

パターン形成のスケーリング理論

東大理 鈴木増雄, 劉勇

この報告の前半では、一様な系のスケーリング理論の解説を行い、後半は、非一様な系、すなわち、パターン形成のスケーリング解とその物理的な議論を行う。解説を改めてここに書く時間的余裕が無いので、昨年の月刊フィジックス(海洋出版)の記事(Vol. 6, No. 8, 1985年)を抄録し、前半の解説としたい。

第一部

秩序化のスケーリング理論

不安定点近傍からの秩序化過程に対する一般的特徴を議論し、ゆらぎがマイクロからマクロに急激に成長する際のスケーリング則を解説する。さらにその一般化と応用にふれ、特にスピングラスの秩序化を議論する。

1. はじめに

自然を見渡すと、到るところに造形美というか、見事な秩序が多数見出される。このような秩序はどのように形成されるのであろうか。また、その秩序化過程には、一般的な法則が存在するのであろうか。この小論では、これに答えるため、出来る限り単純化した系で、現象を単純化して議論する。ここで述べるスケーリング理論を現実的な系に拡張するには、いろいろな改良・工夫が必要であるが、これは秩序化の本質的な一側面を明らかにするものと思われる。

2. 不安定性とゆらぎ

新しい秩序ができるときは、何か不安定性が存在して、それに伴うゆらぎが発生し、そのゆらぎが巨視的大きさにまで成長して、パターンや秩序が形成され

る^[1]。また、初期状態がすでにある小さな秩序を持っている場合には、その初期状態が不安定点近傍(図1参照)にあると、時間と共にゆらぎが異常に増大し、やがて平衡(または定常)状態のゆらぎへと落ち着く(異常揺動定理)^{[2],[4],[5]}。(図2参照)。

平衡状態における相転移では、不安定性和ゆらぎの関係は、スケーリング則によって特徴づけられ、くりこみ群によってマイクロに導かれている。

3. スケーリング則と自己相似性

Mandelbrot によっても強調されているように、複雑な自然現象の中には、自己相似性が、少なくとも近似的には満たされているものが多い。そういう系では2変数の物理量 $f(x, y)$ を一般的に考え、 x と y を適当にスケール変換 $x' = \lambda^p x$, $y' = \lambda^q y$ を行なったとき、 $f(x', y') \sim f(x, y)$ という不変性が成立するものと考えられる。すなわち、

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y) \quad (3.1)$$

という関数方程式が成り立つ。この一般解は、よく知られているように、

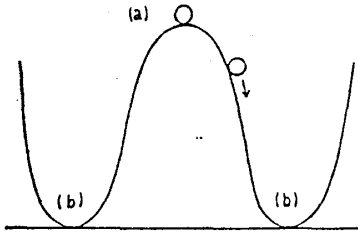


図1 不安定点 (a) から安定点 (b) への緩和 [1], [4], [5]

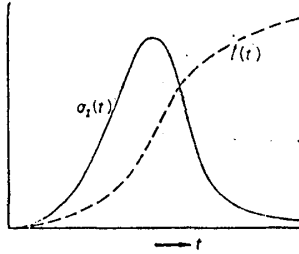


図2 異常揺動 [1], [4], [5], $I(t)$ は秩序パラメータ, $\sigma_1(t)$ はその揺動

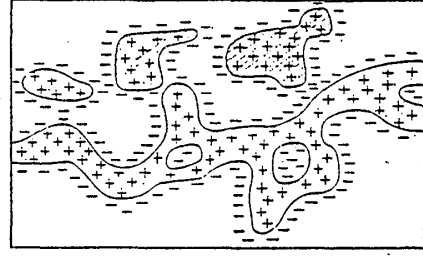


図3 臨界点におけるフラクタルなクラスター [3]

$$f(x, y) = y^{1/q} f(x/y^{p/q}) \quad (3.2)$$

という同次関数となる。これを一般化すると、

$$f(\lambda a(x), \lambda b(y)) = \lambda^p f(a(x), b(y)) \quad (3.3)$$

となり、この解は、

$$f(a(x), b(y)) = b^p(y) f(a(x)/b(y)) \quad (3.4)$$

と表わされる。ここに、 $a(x), b(y)$ は、一般に、 x と y の非線形関数となる。

このように、スケール変換によって不変な自然現象は、一般に、スケール則を充たす。その典型的な例が臨界現象である。臨界点では、相関距離 ξ が $\xi = \infty$ のため、特徴的な長さが存在せず、配位すなわち、クラスターの様子が自己相似になり、スケールリング則が成立する (3図参照)。

