

Elliptic Surfaces in Characteristic p .

上野 健爾

桂 利行

§0 序 正標数の代数体上で定義された楕円曲面に関して、これまでいくつかの興味ある現象が発見されているが、組織的に研究されたことはなかった。ここでは $[KU]$ で得られた結果のいくつかを紹介する。研究の発端は正標数の代数体上で定義された楕円曲面は標数0に lift できるかという問題にあった。そのために標数0で成立する事実が正標数のときどうなるかという問題が生じる。驚くべきことに楕円曲面に関しては、多くの場合標数0と類似の結果が成立する。現在の所、標数0に lift できない楕円曲面の例は知られていない。

以下 特にことわるな限り、代数体 K を一つ固定し、代数多様体や代数多様体の間の射はすべて K 上で定義されているとする。体 K の標数はしばしば p の間任意とする。非特異完備曲面 S から非特異完備曲線 C の射 $f: S \rightarrow C$ を考える。 C 上の点 y (以下、点は閉点を意味する) に対して f の y 上のファイバーを S 上の因子と考えて $\sum m_i D_i$ と記するとき、 $m = \text{g.c.d.}(m_i) > 1$ であれば、このファイバーを重複ファイバーと呼び、以下 mD , $D = \sum \frac{m_i}{m} D_i$ と記す。整数 m を重複ファイバーの重複度という。

さて $f: S \rightarrow C$ を楕円曲面としよう (即ち、 f のある幾何学的ファイバー、従ってほとんどすべての幾何学的ファイバーは非特異楕円曲線)。 $m_1 F_1, m_2 F_2, \dots, m_r F_r$ を f の

すべての重複ファイバーとする。このとき、次の標準因子公式が知られている。

$$(0.1) \quad K_S = f^*(K_C - \underline{z}) + \sum_{i=1}^n a_i F_i,$$

ここで、

$$0 \leq a_i \leq m_i - 1,$$

また、 $R^1 f_* \mathcal{O}_S$ の torsion part を $\mathcal{T}$ と記すと、

$$\mathcal{O}_C(\underline{z}) \simeq R^1 f_* \mathcal{O}_S / \mathcal{T}.$$

以下因子と、 γ_i に対応する直線束や可逆層をしばしば同一視する。 K_S (K_C) は S (C) の標準因子とする。さらに

$$(0.2) \quad -\deg \underline{z} = \chi(S, \mathcal{O}_S) + \text{length } \mathcal{T}$$

が成立する。

重複ファイバー $m_i F_i$ に対して γ_i の normal bundle $[F_i]|_{F_i}$ は $\text{Pic}^0(F_i)$ の元を定める。 $[m_i F_i]|_{F_i}$ は trivial であるので、 $[F_i]|_{F_i}$ の $\text{Pic}^0(F_i)$ での位数 ν_i は m_i の約数である。 $\text{char } k = 0$ のときは $\nu_i = m_i$ 、 $\text{char } k = p > 0$ のときは

$$(0.3) \quad m_i = p^{\gamma_i} \nu_i, \quad \gamma_i \geq 0$$

であることが知られている。

$f(F_i) = g_i$ とおくと、次の条件は同値である

$$(0.4) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad \mathcal{T}_{g_i} = 0 \quad \text{(ii)} \quad h^0(\mathcal{O}_{m_i F_i}) = 1, \quad \text{(iii)} \quad a_i = m_i - 1 \\ & \text{(iv)} \quad \nu_i = m_i. \end{aligned}$$

この条件が成立するとき、重複ファイバー $m_i F_i$ は tame であるという。tame でない重複ファイバーは wild であるという。wild であることは、次の同値な条件の一つが成立すること

ととして特徴づけることができる。

- (0,5) (i) $\mathcal{O}_{F_i} \neq 0$, (ii) $h^0(\mathcal{O}_{m_i F_i}) \geq 2$, (iii) $0 \leq a_i \leq m_i - 2$
 (iv) $1 \leq \nu_i \leq m_i - 1$ (v) (0,3) で $\nu_i \geq 1$.

従って標数0ではすべての重複ファイバーは tame である。

§1. Algebraicity of elliptic surfaces.

楕円曲面の pluricanonical mapping を調べるためには、
 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$ である楕円曲面の重複ファイバーを調べておく必要がある。 $m_1 F_1, \dots, m_\lambda F_\lambda$ を f のすべての重複ファイバーとし、 $\nu_i = \text{ord}[F_i]|_{F_i}$ とおく。このとき、 $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ のタイプは $(m_1, m_2, \dots, m_\lambda | \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda)$ であるという。特にすべての重複ファイバーが tame のときは $(m_1, m_2, \dots, m_\lambda)$ と略記する。

定義 1.1. $1 \leq i \leq \lambda$ なる i を一つ固定する。

$$\begin{cases} n_i \equiv 1 \pmod{\nu_i} \\ \frac{n_1^{(i)}}{m_1} + \frac{n_2^{(i)}}{m_2} + \dots + \frac{n_\lambda^{(i)}}{m_\lambda} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

が成立するような整数 $n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots, n_\lambda^{(i)}$ が存在するとき、
 $(m_1, m_2, \dots, m_\lambda | \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda)$ は条件 U_i を満足するという。

整数 $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$ は i によって変わってよいことに注意しておく。

定理 1.2. $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, はタイプ $(m_1, m_2, \dots, m_\lambda | \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda)$ の(代数的)楕円曲面とする。このとき、
 $(m_1, m_2, \dots, m_\lambda | \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda)$ は各 i , $1 \leq i \leq \lambda$ に対して、条件 U_i を満足する。

上の定理で「代数的」という言葉を入れたのは、 $k = \mathbb{C}$ のとき 解析的 (非代数的) 楕円曲面を除くためである。上の定理より タイプ $(2, 3, 7)$ の代数的楕円曲面は存在しないことが分かる。しかし タイプ $(2, 3, 7)$ の解析的楕円曲面は存在する。また上の定理は必要条件のみを与えていることを注意しておこう。各 i に対して 条件 U_i を満足しても、タイプ $(m_1, m_2, \dots, m_s; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s)$ の楕円曲面が存在するとは限らない。 $k = \mathbb{C}$ のときは必要十分条件を与えることができる。([KU] Appendix I を参照のこと)。

