

熱核 に対する Hadamard 変分公式
と Laplacian の固有値

東大 理 小沢 真

§ Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界領域. $\gamma = \partial\Omega \cdots C^\infty$ boundary

$f(x) \in C^\infty(\gamma)$ fix, $\nu_x \cdots \gamma \ni x$ での外向き単位法線 vector

$$\gamma_\varepsilon = \{ x + \varepsilon f(x) \nu_x \quad ; x \in \gamma \}$$

$\Omega_\varepsilon \cdots \gamma_\varepsilon$ 囲む有界領域 ($\varepsilon: \text{十分小}$) とする。

Hadamard は [3] に於いて次の命題を示した。

$G_\varepsilon(x, y) \cdots$ the Green function of Laplacian with Dirichlet boundary condition at γ_ε

とする。

命題 1 [3]

$x, y \in \Omega$ とする。

$$\delta G(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (G_\varepsilon(x, y) - G(x, y))$$

とおくと

$$\delta G(x, y) = - \int_Y \frac{\partial G(x, z)}{\partial z} \frac{\partial G(y, z)}{\partial z} f(z) d\sigma_z$$

== で $d\sigma_z$ は Y 上の面素.

注意. 上の命題は $p \leq 0$ の場合 Hadamard π'' , $f \pi''$

一般の場合は Garabedian-Schiffer [2] が証明した。

[2] の証明は, $\varphi_\epsilon: \Omega \rightarrow \Omega_\epsilon$ なる diffeomorphism

の family $\{\varphi_\epsilon\}$ を構成し, φ_ϵ によって Ω_ϵ の Laplacian を

Ω での変数係数の 2 階楕円型作用素に変換し, 固定された

領域 Ω での作用素の摂動論に話を reduce する所謂

interior variational method である。

Fujiwara-Ozawa [4] は, むしろ Hadamard の idea
に忠実な方法 p が一般の場合も, 証明が可能であることを

Whitney's extension theorem を用いて示した。

詳述は Ozawa [7] の中にあるから参照して下さい。

この Note では, Hadamard の変分公式を熱方程式の
基本解の場合に示し, それを出発点として固有

値問題について調べる。証明の大半は省略するが, Trace

Tr(1) の変分公式については詳しく述べる。

§ 熱方程式の基本解に対する変分公式

$U_\varepsilon(x, y, t)$ で $\Omega_\varepsilon = \{x \in (0, \infty)\}$ における熱方程式の基本解とする。
境界条件は Dirichlet condition, または Neumann, Robin condition とする。

$x, y \in \Omega$, $t > 0$ を fix し.

$$\delta U(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (U_\varepsilon(x, y, t) - U(x, y, t))$$

とおく。 $\Rightarrow$ $U_0(x, y, t) \equiv U(x, y, t)$ と書いた。

定理 1

(1) Dirichlet 条件の場合 [5], [7]

$$\delta U(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_\gamma \frac{\partial U(x, z, t-\tau)}{\partial D_z} \frac{\partial U(y, z, \tau)}{\partial D_z} f(z) d\sigma_z$$

(2) 第3種境界条件の場合 [6]

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \text{ とし} \\ \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^\varepsilon} + k \right) U_\varepsilon(x, y, t) = 0 \quad x \in \gamma_\varepsilon \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ λ^ε は $x \in \gamma_\varepsilon$ における単位外向き法線 vector

そのとき

$$\begin{aligned} \delta U(x, y, t) = & - \int_0^t d\tau \int_Y \langle \nabla_r U(x, z, t-\tau), \nabla_r U(y, z, \tau) \rangle f(z) d\sigma_z \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_Y U(x, z, t-\tau) U(y, z, \tau) f(z) d\sigma_z \\ & + \int_0^t d\tau \int_Y (k^2 - (n-1)k H_1(z)) U(x, z, t-\tau) U(y, z, \tau) \\ & \quad f(z) d\sigma_z \end{aligned}$$

==> $H_1(z)$ は $z \in Y$ における Y の first mean curvature.

