave front set の概念は compatible である.

定理 B3 $\pi: T^*(\Omega) \setminus 0 \rightarrow \Omega$ とすると $\pi(WFA(f)) = \text{anal. sing. supp } f$ である. (証明は (2) と同じ)

定理 B4 $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ とする.

$\{V_\alpha\}$: finite family of open convex proper cones in $\mathbb{R}^n$

$\{\Gamma_\alpha\}$: V_α の dual cones

この時 次の (a) と (b) は同値である.

(a) $WFA(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$

(b) $\exists \omega: x_0 \text{ の nbd }, W: \omega \text{ の complex nbd}$
 $\exists \Gamma'_\alpha \supset \Gamma_\alpha, f_\alpha \in \mathcal{O}(W \cap T(\Gamma'_\alpha))$

s.t. $f = \sum_\alpha f_\alpha(x + i\Gamma_\alpha 0) \quad \text{in } \mathcal{D}'_s(\omega)$

証明 (b) $\Rightarrow$ (a) 次の補題は便利である。

補題 3 $\chi_{2N} \in \mathcal{D}_s(\Omega)$, $V: \Omega$ の complex nbd
 χ_{2N} の $\mathbb{C}^n$ への拡張 $\chi_{2N}(x+iy) \in C_0^\infty(V)$ での評価
 可能なものが存在する。

$$(2.3) \quad \sup_x |D_x^\beta \bar{\chi}_{2N}(x+iy)| \leq C (c|y|)^N N^{|\beta|} \exp(-h|y|^{\frac{1}{1-s}})$$

when $|\beta| \leq N$

C, h は N に independent である。

証明 定理 1 の証明と同様に

$$\chi_{2N}(x+iy) = \sum \chi_{2N}^{(k)}(x) (iy)^k \chi(b_{k+1}y) / \alpha!$$

とおく。 χ は定理 1 の時と同じものであるが。 $\{b_{k+1}\}$ は

$$b_0 = b_1 = \dots = b_N \leq b_{N+1} \leq \dots$$

$$b_{N+j} = h' j^{s-1}$$

とおく。 $z = x + iy$ $b_0 = h'$ は $\chi_{2N} \in C_0^\infty(V)$ となるように
 にとる。 次のような評価を考える。

$$\begin{aligned} & |y|^{-N} \exp(h|y|^{\frac{1}{1-s}}) |D_x^\beta \sum_{|k| \leq N} \chi_{2N}^{(k+j)}(x) (iy)^k (\chi(b_{k+1}y) - \chi(b_{k+1}y))| / 2\alpha! \\ & \leq \sum_{\alpha} \frac{C(CN)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!} \cdot \left(\frac{1}{2d_0}\right)^{N-|\alpha|} \exp(h(2d_0)^{\frac{1}{s-1}}) \end{aligned}$$

$$\leq C^{1+N} N^{|\beta|}$$

$$\begin{aligned} & |y|^{-N} \exp\left(-\frac{1}{2} (h|y|)^{\frac{1}{1-s}}\right) \left| \sum_{|\alpha| > N} \chi_{2N}^{(\alpha+\beta+1j)}(x) (iy)^\alpha (\chi(b_{|y|+1}y) - \chi(b_{|y|}y)) \right| \\ & \leq \exp\left(-\frac{1}{2} (h|y|)^{\frac{1}{1-s}}\right) (CN)^{|\beta|+N} \sum_{|\alpha| > N} C h^{|\alpha|-N} (|\alpha|-N)^{s(|\alpha|-N)} |y|^{|\alpha|-N} \\ & \quad |(\chi(b_{|y|+1}y) - \chi(b_{|y|}y))| \cdot |\alpha|^{-|\alpha|} \end{aligned}$$

$|x|^{|\alpha|} \geq (|\alpha|-N)^{|\alpha|-N} N^N$ に注意すれば 上の式は やはり $C^{1+N} N^{|\beta|}$ で押さええられる.

