

## Remarks on weakly separable extensions

岡山大学・大学院自然科学研究科 山中 聡 (Satoshi YAMANAKA)  
Graduate School of Natural Science and Technology  
Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科 池畑 秀一 (Shûichi IKEHATA)  
Graduate School of Natural Science and Technology  
Okayama University

### Abstract

[2]において、浜口直樹と中島惇により弱分離拡大が導入された。また [14] において、第一筆者は非可換上の歪多項式環における弱分離多項式について、とくに微分型歪多項式環  $B[X; D]$  における  $p$ -多項式が弱分離的であるための必要十分条件を与えた。本論文ではこの結果を  $B[X; D]$  における一般のモニク多項式の場合や、一般の歪多項式環  $B[X; \rho, D]$  の場合に拡張することを目指す。

## 1 序と準備

$A/B$  を (単位元を共有する) 環拡大,  $M$  を 両側  $A$ -加群とする. 加法的な写像  $\delta : A \rightarrow M$  が  $B$ -微分 ( $B$ -derivation) であるとは,  $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$  ( $x, y \in A$ ) かつ  $\delta(b) = 0$  ( $b \in B$ ) が成り立つときにいう. さらに, ある適当な  $m \in M$  により  $\delta(x) = mx - xm$  ( $x \in A$ ) となるとき,  $\delta$  は内部的 (inner) であるという.

環拡大  $A/B$  が分離的 (separable) であるとは,  $x \otimes y \mapsto xy$  ( $x, y \in A$ ) により定まる  $A \otimes_B A$  から  $A$  への  $A$ - $A$ -準同型が分裂 (split) するときにいう. 良く知られているように,  $A/B$  が分離拡大であることと, 任意の両側  $A$ -加群  $M$  について,  $A$  から  $M$  への  $B$ -微分はすべて内部的であることは同値である. この一般化として, [2] において浜口直樹と中島惇は次の定義を与えた.

**定義 1.1.** ([2, Definition 2.1]) 環拡大  $A/B$  が弱分離的 (weakly separable) であるとは,  $A$  から  $A$  への  $B$ -微分がすべて内部的であるときにいう.

本論分を通して  $B$  を単位元をもつ環,  $\rho$  を  $B$  の自己同型,  $D$  を  $\rho$ -微分 (すなわち  $D$  は  $B$  の加法的な写像で  $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta) + \alpha D(\beta)$  ( $\alpha, \beta \in B$ ) をみたす),  $B[X; \rho, D]$  をその乗法が  $\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$  ( $\alpha \in B$ ) により定まる歪多項式環とする. とくに,  $B[X; \rho] = B[X; \rho, 0]$  (自己同型型),  $B[X; D] = B[X; 1, D]$  (微分型) と表す. また,  $B[X; \rho, D]_{(0)}$  を  $B[X; \rho, D]$  におけるモニク多項式  $g$  で  $gB[X; \rho, D] = B[X; \rho, D]g$  をみたすものの全体とする.  $f \in B[X; \rho, D]_{(0)}$  が  $B[X; \rho, D]$  における分離多項式 (resp.

弱分離多項式) であるとは,  $B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$  が  $B$  上分離的 (resp. 弱分離的) であるときにいう. 歪多項式環における分離多項式は岸本量夫, 永原賢, 宮下庸一, および第二筆者により幅広く研究されてきた (参考文献参照).

[14] において, 第一筆者は  $B[X; \rho]$  および  $B[X; D]$  それぞれにおける弱分離多項式を特徴付け, それにより分離多項式と弱分離多項式の差異を示した. とくに,  $B[X; D]$  における  $p$ -多項式  $f = \sum_{j=0}^e X^p b_{j+1} + b_0$  ( $b_{e+1} = 1$ ) が弱分離多項式になるための必要十分条件を与えた (cf. [14, Theorem 3.8]). 第二章ではこの結果を一般のモニク多項式の場合に拡張する. さらに, 第三章では一般の歪多項式環  $B[X; \rho, D]$  における多項式が弱分離的であるための必要十分条件を与える.