$a(x), b(x) \in C^\infty(Y)$ としたとき

$$\langle \nabla_r a(x), \nabla_r b(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a}{\partial X_i}(x) \frac{\partial b}{\partial X_i}(x)$$

==> $X_1, \dots, X_{n-1}$ は $T_x Y$ 上の coordinate

(2) の証明の rough sketch を述べよう。 [6] 参照

(1) の証明は [7] を参照の事。

Proof of (2)

$y \in \Omega$ を fix する。 $\tilde{U}(z, y, \tau)$ を z, τ 変数に

かんする extension で次の性質をみたすものとする。

$$\tilde{U}(z, y, \tau) \quad z \in \Omega, \tau \in (0, \infty) \text{ の}$$

- $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{U}(z, y, \tau) = 0$ for $z \in \bar{\Omega}$.
- $\tilde{U}(z, y, \tau)$ is $\Omega \times (0, \infty)$ a C^∞ 函数
- $\tilde{U}(z, y, \tau) = U(z, y, \tau)$ for $z \in \Omega, \tau \in (0, \infty)$

そのとき

$$\begin{aligned}
 & U_\varepsilon(x, y, t) - U(x, y, t) \\
 &= - \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, z, t-\tau) \tilde{U}(z, y, \tau) dz \right) \\
 &= \int_0^t d\tau \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_z U_\varepsilon(x, z, t-\tau) \cdot \tilde{U}(z, y, \tau) dz \\
 &\quad - \int_0^t d\tau \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, z, t-\tau) \cdot \Delta_z \tilde{U}(z, y, \tau) dz \\
 &\quad + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

==>

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_z \right) \tilde{U}(z, y, t) \right| \leq C \operatorname{dist}(z, \gamma)^2$$

を用いた。 C は t に無関係にとれる。 $\odot$ $y \in \Omega$ と

γ とは距離が positive だから

(Green の公式より)

$$U_\varepsilon(x, y, t) - U(x, y, t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \tilde{U}_\varepsilon}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon}(x, z, t-\tau) + k \tilde{U}_\varepsilon(x, z, t-\tau) \right) \tilde{U}(z, y, \tau) d\sigma_z^\varepsilon \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{U}_\varepsilon(x, z, t-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon}(z, y, \tau) + k \tilde{U}(z, y, \tau) \right) d\sigma_z^\varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \\
&= - \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{U}_\varepsilon(x, z, t-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon}(z, y, \tau) + k \tilde{U}(z, y, \tau) \right) d\sigma_z^\varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

少しばかり、幾何学的な議論を行なう。

今 γ の Z において exterior normal 方向が Z_n 座標であり、

Z における γ の tangent hyperplane 上に $z_1, \dots, z_{n-1}$ 座標を

互いに直交するようにとり、これを $\mathbb{R}^n$ の流通座標とする。

そうすれば、

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} = \frac{\partial z_1}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + \frac{\partial z_n}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z_n}$$

簡単な計算により

$$\begin{cases} \frac{\partial z_j}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial z_j} \mu_\varepsilon + O(\varepsilon^2) & (j=1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial z_n}{\partial \mathcal{L}_2^\varepsilon} = \mu_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_\varepsilon = \left(1 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

したがって、今 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_2^\varepsilon} \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} = \mu \varepsilon \left\{ \left(-\varepsilon \frac{\partial p}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial v}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}_{n-1}} \frac{\partial v}{\partial z_{n-1}} \right) \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_n} \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} \right\} + O(\varepsilon^2)$$

于是

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_n} \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_n} \Big|_z + \varepsilon f(z) \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}_n^2} \Big|_z + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j} \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j} \Big|_z + O(\varepsilon) \quad (j=1, \dots, n-1)$$

故由 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 可得

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{z}_2^\varepsilon} \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} - \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_2} \Big|_z \right) \\ = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j} \Big|_z + f(z) \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}_n^2} \Big|_z \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{z}_2^\varepsilon}(z, y, \tau) + k \tilde{U}(z, y, \tau) \Big|_{z+\varepsilon f(z)\bar{z}_2} \\ &= \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_2}(z, y, \tau) + k U(z, y, \tau) \Big|_z \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}_2^2}(z, y, \tau) + k \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_2}(z, y, \tau) \right) f(z) \\ &+ \varepsilon \left(-\langle \nabla_{\bar{z}} f(z), \nabla_{\bar{z}} U(z, y, \tau) \rangle \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