一般に、構造形成のメカニズムがどの時点でも同じであれば、スケールリング則が導かれる。そこで、そのメカニズムによって、次のように分解することもできるであろう。

- i) Critical point scaling...correlation length $\xi \rightarrow \infty$
- ii) Initial instability scaling...exponential growing due to the instability
- iii) Topological diffusion-type scaling...scaling of effective equations of motion

4. 過渡現象に対する一般的なスケールリング則

時間 t とあるパラメータ ε の2変数の物理量 $Q(\varepsilon, t)$ に対して、スケール変換

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon' = \lambda \varepsilon, \quad t \rightarrow t' = S(t, \lambda) \equiv \omega^{-1}(\omega(t)/\lambda) \quad (4.1)$$

を行なったとき、次の自己相似性が成立するとする：

$$Q(\varepsilon', t') = \lambda^p Q(\varepsilon, t). \quad (4.2)$$

この解は次のように与えられる：

$$Q(\varepsilon, t) = \varepsilon^p f(\varepsilon \omega(t)). \quad (4.3)$$

但し、 $\omega(t)$ は、 t の巾関数、指数関数等の非線形関数である。最近、いろいろな系で、このような非平衡系の一般化されたスケールリング則が具体的に見い出されている [4]~[9]。

5. 非線形確率過程と巨視的秩序形成

頭わにスケールリング則を導くには、具体的に研究する必要がある。まず、秩序パラメータ x に関する閉じた方程式がランジュバン方程式として次のように与えられている場合を考える：

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + \beta(x)\eta(t). \quad (5.1)$$

但し、 $\eta(t)$ は、 x 以外の他の自由度からくる、ゆらぎの効果を表わす。簡単のため、それはガウシャンのホワイトとする。すなわち、

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\varepsilon \delta(t-t'). \quad (5.2)$$

今、 $\alpha(x)$ を不安定点近傍 $x=0$ で展開し、 $\alpha(x) = \gamma x + (\text{higher})$ ($\gamma > 0$) とすると、スケールリング変数 $\tau(t) \equiv \varepsilon \omega(t)$ は $\tau = \varepsilon \exp(2\gamma t)$ で与えられ、ゆらぎ $\langle x^2(t) \rangle$ は

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2 \rangle_{st} f^{(st)}(\tau) \quad (5.3)$$

というスケールリング形に表わされることが、スケールリング極限

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ for } \tau \text{ fixed} \quad (5.4)$$

で示される。具体的には、図1のポテンシャルに対応して、

$$\alpha(x) = \gamma x - gx^3, \quad \beta(x) = 1 \quad (5.5)$$

とすると、

$$\tau = \frac{g}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} + \langle x^2(0) \rangle \right) e^{2\gamma t} \quad (5.6)$$

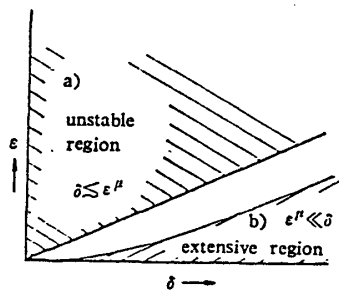


図4 ϵ - δ 平面[1],[4],[5]. a) $\delta \leq \epsilon^{1/2}$; 不安定領域, b) $\epsilon^{1/2} < \delta$; 示量性領域

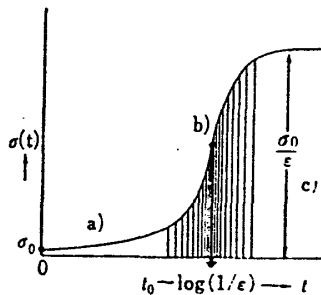


図5 秩序パラメタ $x(t)$ の二乗平均 $\langle x^2(t) \rangle \equiv \sigma(t)$ の時間発展[1],[4],[5]. a) 初期の線形領域, b) 非線形スケーリング領域, c) 終領域

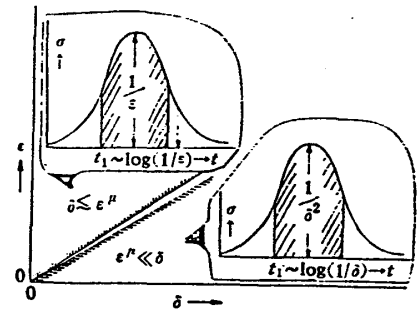


図6 不安定領域 $\delta \leq \epsilon^{1/2}$ における揺動増幅定理[1],[4],[5]と示量性領域における異常揺動定理[1],[2],[4],[5]