定理の証明のあらすじを述べよう。まず次の事実に注意する。

補題 1.3. $g: S \rightarrow C$ を楕円曲面, $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ を アルバネーズ写像とする。また $\varphi: C \rightarrow J(C)$ を曲線 C から そのヤコビ多様体への標準写像とする。このとき次の条件は同値である。

- (i) $\alpha(f^{-1}(p))$ が点であるような $p \in C$ が存在する。
- (ii) $\text{Alb}(S) \simeq J(C)$

一方 (i), (ii) が成立しなれば $\dim \text{Alb}(S) = \dim J(C) + 1$ 。

我々の場合にこの補題を適用する。 $0 = 12\chi(S, \mathcal{O}_S) = c_2(S) = 2 - 2\beta_1(S) + \beta_2(S)$, $\beta_1(S) = 2 \dim \text{Alb}(S)$ より, $\dim \text{Alb}(S) \geq 1$, 従って $\dim \text{Alb}(S) = 1$, かつ $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ によって f の各ファイバーは $\text{Alb}(S)$ 上に surjective にうつされる。従って重複ファイバー $m_i F_i$ は F_i は非特異楕円曲線であることが分かり, さらに $j: F_i \hookrightarrow S$ を自然な closed immersion とすると

$$\alpha \circ j: F_i \hookrightarrow S \xrightarrow{\alpha} \text{Alb}(S)$$

は isogeny であることが分かる。dual にうつって

$$j^* \alpha^*: \text{Pic}^0(\text{Alb}(S)) \rightarrow \text{Pic}^0(S) \rightarrow \text{Pic}^0(F_i)$$

は isogeny, 従って $j^*: \text{Pic}^0(S) \rightarrow \text{Pic}^0(F_c)$ は全射である。
よって

$$(0.6) \quad j^*(\mathcal{O}_S(L)) = \mathcal{O}_S(-F_c)|_{F_c}, \quad \mathcal{O}_S(L) \in \text{Pic}^0(S)$$

を満足する S 上の因子 L が存在する。従って完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(L) \rightarrow \mathcal{O}_S(F_c + L) \rightarrow \mathcal{O}_{F_c} \rightarrow 0$$

ができる。これより 完全列

$$(0.7) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(L) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(F_c + L)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{F_c}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(L) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S(F_c + L)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{F_c}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(L) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_S(F_c + L)) \rightarrow \end{aligned}$$

を得る。 $\mathcal{O}_S(L) \in \text{Pic}^0(S)$ であるので, Riemann-Roch の定理より

$$(0.8) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S(F_c + L)) = 0$$

を得る。そこで $H^0(\mathcal{O}_S(F_c + L)) = H^2(\mathcal{O}_S(F_c + L)) = 0$ と仮定しよう。すると (0.8) より $H^1(\mathcal{O}_S(F_c + L)) = 0$ 。従って

(0.7) より, $R^2(L) = R^1(\mathcal{O}_{F_c}) = 1$ を得る。よって $R^0(K_S - L) = 1$ を得, (0.1) より

$$D \sim nE + \sum_{j=1}^{\lambda} a_j F_j - L$$

なる S 上の effective divisor D が存在する。 E と f の general fibre とすると, $L \cdot E = 0$ より, $D \cdot E = 0$, 即ち, D の support はすべて f のファイバーに含まれ,

$$D \sim nE + \sum_{j=1}^{\lambda} a_j F_j$$

である。従って

$$(0.9) \quad -L \sim (n-m)E + \sum_{j=1}^{\lambda} (a_j - b_j) F_j$$

であり, (0.6) を使うことにより, 以下より

$$\mathcal{O}_S(F_i)|_{F_i} = \mathcal{O}_S(-L)|_{F_i} = \mathcal{O}_S((\alpha_i - a_i)F_i)|_{F_i}$$

を得る. $[F_i]|_{F_i}$ の位数は ν_i であるので, 以下より

$$\alpha_i - a_i \equiv 1 \pmod{\nu_i}$$

を得る. また $H \in S$ の超平面切断因子とすると, $L \cdot H = 0$ より, (0.9) から

$$0 = (n-m) + \sum_{j=1}^{\lambda} (\alpha_j - a_j)/m_j$$

を得る. よって $m_j = \alpha_j - a_j$ ととれる. $\square$

$H^0(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \neq 0$ のときは, $D \sim F_i+L$ なる effective divisor が存在し, $H^2(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \neq 0$ のときは duality によって $H^0(\mathcal{O}_S(K_S - F_i - L)) \neq 0$ より $D \sim K_S - F_i - L$ なる effective divisor が存在し, 上と同様の論法によって, 条件 U_i が成立することが分かる.

定理 1.2 より 応用上重要ないくつかの系が得られる.

系 1.4. $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ はタイプ $(m|\nu)$ の楕円曲面とする. (S は勿論代数的と仮定する.) すると f の唯一つの重複ファイバー mE は wild であり, $m = p^\delta$, $\delta \geq 1$, $p = \text{char } k > 0$, $k \neq \nu = \text{ord}[E]|_E = 1$ である.

系 1.5. $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ はタイプ (m_1, m_2, m_3) の代数的楕円曲面とする. S の小平次元 $K(S)$ は 1 であるとする.

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leq \frac{5}{6}$$

が成立する. 等号は $(m_1, m_2, m_3) = (2, 6, 6)$ の場合に限り成立する.

§2 楕円曲面の pluricanonical mapping.