以降, 本論分では次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} B^\rho &= \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}, \quad B^D = \{\alpha \in B \mid D(\alpha) = 0\}, \quad B^{\rho, D} = B^\rho \cap B^D \\ f &= X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; \rho, D]_{(0)} \cap B^\rho[X] \\ A &= B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D], \quad x = X + fB[X; \rho, D] \in A \\ V &= \{z \in A \mid \alpha z = z\alpha \ (\alpha \in B)\} \quad (A \text{ における } B \text{ の centralizer}) \\ J_\rho &= \{z \in A \mid \alpha z = z\rho(\alpha) \ (\alpha \in B)\} \end{aligned}$$

また,  $\tilde{\rho}$  および  $\tilde{D}$  をそれぞれ  $\rho, D$  の自然な拡張として得られる  $A$  の自己同型および (内部) 微分とする. すなわち, 任意の  $\sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \in A$  について

$$\tilde{\rho} \left( \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \right) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j \rho(c_j), \quad \tilde{D} \left( \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \right) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j D(c_j)$$

と定める. さらに,

$$V^{\tilde{\rho}} = \{v \in V \mid \tilde{\rho}(v) = v\}, \quad V^{\tilde{D}} = \{v \in V \mid \tilde{D}(v) = 0\}, \quad V^{\tilde{\rho}, \tilde{D}} = V^{\tilde{\rho}} \cap V^{\tilde{D}}$$

とおく.

## 2 $B[X; D]$ における弱分離性

本章では  $f = \sum_{j=0}^m X^j a_j \in B[X; D]_{(0)}$  ( $a_m = 1$ ) の弱分離性について調べる. まず [4, Lemma 1.5] より

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \ a_i \in B^D \\ (2) \ a_i \alpha = \sum_{j=i}^m \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha) a_j \end{array} \right. \quad (\alpha \in B, \ 0 \leq i \leq m-1)$$

であることに注意する. また, 本章では以下で定まる  $V^{\bar{D}}\text{-}V^{\bar{D}}$ -準同型  $\tau: V \rightarrow V^{\bar{D}}$  を扱う:

$$\tau(h) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{j=i}^{m-1} \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-1}(h) a_{j+1} \quad (h \in V).$$

初めに  $A$  の  $B$ -微分に関する次の補題を示す.

**補題 2.1.**  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  について,  $\delta(x) \in V$  かつ  $\tau(\delta(x)) = 0$  が成り立つ. 逆に  $\tau(g) = 0$  をみたす  $g \in V$  について,  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = g$  となるものが存在する.

**証明.**  $\delta$  を  $A$  の  $B$ -微分とする. このとき, 任意の  $\alpha \in B$  について  $\alpha\delta(x) = \delta(x)\alpha$  となることは明らかである. また, 帰納的に  $\delta(x^j) = \sum_{i=0}^{j-1} x^i \binom{j}{i} \tilde{D}^{j-1-i}(\delta(x))$  ( $j \geq 1$ ) が成り立つこと (cf. [14, Lemma 3.6]) から, 次を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\left(\sum_{j=0}^m x^j a_j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \delta(x^{j+1}) a_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^j x^i \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(\delta(x)) a_{j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{j=i}^{m-1} i \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(\delta(x)) a_{j+1} \\ &= \tau(\delta(x)) \end{aligned}$$

逆に  $g = g_0 + fB[X; D] \in V$  ( $g_0 \in B[X; D]$ ) が  $\tau(g) = 0$  をみたすとする. このとき, 任意の  $\alpha \in B$  について  $\alpha g_0 = g_0 \alpha$  となるから,  $B[X; D]$  の  $B$ -微分  $\delta^*$  で  $\delta^*(X) = g_0$  となるものが存在する.  $\tau(g) = 0$  より  $\delta^*(f) \in fB[X; D]$ , すなわち  $\delta^*(fB[X; D]) \subset fB[X; D]$  が成り立つので,  $\delta^*$  の自然な拡張として  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = g$  となるものが存在する.  $\square$

補題 2.1 により,  $B[X; D]$  における弱分離多項式は次のように特徴付けられる.

**定理 2.2.**  $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; D]_{(0)}$  とする. このとき,  $f$  が  $B[X; D]$  における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V).$$

証明. まず, 任意の  $h \in A$  について

$$\begin{aligned} a_i h &= h a_i + \sum_{j=i+1}^m \binom{j}{i} \tilde{D}^{j-i}(h) a_j \\ &= h a_i + \sum_{j=i}^{m-1} \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i+1}(h) a_{j+1} \end{aligned}$$

であることより, 常に  $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} \supset \tilde{D}(V)$  が成り立つことに注意しておく.

$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V)$  を仮定し,  $\delta$  を  $A$  の  $B$ -微分とする. このとき, 補題 2.1 より  $\delta(x) \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$  であるから, 仮定より適当な  $h \in V$  により  $\delta(x) = \tilde{D}(h) = hx - xh$  と表される. これより, 任意の  $w \in A$  について  $\delta(w) = hw - wh$  であることは容易に確かめられる. すなわち  $\delta$  は内部的であり, したがって  $f$  は  $B[X; D]$  における弱分離多項式である.

