

ホモトピー一種素射影空間の対称度

新淵久 理学部

渡部 剛

以下に述べることは [4] に既に発表されていることですが
 かなり詳しいことは省略し要約的にいたします。

以下 C^∞ -category で考える。compact, connected manifold M
 に対し $N(M) = \max \{ \dim G \mid G; \text{ compact connected Lie group which} \\ \text{acts almost effectively on } M \}$ とおきこれを M の対称度としよう。

M は homotopy complex projective space (即ち M は compact connected $2n$ -
 manifold で complex projective space $\mathbb{C}P^n$ と同じ homotopy type を持つ) と
 する。[3] におい $N(M) \geq n^2 + 2n (= \dim SU(n+1))$ ならば $M =$
 $\mathbb{C}P^n$ で $N(M) = \dim G$ とおき G は $SU(n+1)$ と locally isomorphic で M 上
 transitive に作用することが示されている。こゝでは次の
 定理を証明する。

定理 $N(M) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \ (n \geq 13)$ ならば M は $\mathbb{C}P^n$ に
 diffeomorphic である。

M is almost effectively: 1) $\neq 1$ 3 compact connected Lie group G 2)
 $\dim G = N(M) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$ とあるものがある。 $G = T^r \times G_1 \times \dots \times G_s$ (T^r は r -次元トーラス, G_i は simple Lie group) とし
 てよい。

G が M に transitive に作用している場合は H は principal
 isotropy group とすれば H は連結で $\text{rank } H = \text{rank } G$ とあり、従って
 $H = T^r \times H_1 \times \dots \times H_s$ (H_i は G_i の subgroup で $\text{rank } H_i = \text{rank } G_i$)
 となり $M = G/H = G_1/H_1 \times \dots \times G_s/H_s$, 2) であり、 $s=1$ の場合
 がある。従って G は $SU(n+1)$ と locally isomorphic で $M = \mathbb{CP}^n$ とある。

G が M に transitive に作用している場合 H は上のよ
 うにすれば、 $\dim G/H \leq 2n-1$ 。従って $\dim G > \frac{1}{8}(2n+7)\dim G/H$
 [3] には次のように示すことができる。

3) a simple normal subgroup (G_i とする)

$$\dim G_i + \dim N(H_i, G_i)/H_i > \frac{1}{8}(2n+7)\dim G_i/H_i,$$

$$\dim H_i > \frac{2n-9}{2n-7}\dim G_i$$

ただし $H_i = (H \cap G_i)^0$ (identity component), $N(H_i, G_i)$ は H_i
 の G_i における normalizer である。

$n \geq 13$ ならば (G_i, H_i) の可能な組として 2 次の場合が考えら
 れる。

$$(1) \quad (Sp(m), Sp(m) \times Sp(1)) \quad (n < 2m)$$

- (2) $(SO(m), SO(m-1))$ ($n < 2m$)
 (3) $(SU(m), N(SU(m-1)))$ ($n \leq 2m-2$)
 (4) $(SU(m), SU(m-1))$ ($n < 2m-2$) .

$K, K' \subset N(SU(m-1))$ は $SU(m-1)$ の $SU(m)$ に対して normalizer である。
 3。

(1), (2) または (4) の type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit が空の場合
 は orbit map $\pi: M \rightarrow M/G$ によって $\pi^*: H^1(M/G; \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(M; \mathbb{Q})$ が $i \leq 3$ の isomorphism になる。これは Victor's-Beyle
 の定理よりわかる。従って $H^2(M; \mathbb{Q})$ の generator a は i^2 で
 $a = \pi^*(b)$ ($b \in H^2(M/G; \mathbb{Q})$) と表され $a^n = 0$ が示される。

(3) または (4) の type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit が空でない $F = F(SU(m), M) = \emptyset$ のときは、[1] の chap. XIV の議論により $f: M \rightarrow \mathbb{CP}_{m-1}$
 が存在して $f^*: H^2(\mathbb{CP}_{m-1}) \rightarrow H^2(M)$ が injective になる。上と同様に示される。

以上の議論から次の命題が示されなければならない。

命題 $SU(m)$ が M に次のように作用すれば M は $\mathbb{CP}_n$ に diffeomorphic である。

- (1) $n < 2m-2$ (2) principal isotropy group H の identity component は $SU(m-1)$ である。
 (3) $F = F(SU(m), M)$ は non-empty である。

(4) Type $SU(m)/N(SU(m-1))$ の orbit が 存在する。

補題 X が contractible $(2n+2)$ -dim. compact manifold である。

S' が X 上に semi-freely に作用している。 $(S', \partial X)$ は free である。 したがって $n \geq 3$, ∂X が simply connected ならば $\partial X/S'$ は $\mathbb{C}P_n$ と diffeomorphic である。

(証明の概略) $F(S', X)$ は一点 x_0 からなり $x_0 \in X - \partial X$. x_0 のまわりの disk nbhd. D^{2n+2} 上で S' が linear に作用している。 $\partial D^{2n+2}/S' = \mathbb{C}P_n$. $X - \text{int } D^{2n+2}$ が $\mathbb{C}P_n$ と $\partial X/S'$ の間の k -cobordism になっている。

命題の証明の概略

$F \neq \emptyset$ より $H = SU(m-1)$ となる。 $U \in F$ の closed invariant tubular nbhd. を $P = F(SU(m-1), H - \text{int } U)$ とおく。 $N = N(SU(m-1))$ とおき $M(N) = \{x \in M \mid SU(m)x \in (N)\}$ とおく。 $T \in SU(m)$ の maximal torus として $T \subset N$ とおくと $F(T, M) \cap M(N) \cong \{N(T, SU(m))/N(T, SU(m)) \cap N\} \times F(N, M(N))$ が示される。 したがって F は連結、Type $SU(m)/N$ の orbit は唯一つであることがわかる。 [2] の結果より F は $\mathbb{C}P_{n-m}$ と同い homology ring を持つことがわかる。 P が contractible であることが示される。 $M = S^{2m-1} \times_{S'} P \cup D^{2m} \times_{S'} \partial P$ となる。 $K, K' \subset S' \cong N(SU(m-1))$

$/SU(m)$ 。 $\partial(D^{2m} \times P)$ は simply connected となることは知られて、
上の補題により $M = \mathbb{C}P_n$ となる。

注意 (1) $n \geq 13$ の仮定はあまり本質的でない。

(2) 定理の結果が best であることが今のところ知られていない。

文献

- [1] Borel, A : Seminar on Transformation Groups. Ann. of Math. Studies
46. Princeton Univ. Press 1960.
- [2] Bredon, G. E. : Introduction to compact Transformation Groups.
Academic Press.
- [3] Hsiang, W. Y. : On the degree of symmetry and the structure of highly
symmetric manifolds. Taiwanese J. of Math. 2(1971) 1-22
- [4] Watabe, T : On the degree of symmetry of complex quadric and
homotopy complex projective space. Sci. Reports of Niigata Univ.
1974.