となり, $\tau \approx 1$ で, ゆらぎがマクロになるので, これに対応する時間 t をオンセットタイムと呼ぶ。これは,

$$t_0 \approx \frac{1}{2\tau} \log \left\{ \frac{g}{\tau} \left(\langle x^2(0) \rangle + \frac{\epsilon}{\tau} \right) \right\}^{-1} \quad (5.7)$$

で与えられる。転移温度 T_c より上の初期温度 T_i から, T_f に急冷する場合には, $\tau \propto T_c - T_f$ となるので,

$$t_0 \propto \frac{1}{T_c - T_f} \quad (5.8)$$

のようになる。

このような処法は, 次節で説明するように大変一般的であり, レーザー, 超放射, 乱流, プラズマの clumps 等にも応用されている。

6. 一様な系における秩序化のスケーリング理論 (一般的処法)

2節で簡単に説明したように, 図1のような不安定点からの緩和では, 途中でゆらぎが非常に大きくなる。ノイズの強さ ϵ に比較して, 初期値の不安定点からのずれ δ があまり小さくない示量性領域 (図4及び図6) では, 図1に示したような異常揺動定理が成立する。逆に, $\epsilon \ll \delta^2$ で特徴づけられる不安定領域ではスケーリング則

$$\langle Q(t) \rangle = \langle Q \rangle_{st} f^{(st)}(\tau) \quad (6.1)$$

が成立する。通常, Q としては, (5.3) のように, 秩序パラメタ $x(t)$ の二乗 (ゆらぎ) が用いられる。スケーリング変数 τ は, 時間 t , ノイズの強さ ϵ , 及び初期パラメタ δ の関数であり, 通常次のような形になる:

$$\tau = \tau(t, \epsilon, \delta) = \tilde{\tau}(\epsilon, \delta) e^{2\tau t} \quad (6.2)$$

但し, τ は, (5.5) の τ と同じく, 系の growing rate を表わすパラメタである。スケーリング変数 τ を頭わに求めるには, 図5に示されているような初期領域 (図5の a)) での系の時間発展を調べればよい。

そこで, 一般に, 手順をいくつかの段階に分けて, それぞれの領域で特徴的な解を見つけ, 全体を統一した解にする。

1) 第1段階: もとの方程式

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \eta(t)) \quad (6.3)$$

を線形化する:

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = F_i(x_i(t), \eta(t)). \quad (6.4)$$

この方程式の解を求めると,

$$\langle x_i^2(t) \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle e^{2\tau t} + \frac{\epsilon}{\tau} (e^{2\tau t} - 1) \quad (6.5)$$

のように与えられ, これから, (5.6) のようなスケーリング変数が見つかる。

2) 第2段階: 今, ランダムな力の強さ ϵ が非常に小さい極限で, しかも, それに応じて充分長い時間の領域を調べることにする。すなわち,

$$\text{sc-lim} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0, \tau = \text{fixed}} \quad (6.6)$$

というスケーリング極限で考えると, 第1の時間領域で, すでに充分ゆらぎの効果がとり入れられているから, 第2の時間領域 (図5の b)) では, ランダムな力の効果を無視して, 決定論的な方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = F(x(t), 0) \quad (6.7)$$

を解けばよいことになる。(6.7) の解を

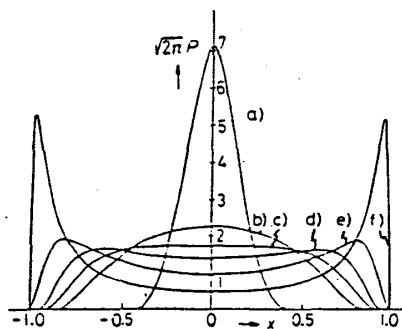


図 7 (5.5) の場合に対する分布関数 $P(x, t)$ のスケーリング解^{[1],[4],[5]}

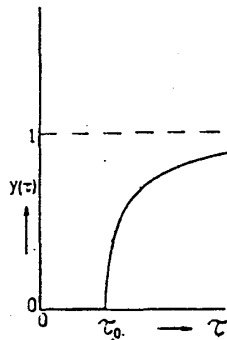


図 8 秩序パラメタの時間変化^{[1],[4],[5]}. 横軸はスケーリング時間, 縦軸は秩序パラメタ

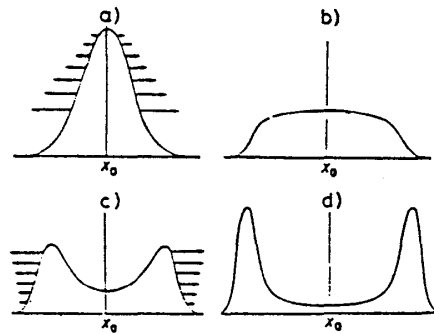


図 9 分布関数 $P(x, t)$ がシングルピークから、ダブルピークに変化するメカニズム^{[1],[4],[5]}. 横軸の矢印は、各位相点の変化速度を表わしている. 不安定点近傍では遅く、中間のところでは非常に速く、安定点近傍で再び遅くなる