故由

$$\begin{aligned} \int U(x, y, t) = & - \int_0^t d\tau \int_Y \frac{\partial^2 U}{\partial D_z^2}(z, y, \tau) U(x, z, t-\tau) f(z) d\sigma_z \\ & + k^2 \int_0^t d\tau \int_Y U(x, z, t-\tau) U(z, y, \tau) f(z) d\sigma_z \\ & + \int_0^t d\tau \int_Y \langle \nabla_g f(z), \nabla_g U(z, y, \tau) \rangle d\sigma_z \end{aligned}$$

もちろん精密な Schauder estimate を用いての事だが! [] 参照.

と = 3 で Y 上では $U(x, z, \tau)$ は次の方程式を

みたしている。

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial D_z^2} + \nabla_g^2 + (n-1)H_1(z) \frac{\partial}{\partial D_z} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) U(x, z, \tau) = 0$$

==> ∇_g^2 は Tangent hyperplane 上の Laplacian である。

故に、

$$\begin{aligned} \int U(x, y, t) = & - \int_0^t d\tau \int_Y \langle \nabla_g U(x, z, t-\tau), \nabla_g U(z, y, \tau) \rangle f(z) d\sigma_z \\ (A) \quad & - \int_0^t d\tau \int_Y U(x, z, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} U(z, y, \tau) f(z) d\sigma_z \\ & + \int_0^t d\tau \int_Y (k^2 - k(n-1)H_1(z)) U(x, z, t-\tau) U(z, y, \tau) \\ & \quad f(z) d\sigma_z \end{aligned}$$

± τ , $x, y \in \Omega$ 故

$$0 = \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_Y U(x, z, t-\tau) U(z, y, \tau) f(z) d\sigma_z \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \left(\int_Y U(x, z, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} U(z, y, \tau) p(z) d\sigma_z \right) \\
(B) \quad &= \int_0^t d\tau \left(\int_Y \frac{\partial}{\partial \tau} U(x, z, t-\tau) U(z, y, \tau) p(z) d\sigma_z \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \left(\int_Y U(x, z, t-\tau) U(z, y, \tau) p(z) d\sigma_z \right)
\end{aligned}$$

(A), (B) より, Th 1 の (2) を得る. (証明終わり)

§ Trace $Tr(t)$ に対する変分公式

$$Tr(t; \varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, x, t) dx$$

とおく. この時,

$$STr(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (Tr(t; \varepsilon) - Tr(t; 0)) \quad \text{とする.}$$

定理 2

(1) Dirichlet 条件の場合 [5], [7]

$$STr(t) = \int_{\Omega} \delta U(x, x, t) dx$$

(2) 第3種境界条件 (定理 1 参照) の場合 [6]

$$STr(t) = \widetilde{\int_{\Omega}} \delta U(x, x, t) dx + \int_Y U(x, x, t) p(x) d\sigma_x$$

==で

$$\int_{\Omega} \delta U(x, x, t) dx$$

は $(0, \infty)$ における t 変数の distribution であって

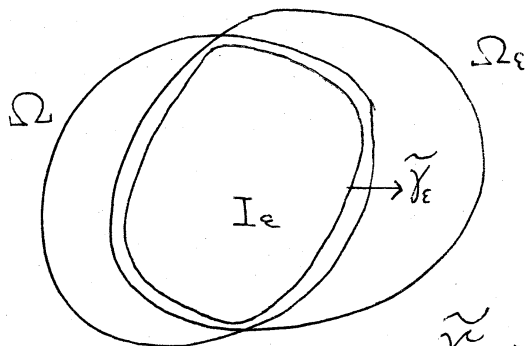
$\varphi(t) \in C_c^\infty(0, \infty)$ に対して

$$\int_{\Omega} dx \left(\int_0^\infty \delta U(x, x, t) \varphi(t) dt \right)$$

を対応させる汎函数として define される。

証明)) (1) の場合は [7] を参照の事。

delicate to (2) の場合について考える。



$\Omega \cap \Omega_\epsilon$ の境界

$\partial(\Omega \cap \Omega_\epsilon)$ から ϵ^h

order の距離に C^∞ hyperplane

$\tilde{\gamma}_\epsilon$ をとる。 ==で $1/h$ は、後で

適当に選ぶ事とする。 ϵ^h order とは、距離が

ϵ^h と $2\epsilon^h$ の間にある事しよう。 もちろん $\tilde{\gamma}_\epsilon$ は $\partial(\Omega \cap \Omega_\epsilon)$

