

二つの冪有界作用素に関する平均エルゴード定理

千葉大学理学部 渚 勝 (Masaru Nagisa)

木更津高専 和田 州平 (Shuheï Wada)

1. 序. ヒルベルト空間上の作用素の冪乗について、応用上
有用な結果が知られている. 特に、ユニタリ作用素の冪乗が作
る列の平均極限について述べたフォンノイマンの平均エルゴ
ード定理 [2] は重要で、数多くの応用、拡張が知られている. F.
Riesz [3] はフォンノイマンの平均エルゴード定理を冪有界作用
素にまで一般化した.

定理 A. A をヒルベルト空間上の冪有界作用素とする.
このとき算術平均列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n A^k$ は $PA = AP = P = P^2$ と
なる作用素 P に強収束する.

本稿では、定理 A の拡張および、その応用について述べる.

補題. A と B をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の冪有界作用素

とする。この時、

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i (I - B)$$

はノルム位相で0に収束する。

証明. 作用素の列 $\{R_k\}$ を以下のように定義する。

$$R_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i \quad (k = 1, 2, \dots).$$

このとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i (I - B) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k (I - B) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (R_k - R_{k+1}) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} R_{k+1} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} A^{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} (R_0 - R_{n+1}) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} R_{k+1} \\ & \quad + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} A^{k+1}. \end{aligned}$$

$\{R_k\}$ と $\{A^k\}$ は有界列だから列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} R_{k+1}$ と、

列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} A^{k+1}$ は ノルム位相で 0 に収束する。

(証明終)

2. 定理Aの拡張. 下記定理1は定理Aの2変数拡張に相当する. 証明の前半はF. Riesz [3] に拠る.

定理1. A と B をヒルベルト空間上の冪有界作用素とする. 射影作用素 P_A と P_B を、列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n A^k$ と $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n B^k$ の強収束極限とする. このとき、任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i x = P_A P_B x.$$

証明. 補題で用いた記号 R_n をここでも使用する. 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して、列 x_n を次のように定義する. $x_n = B^n x$. ここで、空間 $\{x_n - x_{n+1} | n = 0, 1, 2, \dots\}$ と直交するベクトル y に対して $\langle x_n | y \rangle = \langle x_{n+1} | y \rangle = \langle x | y \rangle$. 定理Aより

$$\langle x | y \rangle = \left\langle \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k | y \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k | y \right\rangle = \langle P_A x | y \rangle.$$

故に、 $\langle P_A x - x | y \rangle = 0$, 即ち、ベクトル $P_A x - x$ は $\{x_n - x_{n+1} | n = 0, 1, 2, \dots\}$ で生成された閉部分空間に含まれる. 今、任意の $\epsilon > 0$, に対し、適当に正の整数 r を選べば、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k (P_B x - x) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k \sum_{i=0}^r c_i (x_i - x_{i+1}) \right\| + M\epsilon \\ & = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k \sum_{i=0}^r c_i (I - B)x_i \right\| + M\epsilon \\ & \leq \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k (I - B) \right\| \sum_{i=0}^r |c_i| \|x_i\| + M\epsilon. \end{aligned}$$

ここで、補題より、列 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n R_k (P_B x - Bx)$ は、ノルム位相で 0 に収束する. さらに

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n R_k P_B x = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} P_B x \rightarrow P_A P_B x.$$

となるため、 $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n R_k \rightarrow P_A P_B$.

(証明終)

3. 応用. $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ が強収束するならば、任意の

$x \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i x = P_A P_B x,$$

となることは、定理1より明らかである。従って、定理1の直接の結果として以下の定理が得られる。

定理2. A と B はユニタリ作用素とする。もし、列 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ が強収束すれば、以下の条件(*)が成立する。

$$(*) \quad F P_A E = F P_B E = F E \text{ or } F A E \neq F B E,$$

ここで、 F , E はそれぞれ A , B と可換な射影作用素とする。

証明. $F A E = F B E$ と仮定する。1変数の平均エルゴード定理より

$$\begin{aligned} F P_A E &= \lim_{n \rightarrow \infty} F \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n A^k E \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n B^k E \\ &= F P_B E. \end{aligned}$$

また、定理 1 より、

$$\begin{aligned}
 \|FP_B^\perp E\| &= \|A^k FP_B^\perp E\| \\
 &= \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k A^k FP_B^\perp E \right\| \\
 &= \left\| F \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i P_B^\perp E \right\| \\
 &= \|FP_A P_B P_B^\perp E\| = 0.
 \end{aligned}$$