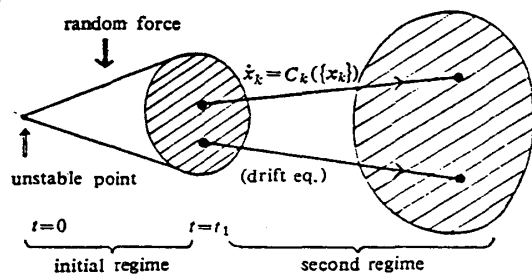


図 10 非一様な系でのスケーリング理論の模式図^{[1],[4],[5]}

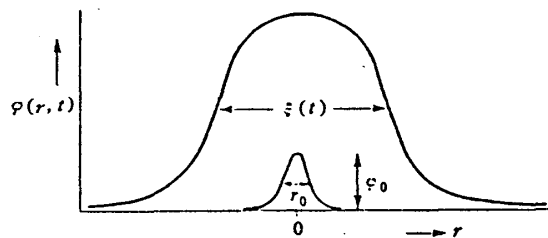


図 11 非一様な秩序パラメータ $\phi(r, t)$ とその空間時間変化^[1]

$$x(t) = G(t, x(0)) \quad (6.8)$$

とする.

3) 第3段階: 初期領域 a) の解を同様に初期値 $x(0)$ の関数として, $x(t) = x(t, x(0))$ の形に求め, これと (6.8) とから, $x(0)$ を消去すると, 初期領域と第2の非線形領域との解が滑らかに接続される. こうして,

$$x(t) = H(x_i(t)) \quad (6.9)$$

の形の解が得られる.

4) 第4段階: $x_i(t)$ は, 分散が (6.5) で与えられるガウス分布 $P_0(x_i(t))$ であることを用いると, 例えば, 秩序パラメータの二乗平均 $\langle x^2(t) \rangle$ は,

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(x) P_0(x) dx \quad (6.10)$$

によって与えられる. したがって, これは, $\langle x^2(t) \rangle \equiv (\tau$ の関数) となり, スケーリング解 (6.1) が導かれたことになる.

このようにして, スケーリング解が一般的に求められる. この様子を, 簡単なレーザーモデルの場合に図示すると, 図 7~図 9 のようになる. 図 10 には, 非

一様な場合への拡張の方向を示した.

7. カラーノイズに対するスケーリング理論

確率過程

$$\frac{d}{dt} x(t) = \alpha(x) + \eta(t) \quad (7.1)$$

において, ノイズ $\eta(t)$ が, 時間相関 $S(t)$ を持つカラーノイズの場合すなわち,

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \epsilon S(t - t') \quad (7.2)$$

を考えよう. 相関関数 $S(t)$ としては, 例えば,

$$S(t) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |t|} \quad (7.3)$$

が考えられる. この場合にもスケーリング理論が成立することが示せる^[10]. $\alpha(x) = \tau x + (\text{高次})$; $\tau > 0$ として, $\epsilon \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\tau = \text{fixed}$ というスケーリング極限 (6.6) では, (7.1) の解は,

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \langle x^2 \rangle_{st} f^{(\alpha)}(\tau) \quad (7.4)$$

と表わされ, 詳しい計算によると^[10], スケーリング変数は,

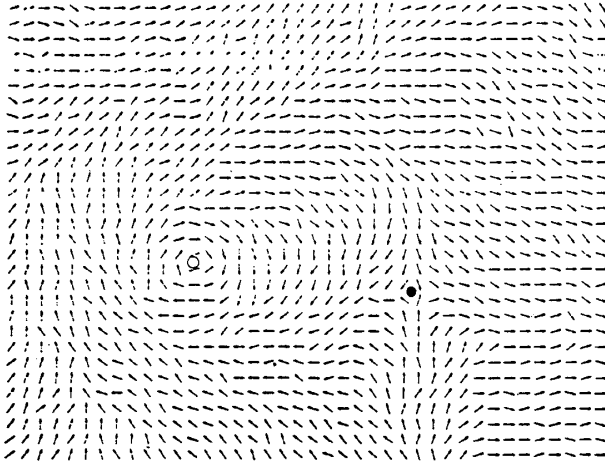


図 12 渦対。高温の乱れた状態から、温度を下げていくと、低温では、大きな渦対が現れる^[12]。これは一つの非一様な秩序パラメタと見ることも出来る

$$\tau = \langle x^2(0) \rangle + \tilde{\epsilon}/\gamma e^{2\gamma t}, \quad (7.5)$$