この節では次の結果を紹介する。

定理 2.1. $f: S \rightarrow C$ は代数的楕円曲面, k の小平次元 $k(S)$ は 1 であるとする。このとき, $m \geq 14$ であれば, $|mK_S|$ は base point free であり (fixed component は持つかもしれないが), $k \neq 1$ かつ $|mK_S|$ は S の楕円曲面としての唯一つの構造を与える。

この定理は 飯高 ([I]) の定理の一般標数への拡張である。[I] では $k = \mathbb{C}$ かつ解析曲面で考えていたので, $m \geq 86$ の時に $|mK_S|$ は S の楕円曲面としての構造を与えることが示されている。上の定理は $k = \mathbb{C}$ の時でも新しい結果である。また $\text{char } k \neq 2, 3$ のときは 14 が best possible であることが分かる。(解析的楕円曲面では 86 が best possible であった) $\text{char } k = 2, 3$ のときは 14 が best possible であるかどうかは不明である。もう少し小さくできる可能性がある。

証明の方針は本質的には [I] と同じである。ただ wild な重複ファイバーがあるので, wild fibre についての考察が不可欠である。以下証明の荒すじを述べよう。

(0.1) によって

$$|mK_S| = f^*(|mK_C - m\frac{\delta}{t}| + \sum_{i=1}^{\lambda} [\frac{m\alpha_i}{m_i}] g_i) + \text{fixed component}$$

が成立する。ここで $f(F_i) = g_i$, $m_i F_i$ ($i=1, \dots, \lambda$) は重複ファイバー, とおいた。[] は Gauss 記号である。そこで

$$(2.1) \quad \Delta = m(K_C - \frac{\delta}{t}) + \sum_{i=1}^{\lambda} [\frac{m\alpha_i}{m_i}] g_i,$$

$$\delta = \delta(C), \quad t = \text{length } \mathcal{I}.$$

とおこう。 $\deg \Delta \geq 2g+1$ であれば, Δ は C 上の very ample divisor である。従って $m \geq 14$ であれば $\deg \Delta \geq 2g+1$ を示せば十分である。(0,1) と (0,2) によつて $\kappa(S)=1$ であることと

$$(2.2) \quad 2g-2 + \chi(S, \mathcal{O}_S) + \tau + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{a_i}{m_i} > 0$$

とは同値である。従つて証明すべきことは, $m \geq 14$ であれば

$$(*) \quad \deg \Delta = m(2g-2 + \chi(S, \mathcal{O}_S) + \tau) + \sum_{i=1}^{\lambda} \left[\frac{m a_i}{m_i} \right] \geq 2g+1$$

が成立することである。楕円曲面 S では常に $c_2(S) \geq 0$ であるので, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{12} c_2(S) \geq 0$ である。そこで次の6個の場合を個別に考察する。

$$(I) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) + \tau \geq 3$$

$$(II) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) + \tau \leq 2 \quad \text{かつ} \quad g \geq 1$$

$$(III) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) + \tau = 2 \quad \text{かつ} \quad g = 0$$

$$(IV-1) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) = 1, \tau = 0 \quad \text{かつ} \quad g = 0$$

$$(IV-2) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) = 0, \tau = 1 \quad \text{かつ} \quad g = 0$$

$$(V) \quad \chi(S, \mathcal{O}_S) = \tau = 0 \quad \text{かつ} \quad g = 0$$

このうち (I) のときは $m \geq 1$ で, (II) では $m \geq 6$ で (*) が成立することは容易に分かる。(V) の場合は論文 [I] の方法がそのまま適用できる。すなわち

$$A = -2 + \sum_{i=1}^{\lambda} (m_i - 1) / m_i$$

とおくと, $\kappa(S)=1$ であることより $A > 0$ である。従つて $\lambda \geq 3$ である。 $\lambda \geq 4$ であれば

$$A \geq -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

であるが, タイプ (2, 2, 2, 3) は条件 U_4 を満足しない。従つて $\lambda \geq 4$ であれば $A > \frac{1}{6}$ である。一方 $\lambda = 3$ であ

これは §1, 系 1.5 より $A \geq \frac{1}{6}$ であり, かつ等号はタイプ (2, 6, 6) の時に限り成立する。さて

$$\sum_{i=1}^{\lambda} \left[m \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right] = \sum_{i=1}^{\lambda} m \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \sum_{i=1}^{\lambda} \left\{ \left[m \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right] - m \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right\} \geq (m-1) \left\{ \sum_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right\} = (m-1)(2+A).$$

従って (*) が成立するためには, $m \geq 14$ であれば $(m-1)(2+A) > 2m$ がきえれば十分。しかし $A \geq \frac{1}{6}$ なのでこれは明らか。また $A = \frac{1}{6}$ であれば $(m-1)(2+A) > 2m$ であるためには $m \geq 14$ でありければならないことも明らかである。

残りの場合で面倒なのは $\tau \geq 1$ の場合であり, 一番内題になるのは (III) で $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, $\tau = 2$, $\vartheta = 0$ かつ $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は唯一つの重複ファイバーしか持たない場合である。 $\tau = 2$ であるので, この重複ファイバーは wild である。重複ファイバーを mD と記し, $\nu = \text{ord}(D|_D)$ とおく。このとき

$$h^0(\mathcal{O}_{mD}) = h^1(\mathcal{O}_{mD}) = h^0((R^1 f_* \mathcal{O}_S)_D) = 1 + \tau = 3.$$
が成立つ。ここで $\vartheta = f(D)$ とおいた。また (0, 1) より, このとき

$$K_S = aD,$$

かつ $K(S) = 1$ より $a \geq 1$ が成立する。よって内題は m と a との関係を見出すことに帰着される。幸いに Raynaud [R] の結果によつて, 次の補題を示すことができる。

補題 2.2. (i) $h^0(\mathcal{O}_{mD}) = 2$ であれば $a + \nu + 1 = m$

(ii) $h^0(\mathcal{O}_{mD}) = 3$ であれば, $a + \nu + 1 = m$ または $a + \nu + 1 = m$, または $a + (p+1)\nu + 1 = m$ が成立する。

この補題の (ii) によつて, 我々の場合 $m \geq 4$ であれば既に (*) が成立することが分かる。また $\tau = 1$ の場合は補題の (i) を