と homeo (連結成分の個数も同じ) とする。

$\tilde{\gamma}_\epsilon$ の囲む有界領域を I_ϵ としよう。

$$Tr(t; \varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, x, t) dx \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} (C) \quad & \varepsilon^{-1} (Tr(t; \varepsilon) - Tr(t; 0)) \\ &= \varepsilon^{-1} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega} U_\varepsilon(x, x, t) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} U(x, x, t) dx \right\} \\ &+ \varepsilon^{-1} \left\{ \int_{(\Omega_\varepsilon \cap \Omega) \setminus I_\varepsilon} U_\varepsilon(x, x, t) dx - \int_{(\Omega_\varepsilon \cap \Omega) \setminus I_\varepsilon} U(x, x, t) dx \right\} \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_{I_\varepsilon} (U_\varepsilon(x, x, t) - U(x, x, t)) dx \end{aligned}$$

さて, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, 第一項は

$$\int_{\gamma} U(x, x, t) p(x) d\sigma_x$$

に収束する, 第二項は 0 に収束する。

問題は第三項であるが, 二つの処理は大変難しい。

今 $x \in I_\varepsilon$ とする。 $x \in \Omega$ 故

$$U_\varepsilon(x, x, t) - U(x, x, t) = \varepsilon \int U_{\varepsilon \Theta(\varepsilon, x, t)}(x, x, t)$$

なる如き $0 < \Theta(\varepsilon, x, t) < 1$ が存在する。

今 $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, \infty)$ をとって $1 \rightarrow \int_{\Gamma} x$ しよう。

$\langle \varepsilon^{-1} (Tr(t; \varepsilon) - Tr(t; 0)), \varphi(t) \rangle \dots$ $\varphi(t)$ を Test function としたときの値。

$$= \sum_{k=1}^3 \langle (C) \text{ 式右辺第 } k \text{ 項}, \varphi(t) \rangle$$

となるが、第1項、2項は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの処理がすでに
終わっているので、 $\langle \text{第3項}, \varphi(t) \rangle$ のみを問題にしよう。

$$\langle \varepsilon^{-1} \int_{I_\varepsilon} (U_\varepsilon(x, x, t) - U(x, x, t)) dx, \varphi(t) \rangle$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{I_\varepsilon} dx \langle \varepsilon^{-1} (U_\varepsilon(x, x, t) - U(x, x, t)), \varphi(t) \rangle$$

$$= \int_{I_\varepsilon} dx \langle \delta U_{\varepsilon 0}(\varepsilon, x, t)(x, x, t), \varphi(t) \rangle$$

さて、 $\delta U_{\varepsilon 0}(\varepsilon, x, t)$ は $\mathcal{D}\mathcal{R}$ のような表示式をもつ。

$$\delta U_{\varepsilon 0}(\varepsilon, x, t)$$

$$= - \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} \langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau), \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) \rangle$$

$$\int_{\varepsilon 0}(z) d\mathcal{D}_z^{\varepsilon 0}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau) U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) f_{\varepsilon 0}(z) d\mathcal{D}_z^{\varepsilon 0}$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau) U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) (k^2 - (n-1)kH_1(z)) f_{\varepsilon 0}(z) d\mathcal{D}_z^{\varepsilon 0}$$

==で、 $\nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}}$ は $\gamma_{\varepsilon 0}$ 上の tangential gradient operator

$d\mathcal{D}_z^{\varepsilon 0}$ は $\gamma_{\varepsilon 0}$ 上の面素。

$f_{\varepsilon 0}(z)$ は、以下の如く define される。

$$\Omega \rightarrow \Omega_{\varepsilon} \text{ なる領域振動は } \Omega_{\varepsilon 0} \rightarrow \Omega_{\varepsilon 0} + \tilde{\varepsilon}$$