と表わされる。但し、

$$\tilde{\epsilon} = 2\epsilon \int_0^\infty e^{-\gamma t} S(t) dt \quad (7.6)$$

である^[10]。特に、相関関数 $S(t)$ が、(7.3) のように、指数関数で表わされる場合には、

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\lambda \epsilon}{\lambda + \gamma} = \frac{\epsilon}{1 + \gamma \tau_c}; \quad \tau_c = \lambda^{-1} \quad (7.7)$$

となる。このように、ノイズに相関があるという効果によって、ノイズの強さが実質的に小さくなる ($\tilde{\epsilon} < \epsilon$)。明らかに、 $\tau_c \rightarrow 0$ では、 $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ である。

上の結果は、 ϵ に関して、無限次まで展開して、最強発散項 $\epsilon^n e^{2n\gamma t}$ を全部集めることにより求められる^[10]。これを組織的に実行することが可能である^[10]。

もっと一般の場合にも同様に拡張できる。

8. 非一様な系におけるマルチ・スケールリング則

ここでは、例として非常に簡単な非一様な系を考える。すなわち、非線形拡散系、または、ランダムな力 $\eta(t)$ の入った TDGL 方程式

$$\frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = \gamma \varphi(r, t) + D \nabla^2 \varphi(r, t) - g \varphi^3(r, t) + \eta(r, t), \quad (8.1)$$

を考える。但し、 $\eta(r, t)$ はガウシアンでホワイトなノイズとする：

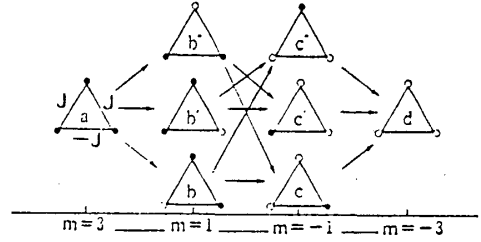


図 13 3 個のスピン系のフラストレーションと縮退の様子^[18]。ハミルトニアンは、 $\mathcal{H} = -J(S_1 S_2 + S_2 S_3 - S_3 S_1)$ と表わされる。但し $S_j = \pm 1$

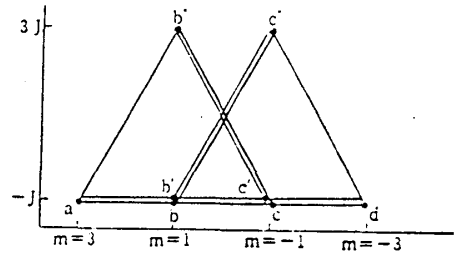


図 14 図 13 の系のエネルギーの変化図^[18]

$$\langle \eta(r, t) \eta(r', t') \rangle = 2\epsilon \delta(t - t') S_n(r - r'). \quad (8.2)$$

今、初期条件として、

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r) = \varphi_0 \delta\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (8.3)$$

または、図 11 のように少し幅を持った初期条件 $\varphi(r)$ を考える。このとき、 $\gamma > 0$ という不安定な条件下では、適当に中間の時間領域を考えると、次のようなマルチ・スケールリング則が、成立することが示せる：

$$\langle \varphi(r, t) \rangle \simeq \langle \varphi \rangle_{st} f^{(sc)} \left(\epsilon e^{2\gamma t}, \varphi_0 e^{\gamma t}, \frac{r^2}{t}, \frac{r_0^2}{t} \right). \quad (8.4)$$

この導出は、久保^[11]の Stochastic Liouville 方程式の方法によって行なわれている^[1]。また、厳密に解けるモデル

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma \phi - g \phi^2 + \xi \cdot \nabla \phi + \eta(r, t) \quad (8.5)$$