使う。いづれにせよ残りの場合は $m_0 \leq 13$ なる整数が存在し、 $m \geq m_0$ のとき (4) が成立することが分かる。

次に 14 が best possible である例を作る。

例 2.3, $\text{char } k = 2, 3$ とする。 C は

$$y^2 = x^6 - 1$$

で定義された 種数 2 の 非特異 完備曲線とする。 C の自己同型 σ, τ を

$$\sigma: (x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

$$\tau: (x, y) \longrightarrow (ex, y),$$

で定義する。ここで e は 1 の原始 6 乗根とする。 G を σ でより生成される群とする。 $G \simeq \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(6)$ である。 E を楕円曲線、 a, b を E の位数 2, 6 の点とする。 G は $C \times E$ 上に

$$\sigma: (x, y, z) \longrightarrow (x, -y, z+a)$$

$$\tau: (x, y, z) \longrightarrow (ex, y, z+b)$$

で作用し、固定点を持たない。そこで

$$f: S = C \times E / G \longrightarrow C/G \simeq \mathbb{P}^1$$

を考えると、容易にこれはタイプ $(2, 6, 6)$ の楕円曲面であることが分かる。

$$K_S = f^*(-2g) + F_1 + 5F_2 + 5F_3$$

と書けることより

$$|H^0(K_S)| = \phi, \quad \dim |H^0(K_S)| = 1$$

であることが分かる。

§3. 楕円曲面の例.

この節では $\text{char } k = p > 0$ と仮定して, 正標数特有の楕円曲面の例を挙げる.

例 3.1. C を

$$x^p - x = t^m, \quad (m, p) = 1$$

で定義される 非特異完備曲線とする. 曲面 C は位数 p の自己同型

$$g: (t, x) \longrightarrow (t, x+1)$$

を持つ. $a \in$ ordinary elliptic curve E の p 等分点とし, $C \times E$ の g の作用を

$$g: (t, x, y) \longmapsto (t, x+1, y+a)$$

で定める. g は $C \times E$ 上に固定点も持たず, また C 上の固定点は無限遠点のみである. 従って楕円曲面

$$f: S = C \times E / \langle g \rangle \longrightarrow C / \langle g \rangle = \mathbb{P}^1$$

は無限遠点のみ重複ファイバー pE_∞ を持つ. $C \times E \rightarrow S$ はエタール商写像であるので, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{p} \chi(C \times E, \mathcal{O}_{C \times E}) = 0$, 従って系 1.4 が適用できて, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ はタイプ $(p|1)$ の楕円曲面である.

$$K_S = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-d-2)) + (p-b-1)E_\infty$$

$$m = dp + b, \quad 1 \leq b < p, \quad d \geq 0$$

従って

$$-\deg f = m - d$$

であることも簡単な計算から分かる. また

$$g_S(S) = m - d - 1,$$

$$K(S) = \begin{cases} -\infty & , m=1 \\ 0 & , m=2 \text{ かつ } p=3 \text{ または } m=3 \text{ かつ } p=2 \\ 1 & , \text{その他} \end{cases}$$

である。

例 3.2, 次にタイプ $(p^2 | 1)$ の楕円曲面の例を示す。
 C を次の式で定まる $\mathbb{P}^1$ の p^2 次巡回被覆である 非特異完備曲線とする。

$$\begin{aligned} x^p &= x + t^m, & (m, p) &= 1 \\ y^p &= y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)! i!} x^i t^{m(p-i)} \end{aligned}$$

曲面 C は 位数 p^2 の自己同型写像 ϑ

$$\vartheta: (t, x, y) \longmapsto (t, x+1, y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)! i!} x^i)$$

を持つ。 ϑ の固定点は C の無限遠点のみである。 E を ordinary elliptic curve とも位数 p^2 の E の有理点とする。 ϑ の $C \times E$ への作用を

$$\vartheta: (t, x, y, s) \longmapsto (t, x+1, y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)! i!} x^i, s + \vartheta)$$

と定義すると, これは固定点を持たない。従って例 3.1 と同様の考察によって, 楕円曲面

$$f: S = C \times E / \langle \vartheta \rangle \longrightarrow C / \langle \vartheta \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

は無限遠点上でのみ重複ファイバー $p^2 E_\infty$ を持ち, タイプ $(p^2 | 1)$ であることが分かる。また

$$-\deg \frac{f}{\pi} = mp - m + 1 + \left\lfloor \frac{mp - (m+1)}{p^2} \right\rfloor,$$

$$a = mp - (m+1) - \left\lfloor \frac{mp - (m+1)}{p^2} \right\rfloor p^2,$$

であることも示すことができる。 S の構成法より明らかのように S から楕円曲線 $E / \langle \vartheta \rangle$ への全射があり, 従って補題 1.3 より $\dim \text{Alb}(S) = 1$ である。また

$$\rho_2(S) = mp - m + \left\lfloor \frac{mp - (m+1)}{p^2} \right\rfloor.$$

である。 $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$ であるので

$$h^1(S, \mathcal{O}_S) = mp - m + 1 + \left[\frac{mp - (m+1)}{p^2} \right]$$

である。また容易に分かるように

$$a \not\equiv -1 \pmod{p}$$

であることが分かる。これはもっと一般的に成立する事実である。

命題 3.3. $mp^r F$ を楕円曲面の wild fibre, $\text{ord}[F]|_F = m$, $(m, p) = 1$ と仮定する。さらに F は ordinary elliptic curve または タイプ I_0 (3 個の有理曲線のなすサイクル) とする。このとき

$$\left[\frac{a}{m} \right] \not\equiv -1 \pmod{p}.$$

証明は 次節の wild fibre の tame fibre への還元の理論を使う。 F が supersingular elliptic curve のとき、この命題が成立するかどうか不明である。