定理4の証明 $((b) \Rightarrow (a))$ $\theta \in \Gamma$, $|\alpha| \leq N$ の時

$$\begin{aligned} & \xi^\alpha \langle f(x+i\Gamma_0), \chi_{2N}(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \rangle \\ & = 2i \left(\int_{t>0} D_x^\alpha \left\{ f(x+it\theta) \langle \bar{\chi}_{2N}(x+it\theta), \theta \rangle \right\} e^{-i\langle x+it\theta, \xi \rangle} dx \right). \end{aligned}$$

$\langle \xi, \theta \rangle < 0$ なる ξ の conical nbd 上. 上の式は (2.3) より $C(CN)^N$ で押さえられる.

$(a) \Rightarrow (b)$ $V_\alpha' \subset V_\alpha$ を

$$WFA(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha' \stackrel{\text{def}}{=} F^{c_0}$$

となるようにとる.

$$(2.4) \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n} \int_F \hat{f}_N(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

$$(2.5) \quad = f_N(x) - (2\pi)^{-n} \int_{\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}'} \hat{f}_N(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

(2.5) の第2項は Γ_{α}' (V_{α}' の dual cone) 方向からの正則関数の境界値の和に等ける. $f = f_N$ (near x_0) に注意すれば

$$WF_A(g)_{|x_0} \subset \bigcup_{\alpha} \overline{V_{\alpha}'} \subset \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}.$$

ゆえにもし g の分解が得られれば f の分解が得られることになる. 一方 (2.4) より $g \in C^{\infty}$ である. 従って, $(a) \Rightarrow (b)$ C^{∞} 関数 f について証明すればよい. しかしこの場合 (更に D' の場合) 定理5は [5] によつて証明された.

定理2の notation によつて $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ をとる.

定理4の $(b) \Rightarrow (a)$ により $WF_A(f) \subset \Omega \times (\Gamma \text{ の dual cone})$

これに $(a) \Rightarrow (b)$ を適用すると 各 $x \in \Omega$ に対して $\tilde{f} \in \mathcal{O}((x \text{ の複素近傍}) \cap T(\tilde{\Gamma}))$ ($\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$) が得られる. この時 $f \equiv \tilde{f}$ である.

定理5 $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$, $f(x + i\Gamma_0) = 0$

in $D'_0(\Omega)$ ならば $f \equiv 0$ である.

証明 適当な complex hyperplane を切ればよいから

f は 1 変数と仮定してよい. $K \subset \subset \Omega$, $\text{dist}(K, \partial V) > \varepsilon$ とする. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}_{s,R}(K)$ と fix する.

$$g(\zeta) = \int f(x+\zeta) \varphi(x) dx \quad (\text{Im } \zeta > 0)$$

$$= 2i \iint_{t>0} f(x+it+\zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(x+it) dt dx$$

($\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$ は 定理 1 に よる 構成 した $\varphi(x+iy)$ に対するもの)

$D_\varepsilon = \{ \zeta ; \text{Im } \zeta > 0, |\zeta| < \varepsilon \}$ とおくと. $g(\zeta)$ は

D_ε 上 正則, $\bar{D}_\varepsilon$ 上 連続, $\partial D_\varepsilon \cap \{ \text{Im } \zeta = 0 \}$ 上

0 である. 故に $g \equiv 0$. これより $\forall y$ に対して

$f(x+iy) = 0$. 即ち $f \equiv 0$ である.

References

- [1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables. van Nostrand, 1966.
- [2] Hörmander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. Vol 24, pp 671 ~ 704, 1971.
- [3] Komatsu, H., Ultradistributions, I Structure theorems and a characterizations, J. Fac. Sci.

Univ. Tokyo, Sec IA, 20, pp 25-105, 1973.

[4] Martineau, A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. Inter. Summer Course on the theory of distributions, Lisbon, pp 195-326, 1964.

[5] Nishiwada, K. On local characterizations of wave front sets of distributions in terms of boundary values of analytic functions and their application to partial differential equations, To appear

[6] Roumieu, C., Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables, J. Anal. Math. 10 (1962-63), pp 153-172.