で具体的に確かめられている^[1]。但し、 ξ は補助の確率変数で、ガウシアン・ホワイトとする。

具体的な例として、2次元 XY-スピン系の渦対の生成される様子を図 12 に示した。

9. スピングラスの秩序化過程

正負の相互作用を持ったスピン系では、スピングラスと言われる新しい相転移が、転移点以下で現れ

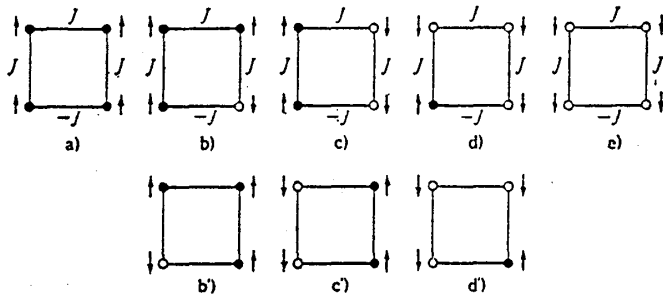


図 15 4 個のスピンの縮退の様子。2⁴=16 個の中で、図の 8 個の配位はすべて縮退した基底状態である^[16]。ハミルトニアンは $\mathcal{H} = -J(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 - S_4S_1)$ と表わされる

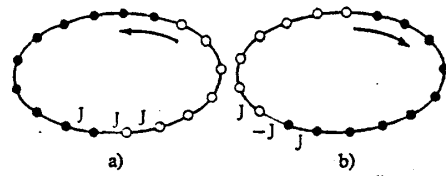


図 16 ボンドが 1 ケ所だけ反強磁性のイジング鎖でのフラストレーションと縮退の様子^[16]

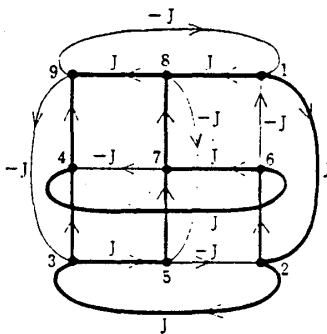


図 17 3×3=9 個のスピンのフラストレーションと等エネルギー経路^[16]

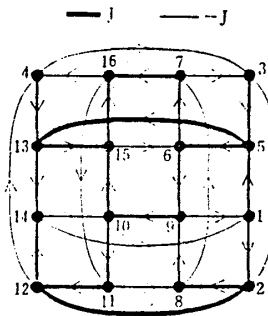


図 18 4×4=16 個のスピンのフラストレーションと等エネルギー経路^[16]

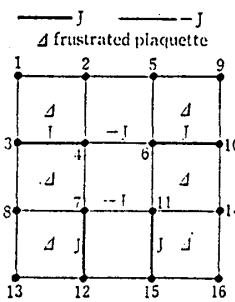


図 19 4×4=16 個のフラストレートしたスピンの系^[16]

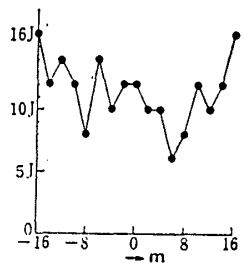


図 20 19 個のエネルギー図^[16]。横軸は、図 19 の番号順にスピンを反転させたときの磁化 m の値を表わす

る^{[13]~[15]}。

この系の特徴は、図 13~図 15 に示されているようにフラストレーションにある。

これは、もっと一般の一次元系に拡張される。図 16 に示したように、上向きスピンと下向きスピンの境界(キルクソリトン)がブラウン運動している状態はすべて縮退した基底状態である。

2 次元でも、図 17 や図 18 に示されているように、数字の番号順にスピンを上向きから下向きに反転させても、すべて、エネルギーは縮退している。即ち、全部上向きのスピン配位と、全部下向きのスピン配位は、等エネルギーの経路(ergodic path)^[16]によって移り得る。このように、フラストレートした系は、一般にエネルギーが縮退しており、基底状態も非常に縮退している。

さて、このようにフラストレートした系のエネルギーは、どのような構造をしているであろうか。再び、簡単な 4×4=16 個の系を考えてみよう。(図 19)。

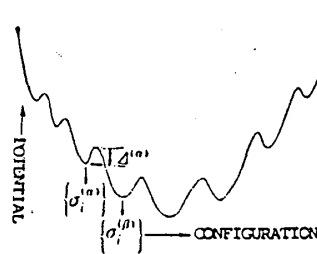


図 21 スピングラスに対する抽象的なポテンシャル図^[16]

図 20 に、そのエネルギーの様子を示した。この方法は、今まで、抽象的に図 21 のようにポテンシャルを書いていたのに対して、具体的に表現する方法を提供するものであり、今後、大いに利用出来るものと期待される。

このように、エネルギーにデコボコ(恐らく無数の極大極小)のある系の秩序化の様子は、もっとも興味ある問題であり、且つ、大変困難な問題である。ここに詳しくエネルギーの様子を書いた理由は、そのエネルギーの様子から、次のような面白い特徴が予想されるからである。すなわち、温度を下げていくと、スピ