例 3.4. 次に α_p quotient として得られる楕円曲面の例をあげる。

$C \subset \mathbb{P}^2$ 内の方程式

$$S_0 S_2^{p-1} - S_1^p = 0$$

で定義される特異曲線とする。局所群スキーム $\alpha_p = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^p))$ は C 上に、

$$(S_0 : S_1 : S_2) \longmapsto (S_0 : S_1 + \epsilon S_0 : S_2)$$

で作用する。 $E \subset \text{supersingular elliptic curve}$ とすると、 α_p は E の部分群スキームである。従って

$$f: S = C \times E / \alpha_p \longrightarrow C / \alpha_p \simeq \mathbb{P}^1$$

が定義できる。このとき S は非特異曲面であり, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は無限遠点 ∞ でのみ重複ファイバー $P E_\infty$ を持つ 楕円曲面であることが分かる。また

$$K_S = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-3)$$

であることも証明できる。従って

$$c_1 = 0,$$

$$- \deg f = p-1$$

が成立する。 C の非特異モデルは有理曲線であるので, S は unimuled である。また

$$k(S) = \begin{cases} -\infty & , p=2 \\ 0 & , p=3 \\ 1 & , p \geq 5, \end{cases}$$

$$\dim \text{Alb}(S) = 1$$

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$$

であることも分かる。

最後に 標数 0 への 引上げの例を与える。

例 3.5. ω を 1 の原始 p 乗根とし, $K = \mathbb{Q}(\omega)$, $\mathbb{Z} \in K$ の整教環とする。 $\mathbb{P}^1(K)$ の自己同型 σ

$$\sigma: x \mapsto \omega x + 1$$

を考える。 σ は位数 p である。そこで

$$P(x) = \prod_{i=0}^{p-1} \sigma^i(x)$$

とおくと,

$$P(x) \equiv x^p - x \pmod{(\pi)},$$

但し, ここで $\pi = 1 - \omega$ とおいた。よく知られているように, $p\mathbb{Z} = (\pi)$ である。 $R = \mathbb{Z}_p$ とおく。

さて $\mathbb{P}^2(R)$ の曲線 C

$$S_0^p P(S_1/S_0) - S_0 S_2^{p-1} = 0$$

を考えると, これは $\text{Spec}(R)$ 上 *smooth* である。そこで K 上定義された楕円曲線 E で 次の性質を持つものを考える。

1) K 上の有限拡大 L と, E の位数 p の L 有理点 a が存在する。2) $\tilde{R} \in R$ の L での整束とすると, E は $\text{Spec}(\tilde{R})$ 上のアーベルスキーム $\varphi: E \rightarrow \text{Spec}(\tilde{R})$ に拡張でき, a は φ の位数 p の切断 $\hat{a}$ に拡張できる。さて $C \times_{\text{Spec}(\tilde{R})} E$ への ∂ の作用を

$$\partial: ((s_0: s_1: s_2), \gamma) \longmapsto ((s_0: \omega s_1 + s_0: s_2), \gamma + \hat{a})$$

と定義し, $\mathcal{S} = C \times_{\text{Spec}(\tilde{R})} E / \langle \partial \rangle, \psi: \mathcal{S} \rightarrow \text{Spec}(\tilde{R})$ を構造射と

定義する。さらに $\tilde{f}: \mathcal{S} \rightarrow C/\langle \partial \rangle \cong \mathbb{P}^1(\tilde{R})$ なる射がある。 ψ は *smooth* であり,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S} & \\ \psi \downarrow & \tilde{f} \searrow & \\ \text{Spec}(\tilde{R}) & & \mathbb{P}^1(\tilde{R}) \end{array}$$

は可換図式である。 $\text{Spec}(\tilde{R})$ の閉点 η 上および生成点 s_0 上では $\tilde{f}_0: S_0 \rightarrow \mathbb{P}^1, \tilde{f}_\eta: S_\eta \rightarrow \mathbb{P}^1$ なる楕円曲面を定める。 $\tilde{f}_0$ は例 3.1 で $m = p-1$ とおいた場合にあたり, 従って

$$K_{S_0} = \tilde{f}_0^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-3)$$

$$h_2(S_0) = \begin{cases} 0 & , \quad p=2 \\ p-2 & , \quad p \geq 3 \end{cases}$$

である。一方 $\mathcal{S}$ は C_K 上で p 個の固定点 $\sigma_i = (1: \sqrt[p]{1-\omega}: 0)$, $i=1, 2, \dots, p-1$, σ_i は $y^{p-1} = p(1-\omega)$ の解, σ が無限遠点である。従って $\tilde{f}_\eta: S_\eta \rightarrow \mathbb{P}^1$ は p 個の重複ファイバー pE_i , $i=1, \dots, p$ を有し, 従って, 次の結果を得る。

$$K_{S_\eta} = \tilde{f}_\eta^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) + \sum_{i=1}^p (p-1)E_i$$

$$h_2(S_\eta) = 0,$$

§4 Wild fibres の tame fibres への還元.

複素数体上の楕円曲面論では 重複ファイバーは $\log$ 変換を行うことにより構成することができる。対数関数自体は解析関数であるので、 $\log$ 変換は正標数の体上では定義できない。しかしながら $\log$ 変換のもとになっている考えは、重複ファイバーがあるとき、底曲面の分岐被覆をとってこの曲面を引き戻し、さらにその正規化を行えば、重複ファイバーをなくすることができる事実に基づいている。この節では、正標数の場合にも類似のことが成立することも示す。

$f: S \rightarrow C$ を標数 p の代数体 K 上定義された楕円曲面とし、 f は wild fibre mD を持つと仮定する。 $f(D) = \mathfrak{p}$, $\nu = \text{ord}[D]_D$, $m = \nu p^r$, $r \geq 1$ とおく。

補題 4.1. (i) $f(\mathfrak{p}) = mD$ が wild fibre であるならば、自然な写像

$$\rho_D: H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$$

は全射である。

(ii) もし $\deg f < 0$ であるならば ($f: S \rightarrow C$ が wild fibre を持てば、常に $\deg f < 0$ である), (0.2), (0.5) を参照せよ) $f^{-1}(\mathfrak{p}) = E$ を smooth fibre とすると,

$$\rho_E: H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E)$$

は零写像である。

証明 (i) 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-D) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

より, 完全列

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_S(-D)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_S) \rightarrow 0$$

を得る。 mD は wild であるので (0.1) より

$R^0(\mathcal{O}_S(K_S + D)) = R^0(\mathcal{O}_S(K_S))$. 従って Serre duality によつて ρ_D は全射である.