なる領域振動を induce してゐることを考えよう。

$\gamma_{\varepsilon 0} + \tilde{\varepsilon}$ の全体は $y \in \gamma_{\varepsilon 0}$ の normal vector $\mathcal{N}_y^{\varepsilon 0}$

$$1 = \delta, 2 \quad \{y + \tilde{\varepsilon} \mathcal{N}_y^{\varepsilon 0} \cdot f_{\varepsilon 0}(y; \tilde{\varepsilon})\} ; y \in \gamma_{\varepsilon 0}$$

と represent されるから、 $\varepsilon = 2$ $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} f_{\varepsilon 0}(y; \tilde{\varepsilon}) \equiv f_{\varepsilon 0}(y)$ 。

すると

$$\begin{aligned} & \langle \delta U_{\varepsilon 0}(x, x, t), \varphi(t) \rangle \\ (D) \quad &= \left\langle - \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} \langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau), \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) \rangle f_{\varepsilon 0}(z) d\sigma_z^{\varepsilon 0} \right. \\ & \quad + \left\langle \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau) U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) f_{\varepsilon 0}(z) d\sigma_z^{\varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \langle \dots, \varphi(t) \rangle \right. \end{aligned}$$

==で 上式の右辺第二項に於いて $\frac{\partial}{\partial t}$ なる test function

$\varphi(t)$ の微分に 移項してゐる事に注意する。このような形にしたい。

いゝ。 estimate かなり非常に ヤリに くい。 何故なるかは

$\Theta(\varepsilon, z, \tau)$ は t に 5 まで 可微分かどうか わからないから、

さて $\chi_{\varepsilon}(x)$ を I_{ε} の characteristic function としよう。

$$Q^\varphi(x) \equiv \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \langle \delta U_{\varepsilon 0}(\varepsilon, x, t)(x, x, t), \varphi(t) \rangle \chi_\varepsilon(x)$$

とおく。

Claim. $Q^\varphi(x) < +\infty$, $\int_\Omega Q^\varphi(x) dx < +\infty$

①. 上の claim が証明できれば, Lebesgue の dominated convergence theorem により

$$\begin{aligned} & \int_{I_\varepsilon} dx \langle \delta U_{\varepsilon 0}(\varepsilon, x, t), \varphi(t) \rangle \\ & \longrightarrow \int_\Omega dx \langle \delta U(x, x, t), \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (T_\varepsilon(t; \varepsilon) - T_\varepsilon(t; 0)) \\ & = \int_\Omega \delta U(x, x, t) dx + \int_\gamma U(x, x, t) p(x) d\sigma_x \end{aligned}$$

となり, Th 2, (2) の証明がわかる。そこで, 上記 Claim を証明しよう。

Claim の証明 ; $z \in \Omega_\varepsilon$ かつ $\gamma \wedge$ の垂線, 足を

$d_\varepsilon(x)$ とする。このとき, 任意の $x \in I_\varepsilon$, $z \in \gamma_{\varepsilon 0}$ に対して

$$|x - z| \geq C |x - d_\varepsilon(z)|^h$$

が成り立つ。

ε に無関係な定数 $\tilde{C}$ が存在する。(図を書いて考えて下さい)。

以下の証明に於いては、熱方程式の基本解に対する pointwise estimate (with parameter ε) を用いる。

それは、よく知られている事なので、一々

補題として述べない。

(D) 式 右辺 第1項のみを評価する。第2項の評価は部分積分のおかげで、第1項より易しくなりました。第3項も易しい。

$$\left| \left\langle -\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} \langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, t-\tau), \nabla_{\gamma_{\varepsilon 0}} U_{\varepsilon 0}(x, z, \tau) \rangle f_{\varepsilon 0}(z) d\sigma_z^{\varepsilon 0}, g(t) \right\rangle \right|$$

$$\leq M \sup_{t \in \text{supp } \rho} \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \tau^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-\tau)}} e^{-\frac{|x-z|^2}{\tau}} d\sigma_z^{\varepsilon 0}$$

$$\text{さて, } e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-\tau)}} \leq e^{-\frac{\tilde{C}^2 |x-d_{\varepsilon}(z)|^2}{4(t-\tau)}}$$