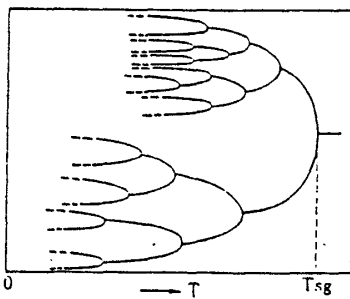


図 22 スピングラスにおける無限の分岐の様子^{[16],[17]}

ングラスはある転移温度 T_{sg} から、順々とエネルギー（自由エネルギー）の低い方に移っていき、無限の分岐を起す^[17]。（図 22 参照）。

さらに、図 20 より、横軸とたて軸を適当に粗視化すると、自己相似な構造になっているものと予想される^[1]。これから、スケーリング則^{[16],[18]}がスピングラスでも成立するものと思われる。

スピングラスの秩序化を時間の関数として表わすことは、上の意味で最も重要な課題の一つであり、我々は、目下研究中である。これは、神経網のモデルとしても役立ちそうである^{[19],[20]}。

10. 秩序の崩壊とフラクタル及びスケーリング

以上、秩序形成の過程を議論してきたが、この逆の過程、秩序の崩壊も興味ある問題である。プラズマにおけるクランプス (Clumps) の寿命の問題はその一例である^{[21],[22]}。やはり、スケーリング理論で扱える^[22]。

参考のために、北極近くでの氷原の崩壊の写真を図 23 に示す。フラクタルな特徴が見える。

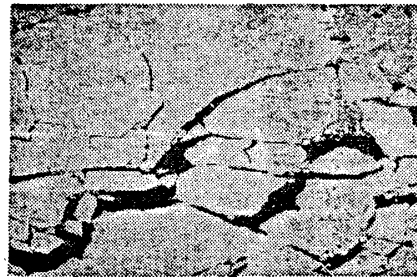


図 23 氷原の崩壊の写真（昭和 60 年 6 月 3 日機内より筆者撮影）

参考文献

- [1] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. Suppl. 79 (1984), 125
- [2] R. Kubo, K. Matsuo, K. Kitahara: J. Stat. Phys. 9 (1973), 51
- [3] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 69 (1983), 65
- [4] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 56 (1976), 77, 477
- [5] M. Suzuki: Adv. Chem. Phys. 46 (1981), 195
- [6] K. Binder and D. Stauffer: Phys. Lett. 33 (1974), 1006
- [7] J. Marro *et al.*: Phys. Rev. B12 (1975), 2000
- [8] H. Furukawa: Phys. Rev. Lett. 43 (1979), 136
- [9] T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki: Phys. Rev. Lett. 49 (1982), 1223
- [10] M. Suzuki, Y. Liu and T. Tsuno: Prog. Theor. Phys.
- [11] R. Kubo: J. Math. Phys. 4 (1963), 174
- [12] S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 60 (1979) 1669
- [13] S.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys.: J. Phys. F: Metal Phys. 6 (1975) 965
- [14] 鈴木増雄, 固体物理 19 (1984) 387, 20 (1985) 31. 及びその中文献
- [15] 小口武彦: スピングラスとは何だろうか (物理学最前線シリーズ 8, 共立, 1985)
- [16] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. Suppl. 80 (1984) 195
- [17] R. G. Palmer: Heidelberg Colloquium on Spin Glasses, Lectures Notes in Physics 192 (1983, Springer-Verlag)
- [18] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 58 (1977) 1151
- [19] J. J. Hopfield: Proc. Natl. Acad. Sci. USA 79 (1982) 2554; 81 (1984) 3088
- [20] D. J. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky: Spin-glass models of neural networks, preprint, W. Kinzel: Learning and Pattern Recognition in Spin Glass Models: Spin Glasses as Model Systems for Neural Networks, preprints, and T. Ikegami and M. Suzuki, in preparation
- [21] T. H. Dupree: Phys. Fluid 15 (1973) 334
- [22] M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. 71 (1984) 267.