(ii) $f: S \rightarrow C$ よりできる Leray spectral sequence より, 完全列

$$0 \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) \rightarrow 0$$

を得る. $\deg f < 0$ であるから,

$$H^0(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) = H^0(C, \mathcal{O}),$$

$\mathcal{O}$ は $R^1 f_* \mathcal{O}_S$ の torsion part. 一方 ρ_E は上の完全列より,

$H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E)$ と分解し, 従つて零写像である.

cas (I) まず D が ordinary elliptic curve である場合を考える. D の Frobenius 写像は $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ に semi-simple に作用している. 従つて, F_D, F_S をそれぞれ D, S の Frobenius 写像の $H^1(D, \mathcal{O}_D), H^1(S, \mathcal{O}_S)$ への作用とすると, 上の補題 4.1 (i) より,

$$(4.2) \quad \rho_D(\alpha) \neq 0, \quad F_S(\alpha) = \alpha, \quad F_D(\rho(\alpha)) = \rho(\alpha)$$

なる $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ の元 α が存在する. さて S のアフィン開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ をとり, α をチェック コサイクル $\{f_{ij}\}$ で表しておく. (4.2) より

$$f_{ij}^p = f_{ij} + f_i - f_j, \quad U_i \cap U_j$$

を満足する

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}), \quad i \in I$$

が存在する. そこで イタール被覆 $\pi: S'' \rightarrow S$ を

$$\begin{cases} z_i^p - z_i = f_i, & U_i \text{ 上}, i \in I \\ z_i = z_j + f_{ij}, & U_i \cap U_j \text{ 上} \end{cases}$$

で定義する. これは次数 p の イタール被覆である.

この被覆を D 上に制限すると $\rho(\alpha) \neq 0$ であることより, $\pi^{-1}(D) \rightarrow D$ は non trivial な イタール被覆である. 一方

$\pi_1: S^{(1)} \rightarrow S$ と f の smooth fibre E 上に制限すると, 補題 4.1 (ii) より $\pi_1^*(E) = 0$ であり, 従って $\pi_1^{-1}(E)$ は E の p 個のコピーに分解する。そこで $f \circ \pi_1$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\pi_1} & S^{(1)} \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ C & \xleftarrow{\theta_1} & C^{(1)} \end{array}$$

をとると, θ_1 は点 $g = f(D)$ で完全不分岐であり, $\deg \theta_1 = p$ である。そこで $g^{(1)} = \theta_1^{-1}(g)$ とおく。 $f_1^{-1}(g^{(1)}) = m^{(1)} D^{(1)}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \pi_1^*[D]|_D &= [D^{(1)}]|_{D^{(1)}} \\ m^{(1)} &= \frac{m}{p} \end{aligned}$$

であることが分かる。 D は ordinary elliptic curve であり,

$\pi_1|_{D^{(1)}}: D^{(1)} \rightarrow D$ は次数 p のイタール被覆であるので,

$\pi_{1*}: H^0(D) \rightarrow H^0(D^{(1)})$ は次数 p の purely inseparable homomorphism である。従って

$$v = \text{ord } [D]|_D = \text{ord } \pi_{1*} [D]|_D = \text{ord } [D^{(1)}]|_{D^{(1)}}.$$

そこで 以上の操作を r 回繰返す。

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xleftarrow{\pi_1} & S^{(1)} & \xleftarrow{\pi_2} & S^{(2)} & \leftarrow \cdots \leftarrow & S^{(r)} \\ f \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_r \downarrow \\ C & \xleftarrow{\theta_1} & C^{(1)} & \xleftarrow{\theta_2} & C^{(2)} & \leftarrow \cdots \leftarrow & C^{(r)} \\ \underbrace{g} & & \underbrace{g^{(1)}} & & \underbrace{g^{(2)}} & & \underbrace{g^{(r)}} \end{array}$$

但し $\theta_i^{-1}(g^{(i-1)}) = g^{(i)}$ とおいた。 θ_i は $g^{(i-1)}$ で完全不分岐である。 $f_i^{-1}(g^{(i)}) = m^{(i)} D^{(i)}$ とおくと, 上と同様の論法によつて

$$\text{ord}[D^{(i)}]_{D^{(i)}} = \text{ord}[D^{(i-1)}]_{D^{(i-1)}}$$

$$m^{(i)} = \frac{m^{(i-1)}}{p}$$

が成立する。従って

$$\text{ord}[D^{(r)}]_{D^{(r)}} = \nu = m^{(r)}.$$

すなわち $m^{(r)} D^{(r)}$ は tame である。

注 4.3. (i) コサイクル $\alpha \in H^1(S, \mathcal{O}_S)$ の取り方は一意的ではない。
 $\varphi_D: H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$ は

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\varphi} H^0(C, R^1 f_{*} \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$$

と分解し、従って $\varphi^{-1}(\text{Ker}(H^0(C, R^1 f_{*} \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)))$ の元だけの不定性がある。

(ii). $R = \mathcal{O}_{C, \hat{s}}$, $\hat{R}$ は R の完備化とし、 $f: S \rightarrow C \in \text{Spec}(R)$ 上に引戻したもの $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow \text{Spec}(\hat{R})$ と記す。 $\hat{f}$ の closed fibre は mD であり、 D は (ordinary) elliptic curve であるので、 mD の基本群はアーベル群。 $\hat{R} \cong R[[X]]$, k は代数閉体と仮定しているので、 mD と $\hat{S}$ の代数的基本群は同型である。従って $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r$ は $\hat{S}$ 上に制限すれば $\mathbb{Z}/p^r \mathbb{Z}$ 巡回被覆であることが分かる。しかし大域的には巡回被覆に与えられるかどうかは今の所不明である。