(証明終)

$AB = BA$ の時、もしくは $\dim(\mathcal{H}) < +\infty$ の時は、上の条件 (*) は、列 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ が強収束する為の必要十分条件になる。

定理 3. A と B を可換なユニタリ作用素とする。この時 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ が強収束する事と、以下の条件は必要十分である。

$$P_A P_B = P_{A^{-1}B}.$$

証明. $(\rightarrow) F = I, E = P_{A^{-1}B}$ とする。ここで、定理 2

より、 $FP_AE = FP_BE = FE$ となる。即ち、 $P_AP_B = P_{A^{-1}B}$ が成立する。(←) 以下の式は容易に得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i P_{A^{-1}B} &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i P_A P_B \\ &= P_A P_B. \end{aligned}$$

また、平均エルゴード定理から

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i P_{A^{-1}B}^\perp \right\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (A^{-1}B)^i P_{A^{-1}B}^\perp \right\| \\ &= \|P_{A^{-1}B} P_{A^{-1}B}^\perp\| = 0, \end{aligned}$$

となる。上の2つの結果から $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ は強収束することが分かる。

(証明終)

定理4. A と B を有限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素とする。 A の固有値 λ と B の固有値 μ に対し、 F_λ と E_μ をそれぞれの固有空間への射影作用素とする。この時、 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ が強収束することと以下の条件は必要十分である。

$$\delta_{\lambda,1} \delta_{1,\mu} F_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda,\mu} F_\lambda E_\mu,$$

ここで、 δ は Kronecker のデルタとする.

証明. $(\rightarrow) \lambda = \mu$ とする. 定理 2 より

$$\delta_{\lambda,1} F_{\lambda} E_{\mu} = \delta_{1,\mu} F_{\lambda} E_{\mu} = F_{\lambda} E_{\mu} = \delta_{\lambda,\mu} F_{\lambda} E_{\mu}.$$

故に、

$$\delta_{\lambda,1} \delta_{1,\mu} F_{\lambda} E_{\mu} = \delta_{1,\mu}^2 F_{\lambda} E_{\mu} = \delta_{1,\mu} F_{\lambda} E_{\mu} = \delta_{\lambda,\mu} F_{\lambda} E_{\mu}.$$

$(\leftarrow)$ 作用素 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ は以下のように書くことができる.

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i = \sum_{\lambda, \mu} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mu^i F_{\lambda} E_{\mu}.$$

定理 3 より、 $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mu^i F_{\lambda} E_{\mu}$ は各 λ, μ に対して収束する.

故に $\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i$ も強収束する.

(証明終)

定理 1 の他の応用として以下の定理が考えられる.

定理 5. ヒルベルト空間上の冪有界作用素 A と B が次の条件を満たすとする

$$d = \sup_k \left\| I - \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i \right\| < 1.$$

この時 $A = B = I$ となる.

証明. 定理 1 で定義した記号 P_A, P_B, R_k をここでも使用する. 仮定から以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned}
 \|I - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n R_k\| &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (I - A^{k-i} B^i) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (I - A^{k-i} B^i) \right\| \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left\| I - \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k A^{k-i} B^i \right\| \\
 &\leq d < 1.
 \end{aligned}$$

ここで定理 1 から

$$\|I - P_A P_B\| \leq d < 1.$$

従って $P_A P_B$ は可逆であることが分かる. さらに定理 A から

$$(I - A)P_A = 0, \quad P_B(I - B) = (I - B)P_B = 0,$$

となる. 故に

$$(I - A)P_A P_B = 0, \quad P_A P_B(I - B) = 0.$$

$P_A P_B$ は可逆だから、 $A = B = I$ が分かる.

(証明終)

系. ヒルベルト空間上の作用素 A が以下の条件を満たすとする.

$$d = \sup_n \|I - A^n\| < 1,$$

このとき $A = I$.

上記系は C o x の定理として知られている [1].

参考文献

- [1] R.H.Cox, Matrices all whose powers lie close to the identity, Amer. Math. Monthly, 73(1966),813.
- [2] J.von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, Proc. N.A.S.18 (1932) 70-82.
- [3] F.Riesz, Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. 13(1938), 274-278.