などに、注意して考える。一方、 $\gamma_{\varepsilon 0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma$ differ だから、

$$\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon 0}} \frac{e^{-\frac{\tilde{C}^2}{4} \left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{\tau} \right) |x-d_{\varepsilon}(z)|^2}}{|(t-\tau)\tau|^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} d\sigma_z^{\varepsilon 0}$$

$$\leq k \int_0^t d\tau \int_{\gamma} \frac{e^{-\frac{\tilde{c}^2}{4}(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{t-\tau})|x-z|^2k}}{\{(t-\tau)\tau\}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} d\sigma_z$$

よって $Q^{\tilde{c}}(x) < +\infty$ が証明できた。

$$\int_{\Omega} Q^{\tilde{c}}(x) dx < \int_{\mathbb{R}^n} Q^{\tilde{c}}(x) dx$$

$$\leq \tilde{M} \int_{\gamma} d\sigma_z \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\{(t-\tau)\tau\}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} e^{-\left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{\tau}\right)\frac{\tilde{c}^2}{4}|x-z|^2k} dx$$

==> $1 < k < \frac{n}{n-1}$ のとき 右辺は有界。

だから $k = \frac{n-1}{n}$ とおけば良い。

(証明おわり)

§ 固有値問題に対する応用

今、領域 Ω にかんして考える

$$0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$$

を Laplacian with Dirichlet (Neumann or Robin) condition に対する固有値とする。重複度に応じて並べておく。

$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ で $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系とし、

$\varphi_j(x)$ は λ_j の固有空間に属する固有函数とする。

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$$

であった。

== 也 と. $\text{Tr } 1, 2$ による.

Tr 3

(1) Dirichlet 条件の場合 [5], [7]

$$\delta \text{Tr}(t) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu_2}(z) \right)^2 p(z) d\sigma_2$$

(2) 第3種境界条件の場合 [6]

$$\delta \text{Tr}(t) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\gamma} Q_j(z) p(z) d\sigma_2$$

== 也.

$$Q_j(z) = -|\nabla_{\delta} \varphi_j(z)|^2 + (k^2 - (n-1)kH_1(z) - \lambda_j) \varphi_j(z)^2.$$

== 也.

$$|\nabla_{\delta} \varphi_j(z)|^2 = \langle \nabla_{\delta} \varphi_j(z), \nabla_{\delta} \varphi_j(z) \rangle.$$

次の結果は良く知られている。

命題 Courant-Hilbert [1]

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域 とし, $\lambda_j(\Omega)$ を $-\Delta$ の j 番目の固有値 with Dirichlet condition とする。また

任意の Ω の subdomain ω に対して

$$\lambda_j(\Omega) \leq \lambda_j(\omega)$$

上の命題は Δ with Dirichlet condition に対する

固有値が領域に単調に depend している事をしめしている。

Uchiyama [8] は, Neumann 条件の場合 固有値は領域に非単調に依存する事を示した。我々の T_k の

(2) に於いても $Q_{j(2)}$ の定符号性はわからない。

これが固有値の領域に対する non monotonous dependence の本質的理由であるように思われる。

T_k の証明は田舎すが、定理 2 の (2) の事情をよく考慮して計算する必要がある。

§ もはや時間がない。

研究集会に於いては、さらに $\{Tr(t)\}$ の $t \downarrow 0$ での

漸近展開と hyperplane の geometry を結びつけ、

local geometric invariant の意義を強調した。これらの

テーマは、Ozawa [5], [7] にすでに書かれているので

興味のある方は参照して下さい。

おしまい。

参考文献

- [1] Courant - Hilbert Methods of mathematical physics, I
Interscience, New York, 1953
- [2] Garabedian - Schiffer J. Anal. Math., 2, 281-368 (1952-53)
- [3] Hadamard Oeuvre, C.N.R.S., 2, 515-631 (1968)
- [4] Fujiwara - Ozawa Proc. Japan. Acad., 54 A No 8
215-220 (1978)
- [5] Ozawa Proc. Japan. Acad., 54 A, 322-325 (1978)
- [6] — Perturbation of domains... II, to appear in Proc. Jap. Acad.
- [7] — 東京大学修士論文 (1979) 129p
- [8] Uchiyama J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 24, 281-299
(1977)