(Case II). D が I_0 型るとき。 $\text{Pic}^0(D) = G_m$ であるので、Frobenius 写像 F_D は $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ 上に semi-simple に作用する。従って Case I) と同様の論法が成立し、wild fibre を tame fibre に還元することができる。

(Case III) D が supersingular elliptic curve のとき。Frobenius 写像 F_D は nilpotent に作用し、従って F_D は零写像であ

る。従って

$$(4.4) \quad \rho(\alpha) \neq 0, \quad F_S^{n-1}(\alpha) \neq 0, \quad F_S^n(\alpha) = 0, \quad F_D(\rho(\alpha)) = 0$$

なる $\alpha \in H^1(S, \mathcal{O}_S)$ と正整数 n が存在する。

そこで上と同様 S の アフィン開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ をとり、 $\alpha \in$ チェック コサイクル $\{f_{ij}\}$ で表す。(4.4) より

$$f_{ij}^{p^n} = f_i - f_j, \quad U_i \cap U_j \text{ 上},$$

なる $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$ が存在する。そこで 次数 p^n の flat cover $\pi_1: S^{(1)} \rightarrow S$ を

$$\begin{cases} z_i^{p^n} = f_i, & U_i \text{ 上}, i \in I \\ z_i = z_j + f_{ij}, & U_i \cap U_j \text{ 上}, \end{cases}$$

で定義する。 $\mu_1: \hat{S}^{(1)} \rightarrow S^{(1)}$ と $S^{(1)}$ の正規化, $\mu_2: \hat{S}^{(1)} \rightarrow \hat{S}^{(1)}$ を $\hat{S}^{(1)}$ の minimal resolution とし, $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$ とおき, $\pi_1 \circ \mu$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\pi_1} & S^{(1)} & \xleftarrow{\mu} & \hat{S}^{(1)} \\ & \nwarrow & \nwarrow \tilde{\pi}_1 & \nwarrow f_1 & \\ f \downarrow & & & & \downarrow \\ C & \xleftarrow{\vartheta_1} & C^{(1)} & & \\ \wr & & \wr & & \\ \mathfrak{z} & & \mathfrak{z}^{(1)} & & \end{array} \quad \vartheta_1(\mathfrak{z}^{(1)}) = \mathfrak{z},$$

をとる。補題 4.1 (ii) より, ϑ_1 は 次数 p^n の purely inseparable morphism である。 D は 楕円曲線であるので, $\mu_1^{-1}(D)$ の近傍で $\hat{S}^{(1)}$ は non-singular である。

さて $f_1^{-1}(\mathfrak{z}^{(1)}) = m^{(1)} D^{(1)}$ とおくと, (4.4) より

$$m^{(1)} = \frac{m}{p^n}, \quad 1 \leq j \leq n$$

なる 正整数 λ が存在することが分かる。また $\tilde{\pi}_1|_{D^{(1)}}: D^{(1)} \rightarrow D$ の dual $\tilde{\pi}_1^*|_{D^{(1)}}: \text{Pic}^0(D) \rightarrow \text{Pic}^0(D^{(1)})$ は purely inseparable morphism であり, 従って

$$\begin{aligned}\nu &= \text{ord}[D]|_D = \text{ord} \tilde{\pi}_1^*|_{D^{(p)}}[D]|_D \\ &= \text{ord}[p^{m'} D^{(p)}]|_{D^{(p)}} = \text{ord}[D^{(p)}]|_{D^{(p)}}\end{aligned}$$

が成立する。(D は supersingular elliptic curve なので, $(\nu, p) = 1$, $(\text{ord}[D^{(p)}]|_{D^{(p)}}, p) = 1$ であることに注意)。

従って 上の操作を有限回繰返すことによって tame fibre に還元することができる。

注 4. (4.4) で $m=1$ ととめるかどうか 今の所分からない。知られている例では, すべて $m=1$ ととめている。

§5. Tame fibres の non multiple fibres への還元

§4 の (case I), II), III) の場合に tame fibres と multiple fibres へ還元することを考える。

Case I) mD , D ordinary elliptic curve, $m = p^\delta m'$,

$(m', p) = 1$, $\delta \geq 0$ とする。S の D の近傍 $\tilde{U}$ を十分小さくとると, $[p^\delta D]$ は位数 m' である。但し U は C の点 $s = f(D)$ の近傍とする。 $\{U_i\}_{i \in I} \in f^{-1}(U)$ のアフィン開被覆とし, $f_i = 0$ を $p^\delta D$ の U_i での局所方程式とすると, $[p^\delta D]$ は $f^{-1}(U)$ で変換函数

$$f_{ij} = f_i / f_j, \quad U_i \cap U_j \text{ 上}$$

で定義される。点 s での局所パラメータ $t \in f^{-1}(U)$ に引き上げて考えると, U_i 上で

$$t = u_i f_i^{m'}, \quad u_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_S^*)$$

と書くことができ, 従って

$$u_j = f_{ij}^{m'} u_i$$

が成立する。そこでエタール被覆 $\pi_1: V^{(1)} \rightarrow f^{-1}(U)$ を

$$\begin{cases} z_i^{m'} = u_i & , u_i \text{ 上} \\ z_j = f_{ij} z_i & , u_i \cap u_j \text{ 上} \end{cases}$$

によって定義する。 f の smooth fibre $E \subset f^{-1}(U)$ に対して、 $\pi_1^{-1}(E)$ は E の m' 個のコピーよりなり、一方 $[p^\delta D]|_D$ は位数 m' であるので、 $\pi_1^{-1}(D) \rightarrow D$ は次数 m' の non-trivial エタール被覆である。 $f \circ \pi_1$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xleftarrow{\pi_1} & V^{(1)} \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ U & \xleftarrow{\theta_1} & U^{(1)} \\ \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\downarrow}}} & & \underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\underset{\cdot}{\downarrow}}} g^{(1)} \end{array}$$