逆に  $f$  が  $B[X; D]$  における弱分離多項式である仮定し,  $p \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$  とする. このとき, 補題 2.1 より  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = p$  となるものが存在する. 仮定より  $\delta$  は内部的であるから, 適当な  $h \in V$  により  $p = \delta(x) = hx - xh = \tilde{D}(h) \in \tilde{D}(V)$  となる.  $\square$

定理 2.2 は次のように言い換えることができる.

**定理 2.3.**  $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; D]_{(0)}$  とする. このとき,  $f$  が  $B[X; D]$  における弱分離多項式であるための必要十分条件は,  $V^{\tilde{D}} \cdot V^{\tilde{D}}$ -準同型からなる次の列が完全系列となることである:

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}}.$$

**注意 1.**  $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; D]_{(0)}$  が  $B[X; D]$  における分離多項式であるための必要十分条件は, 定理 2.3 における完全系列の右端に 0 を付け加えたもの, すなわち,

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}} \longrightarrow 0$$

が完全系列となることが予想される. 実際,  $B$  が素数標数  $p$  で  $f = \sum_{j=0}^e X^{p^j} b_{j+1} + b_0$  ( $b_{e+1} = 1$ ) の場合, この主張は正しい (cf. [14, Theorem 3.10]).

### 3 $B[X; \rho, D]$ における弱分離性

本章では  $\rho D = D\rho$  を仮定し,  $f = \sum_{j=0}^m X^j a_j \in B[X; \rho, D]_{(0)} \cap B^\rho[X]$  ( $a_m = 1$ ) の弱分離性について調べる. まず  $f \in B^\rho[X]$  および [4, Lemma 1.1] より  $Xf = fX$  だから, これより  $a_i \in B^D$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) がわかる. さらに [4, Lemma 1.2] より

$$a_i \alpha = \sum_{j=i}^m \binom{j}{i} \rho^i D^{j-i}(\alpha) a_j \quad (\alpha \in B)$$

であるから,  $a_i \in C(B^{\rho, D})$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) となることに注意する. ここで  $C(B^{\rho, D})$  は  $B^{\rho, D}$  の中心を意味する. また, 本章では以下で定まる  $V^{\tilde{D}}\text{-}V^{\tilde{D}}$ -準同型  $\tau: A \rightarrow A$  を扱う:

$$\tau(h) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j \sum_{k=j}^{m-1} \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^i(h) \right) a_{j+1} \quad (h \in A).$$

まず  $A$  の  $B$ -微分に関する 2 つの補題を示す.

**補題 3.1.**  $\delta$  が  $A$  の  $B$ -微分ならば,

$$\delta(x^k) = \sum_{j=0}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-1-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) \quad (k \geq 1).$$

**証明.** 帰納法で示す. まず  $k=1$  のときは明らかに成り立つ. 補題 3.1 の等式が成り立つとき,

$$\begin{aligned} \delta(x^{k+1}) &= \delta(x^k)x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-1-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) x + x^k\delta(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} x^{j+1} \tilde{D}^{k-1-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^{i+1}(\delta(x)) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) + x^k\delta(x) \\ &= x^k \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\rho}^{i+1}(\delta(x)) + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^{i+1}(\delta(x)) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) + \tilde{D}^k(\delta(x)) + x^k\delta(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^k \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\rho}^{i+1}(\delta(x)) + \delta(x) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=1}^j \binom{i+k-j-1}{i-1} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) + \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j-1}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) \\
&\quad + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\
&= x^k \sum_{i=0}^k \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=1}^j \left\{ \binom{i+k-j-1}{i-1} + \binom{i+k-j-1}{i} \right\} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) + \delta(x) \right) \\
&\quad + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\
&= x^k \sum_{i=0}^k \tilde{\rho}^i(\delta(x)) + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=1}^j \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) + \delta(x) \right) + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\
&= \sum_{j=0}^k x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right)
\end{aligned}$$

よって,  $k+1$  のときも成り立つ. □

**補題 3.2.**  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  について,  $\delta(x) \in J_\rho$  かつ  $\tau(\delta(x)) = 0$  が成り立つ. 逆に  $\tau(g) = 0$  をみたす  $g \in J_\rho$  について,  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = g$  となるものが存在する.

**証明.**  $\delta$  を  $A$  の  $B$ -微分とする. このとき, 任意の  $\alpha \in B$  について明らかに  $\alpha\delta(x) = \delta(x)\rho(\alpha)$  である. また, 補題 3.1 から次を得る.