第二部 パターン形成の理論¹⁾

ここでは、第一部の一樣な系におけるスケーリング理論が非一樣な系におけるパターン形成の問題にも使えることを示す。周期的パターンがノイズの影響によってどのように形成されるかを見るため、次の Swift-Hohenberg の方程式から始める:²⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = r \varphi(x, t) - g \varphi^3(x, t) - D (\nabla^2 + k_c^2)^2 \varphi(x, t) + \eta(x, t) \quad (1)$$

但し、 $\varphi(x, t)$ は、点 x 、時刻 t における局所的秩序パラメータを表す。

この系の計算機シミュレーションは Greenside and Coughran, Jr.³⁾ によってなされたが、理論解析は、非線型性のため、困難であった。ここで、われわれは、系は、最初は、不安定状態にあるとし ($\varphi(x, 0) \equiv 0$)、その後の時間発展を調べる。ラプラス変換があるため、フーリエ変換して、計算を進めるが、 k -空間では、非線型性が異なる波数間の「カップリング」として現れる。これをうまく処理するためには、非線型定数で展開し、各々の項で、図 I の「ダブル・カンチン近似」を用いて、まとめる(破線は近似)。さらに、各々の項は時間にしたがって、発散するので、これをコンパクトな解にまとめるには、次のような Modify された scaling-limit をとる:

$$sc-lim \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon e^{2\delta t}}{\sqrt{32\pi D k^2 t}} \right) = \text{fixed} \simeq O(1) \quad (2)$$

従来の scaling-limit との違いに注目されたい。この lim では、次の解を得る:

$$\langle \varphi(x_1, t) \varphi(x_2, t) \rangle = \left(\frac{\frac{\varepsilon^2 e^{2\delta t}}{\sqrt{32\pi D k^2 t}}}{1 + \frac{\varepsilon^2 e^{2\delta t}}{\sqrt{32\pi D k^2 t}}} \right) e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{32 D k^2 t}} \cos(k_c(x_1 - x_2)) \quad \left(\begin{array}{l} \langle \xi \rangle = 0 \\ \langle \xi^{2n} \rangle = (2n-1)!! \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^n \end{array} \right) \quad (3)$$

時間が小さい時は、非線型項を無視し、さらに、図 II のカント・オフ近似を使うと、次の解が得られる:

$$\langle \varphi(x_1, t) \varphi(x_2, t) \rangle = \frac{\varepsilon}{\delta} (e^{2\delta t} - 1) \frac{e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{32 D k^2 t}}}{(2\pi^4 D t)^{1/4}} \quad (t \text{ 小}) \quad (4)$$

上の結果から、次の秩序形成時間(オーダー・パラメタが E 視的になる時間)とドメイン形成時間(周期パターンを含んだ「ドメイン」が現れる時間)が得られる:

$$t_0 = \frac{1}{2\delta} \log \left(\frac{\delta^2 \sqrt{32\pi D k^2}}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{4\delta} \log \left(\frac{1}{2\delta} \log \left(\frac{\delta^2 \sqrt{32\pi D k^2}}{\varepsilon} \right) \right) \quad (5)$$

$$t_D = \frac{1}{2 D k^2} \quad (6)$$

図 III, IV, V では、相関関数の生長と、その空間拡散を現わす。

- 1) Y. Liu and M. Suzuki, to be submitted to Phys. Rev. A.
- 2) J. Swift and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. A **15** (1977) 319.
- 3) H. S. Greenside and W. M. Coughran, Jr. Phys. Rev. A **30** (1984) 398.

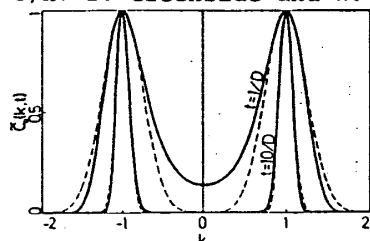


図 I

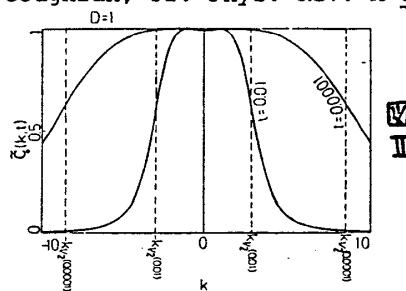


図 II

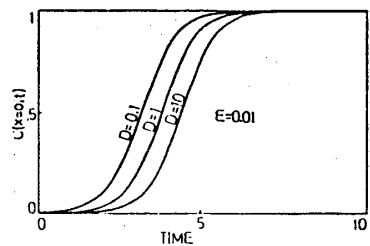


図 III

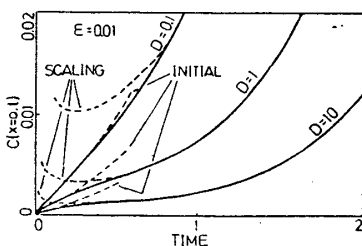


図 IV

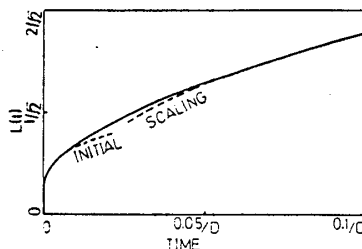


図 V