をとると、 θ_1 は次数 m' の射で、点 g で完全分岐している。さらに $f_1^{-1}(g^{(1)}) = m'' D^{(1)}$ とおくと、

$$m'' = p^\delta$$

$$\text{ord}[D^{(1)}]|_{D^{(1)}} = p^\delta$$

であることが容易に分かる。

次に $g^{(1)}$ の $U^{(1)}$ での小近傍 V と、点 $g^{(1)}$ での局所パラメータ s をとる。 $[D^{(1)}]|_{f_1^{-1}(V)}$ は位数 p^δ と仮定してよい。 $\{V_i\}_{i \in I}$ を $f_1^{-1}(V)$ のアフィン開被覆とし $\partial_i = 0$ は $D^{(1)}$ の V_i での局所方程式とする。 $[D^{(1)}]$ は $f_1^{-1}(V)$ 上では、変換函数

$$g_{ij} = \partial_i / \partial_j, \quad V_i \cap V_j \text{ 上}$$

で定義されている。 V_i 上で s は

$$s = v_i g_i^{p^\delta}, \quad v_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i}^\times)$$

と書くことができる。従って

$v_j = g_{ij}^{p^\delta} v_i$, $V_i \cap V_j$ 上
 が成立する。次数 p^δ の flat cover $\pi_2: V^{(2)} \rightarrow f^{-1}(V)$
 を

$$(5.1) \quad \begin{cases} w_i^{p^\delta} = v_i, & V_i \text{ 上} \\ w_i = g_{ij} w_j, & V_i \cap V_j \text{ 上} \end{cases}$$

で定義し, $f_1 \circ \pi_2$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xleftarrow{\pi_2} & V^{(2)} \\ \downarrow & & \downarrow f_2 \\ V & \xleftarrow{g_2} & U^{(2)} \end{array}, \quad g_2(g^{(2)}) = g^{(1)}$$

$\begin{smallmatrix} \mathcal{O}_{U^{(1)}} \\ \mathcal{O}_{V^{(1)}} \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} \mathcal{O}_{U^{(2)}} \\ \mathcal{O}_{V^{(2)}} \end{smallmatrix}$

をとる。すると $U^{(2)}$ は non-singular, g_2 は 次数 p^δ の purely inseparable morphism である。 $V^{(2)}$ が $f_2^{-1}(g^{(2)})$ の近傍で non-singular であることは, 次の補題より示すことができる。

補題 5.2. E は ordinary elliptic curve, $\{U_i\}_{i \in I}$ は E の アフィン開被覆, L は E 上の 次数 p^δ の 直線束とする。さらに L は 変換函数 $\{f_{ij}\}$, $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^*)$ で定義されており, 従って

$$f_{ij}^{p^\delta} = f_i / f_j, \quad f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^*)$$

が成立しているとする。このとき df_i/f_i , $i \in I$ は E 上の 大域的な 正則一次型式 $\omega \neq 0$ を定める。

証明

$$\frac{df_i}{f_i} = \frac{df_j}{f_j}, \quad U_i \cap U_j \text{ 上}$$

であることは 明らか。従って ω が定義できる。もし $\omega \equiv 0$ であれば $df_i = 0$, 従って $f_i = g_i^p$, $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$, $i \in I$ と書けるが, これは 直線束 L の 次数が $p^{\delta-1}$ であることを意味し 仮定に矛盾する。

さて (5.1) より $V^{(2)}$ の特異点は $\pi_2^{-1}(V_i)$, $i \in I$ 上では dV_i の零点に含まれることが分かる。 $V_i' = V_i|_{V_i \cap D^{(1)}}$ とおくと, 上の補題より dV_i/V_i' は $D^{(1)}$ 上の大域的な正則一次型式 $\omega \neq 0$ も定める。従って dV_i は $V_i \cap D^{(1)}$ の近傍で零点を持つ。さらにこのことから, $f_i^{-1}(g^{(2)})$ が smooth fibe であることも容易に分かる。

(case II), III). このときは $\text{Pic}^0(D)$ は p 等分点を持つので, $(m, p) = 1$ である。従って (case I) の最初の操作がそのまま適用できる。

注意 5.3 §4, §5 を通じて 正標数でのみ存在する重複ファイバー mD , $\text{Pic}^0(D) = \mathbb{G}_a$ に関しては何も主張していない。§4, §5 の方法では この除外された場合と取扱うのには不十分である。除外された場合の例は わずかしら知られていない。(〔K1〕を参照のこと。)

§6 その他

序で少し述べたように, 我々の研究の 一つの出発点は楕円曲面の 標数 0 への lifting の可否を考えることにあった。すべて §3 例 3.5 で見たように lifting に際して $R^1(S, \mathcal{O}_S)$, $R^0(S, \mathcal{O}_S^1)$, $H_2(S)$ など是不変ではない。しかしながら 5 次の定理を示すことができる。

定理 6.1. R を discrete valuation ring, $\varphi: X \rightarrow \text{Spec}(R)$ は $\text{Spec}(R)$ 上 固有, 分離的, 有限型の代数空間で, さらに φ は smooth, かつファイバーは曲面であると仮定する。 X_0 を φ の closed fibe, X_1 を φ の generic geometric fibe とすると

$$k(X_0) = k(X_1)$$

が成立する。

証明は 曲面の分類理論を 最大限用いるので、高次元には適用できる。証明については [KU] §9 を参照されたい。この定理によって $k=1$ の楕円曲面は もし lift されれば再び $k=1$ の楕円曲面であることが分かる。

References.

- [I]. Iitaka, S., Deformations of compact complex surfaces, II, J. Math. Soc. Japan, 22 (1970), 247-261.
- [K1] Katsura, T., On Kummer surfaces in characteristic 2, Proc. Intern. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, (M. Nagata, ed.), Kinokuniya, Tokyo, 1978, 525-542
- [K2] Kodaira, K., On compact analytic surfaces, II, III, Ann. of Math. 77 (1963), 563-626, *ibid.* 78 (1963), 1-40.
- [KU] Katsura, T. & K. Ueno, On elliptic surfaces in characteristic p , preprint.