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\left(\sum_{k=0}^m x^k a_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(x^{k+1}) a_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^i(\delta(x)) \right) a_{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} x^j \sum_{k=j}^{m-1} \tilde{D}^{k-j} \left( \sum_{i=0}^j \binom{i+k-j}{i} \tilde{\rho}^i(h) \right) a_{j+1} \\
&= \tau(\delta(x))
\end{aligned}$$

逆に  $g = g_0 + fB[X; \rho, D] \in J_\rho$  ( $g_0 \in B[X; \rho, D]$ ) が  $\tau(g) = 0$  をみたすとする. このとき, 任意の  $\alpha \in B$  について  $\alpha g_0 = g_0 \rho(\alpha)$  となることより,  $B[X; \rho, D]$  の  $B$ -微分  $\delta^*$  で  $\delta^*(X) = g_0$  となるものが存在する.  $\tau(g) = 0$  より  $\delta^*(f) \in fB[X; \rho, D]$ , すなわち  $\delta^*(fB[X; \rho, D]) \subset fB[X; \rho, D]$  が成り立つので,  $\delta^*$  の自然な拡張として  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = g$  となるものが存在する.  $\square$

$B[X; \rho, D]$  における弱分離多項式は次のように特徴付けられる.

**定理 3.3.**  $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; \rho, D]_{(0)}$  とする. このとき,  $f$  が  $B[X; \rho, D]$  における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in J_\rho \mid \tau(g) = 0\} \subset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) + \tilde{D}(h) \mid h \in V\}.$$

**証明.**  $\{g \in J_\rho \mid \tau(g) = 0\} \subset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) + \tilde{D}(h) \mid h \in V\}$  を仮定し,  $\delta$  を  $A$  の  $B$ -微分とする. このとき, 補題 3.2 より  $\delta(x) \in \{g \in J_\rho \mid \tau(g) = 0\}$  であるから, 仮定より適当な  $h \in V$  により  $\delta(x) = x(\tilde{\rho}(h) - h) + \tilde{D}(h) = hx - xh$  と表される. これより, 任意の  $w \in A$  について  $\delta(w) = hw - wh$  であることは容易に確かめられる. すなわち  $\delta$  は内部的であり, したがって  $f$  は  $B[X; \rho, D]$  における弱分離多項式である.

逆に  $f$  が  $B[X; \rho, D]$  における弱分離多項式である仮定し,  $p \in \{g \in J_\rho \mid \tau(g) = 0\}$  とする. このとき, 補題 2.1 より  $A$  の  $B$ -微分  $\delta$  で  $\delta(x) = p$  となるものが存在する. 仮定より  $\delta$  は内部的であるから, 適当な  $h \in V$  により  $p = \delta(x) = hx - xh = x(\tilde{\rho}(h) - h) + \tilde{D}(h)$  と表される.  $\square$

**注意 2.** 定理 2.3 のように, 一般の歪多項式環  $B[X; \rho, D]$  の場合もある種の完全系列の存在によって弱分離性を特徴付けることができると予想される.

## 参考文献

- [1] S. Elliger, Über automorphismen und derivationen von ringen, *J. Reine Angew. Math.*, **277** 1975, 155–177.
- [2] N. Hamaguchi and A. Nakajima, On generalizations of separable polynomials over rings, *Hokkaido Math. J.*, **42** 2013, no. 1, 53–68.
- [3] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 360–373.
- [4] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **22** 1980, 115–129.

- [5] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **23** 1981, 19–32.
- [6] S. Ikehata, A note on separable polynomials of derivation type, *Int. J. Algebra*, **3** no.15, 2009, 707–711.
- [7] S. Ikehata, On separable and  $H$ -separable polynomials of degree  $p$  in skew polynomial rings, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **51** no. 1, 2009, 129–156.
- [8] K. Kishimoto, On abelian extensions of rings. I, *Math. J. Okayama Univ.*, **14** 1970, 159–174.
- [9] Y. Miyashita, On a skew polynomial ring, *J. Math. Soc. Japan*, **31** 1979, no. 2, 317–330.
- [10] T. Nagahara, On separable polynomials over a commutative ring II, *Math. J. Okayama Univ.*, **15** 1972, 149–162.
- [11] T. Nagahara, On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **19** 1976, 65–95.
- [12] K. Sugano, Separable extensions and Frobenius extensions, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 29–40.
- [13] S. Yamanaka and S. Ikehata, An alternative proof of Miyasita’s theorem in a skew polynomial rings, *Int. J. Algebra*, **21** 2012, 1011–1023.
- [14] S. Yamanaka, On weakly separable polynomials and weakly quasi-separable polynomials over rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **58** 2016, Vol. 58, pp.175–188.

E-mail address : s-yamanaka@math.okayama-u.ac.jp

E-mail address : ikehata@ems.okayama-u.ac.jp