

Plane algebraic curve について

京大・数理研 中 野 茂 男

§ 1 複素射影空間

§ 2 既約な平面曲線

§ 3 可約な代数曲線, Cycle

§ 4 Dual curve

§ 5 Non-singular model

§ 6 Plücker の公式

瀬藤の講演 "Regge と Barucchi の Landan 曲線の研究について" のための preliminary として, plane algebraic curve についての解説を試みる。(特に数学者でない方々のために) 考えの筋道を説明するのを主眼とし, 精密な議論には立入らない。

§ 1 複素射影空間

1° 定義: d 次元複素射影空間とは

$$\mathbb{P}^d \equiv \mathbb{C}_{d+1} - (0) / (\sim).$$

右辺は $(d+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}_{d+1}$ から原点 0 を除いた残りにおいて, 同値関係 $\sim$ を $(\zeta_0, \dots, \zeta_d) \sim (\eta_0, \dots, \eta_d) \Leftrightarrow \eta_\alpha = \lambda \zeta_\alpha \text{ for } \lambda \neq 0$ によつて定義し, これによる同値類の集合をあらわす。

2° $\mathbb{P}^d$ の点は連比 $\zeta_0 : \dots : \zeta_d$ で与えられる。 $(\zeta_0, \dots, \zeta_d)$ をこの点の斉次座標という。

3° $\zeta_\alpha \neq 0$ であるような $(\mathbb{P}^d)$ の部分を U_d とすると, U_d の点をあらわすには $(\zeta_0 / \zeta_\alpha, \dots, 1, \dots, \zeta_d / \zeta_\alpha)$ をその座標とすることができる。これによつて U_α は n 次元アフィン空間 $\mathbb{C}_d$ と同一視できる。 $\mathbb{P}^d = \bigcup_{\alpha=0}^d U_\alpha$ であつて, $\mathbb{P}^d$ は $d+1$ 個のアフィン空間

を適当に重ねて張り合わせたものとみてよい。 U_α での座標 $(x_\alpha^0, \dots, x_\alpha^d)$ [$x_\alpha^d=1$ は欠けている。この座標を非斉次座標という] が、 $x_\alpha^0 = \zeta_0 / \zeta_\alpha$ などとして与えられていることから、 $U_\alpha \cap U_\beta$ での座標変換がどうなるかは明らかである。

4° $\mathbb{P}_d$ はコンパクトである。一つのアフィン空間 $\mathbb{C}_d$ とその座標 $(x^1, \dots, x^d)$ $x^\alpha = \zeta_\alpha / \zeta_0$ から出発すれば、 $\mathbb{P}_d$ とは $\mathbb{C}_d$ に無限遠平面 $\zeta_0=0$ をつけ加えてコンパクト化したものとみることができる。 $\mathbb{P}_d$ 内のどの平面を無限遠平面とみるか (即ちどんな非斉次座標をとるか) は、注目する問題によりいろいろである。

5° $d=2$ のときが射影平面 $\mathbb{P}_2$ である。以下このときを主にしている。 $\mathbb{P}_2$ 内の直線 $\mathbb{L}$ とは斉次座標 (ζ) に関する一次同次方程式 $\sum_{\alpha=0}^2 u_\alpha \zeta_\alpha = 0$ をみたす点全体の集合で、これ自身が1次元射影空間をなす。 $\mathbb{P}_2$ の直線 $\mathbb{L}$ は $\mathbb{L}$ の方程式の係数 (u_0, u_1, u_2) で定まる。しかも u の連比が問題になるだけである。それ故 $\mathbb{P}_2$ 内の直線 $\mathbb{L}$ の全体は別の射影平面 $\mathbb{P}_2^*$ の点と一対一に対応する。 $\mathbb{P}_2^*$ を $\mathbb{P}_2$ に双対的な平面という。

6° $\mathbb{P}_2^*$ に双対的な平面はもとの $\mathbb{P}_2$ である。その関係はつぎのようにしてわかる。 : $\mathbb{P}_2$ 内の二点 $(u), (v)$ をむすぶ直線 $\mathbb{L}^*$ は [1次元射影空間の点 $(\lambda : \mu)$ をパラメーターとして $(\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha)$ によつてあたえられる。この点はもとの $\mathbb{P}_2$ 内では $\lambda(\sum_\alpha u_\alpha \zeta_\alpha) + \mu(\sum_\alpha v_\alpha \zeta_\alpha) = 0$ なる直線 $\mathbb{L}$ を定めているが、この式は $\mathbb{L}$ か、 $\mathbb{L}_u, \mathbb{L}_v$ (それぞれ u, v が定める $\mathbb{P}_2$ 内の直線) の交点 p を通ることを意味する。即ち $\mathbb{L}^* \ni \omega \leftrightarrow \mathbb{L}_\omega$ は p を通る直線、この関係によつて $\mathbb{L}^*$ が p に対応する。

§2 既約な平面曲線

1° $\mathbb{P}_2$ の斉次座標を $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ とするとき、 (ζ) に関する既約な斉次多項式 $F(\zeta)$ の零点の集合 Γ を $\mathbb{P}_2$ 内の既約な代数曲線という。 [$F(\zeta)=0$ なら $F(\lambda\zeta)=0$ であるから、 F の零点を $\mathbb{P}_2$ の点と考えることができる。]

$U_0 \cong \mathbb{C}_2$ 内で非斉次座標 (x, y) , $x = \zeta_1 / \zeta_0$ $y = \zeta_2 / \zeta_0$ を考えると $\Gamma_0 = \Gamma \cap U_0$ はアフィン空間内の代数曲線で、 $f(x, y) \equiv F(1, x, y) = 0$ によつて定められる。 Γ は $\mathbb{P}_2$ 内での Γ_0 の閉包である。 F が既約であるから f も既約である。

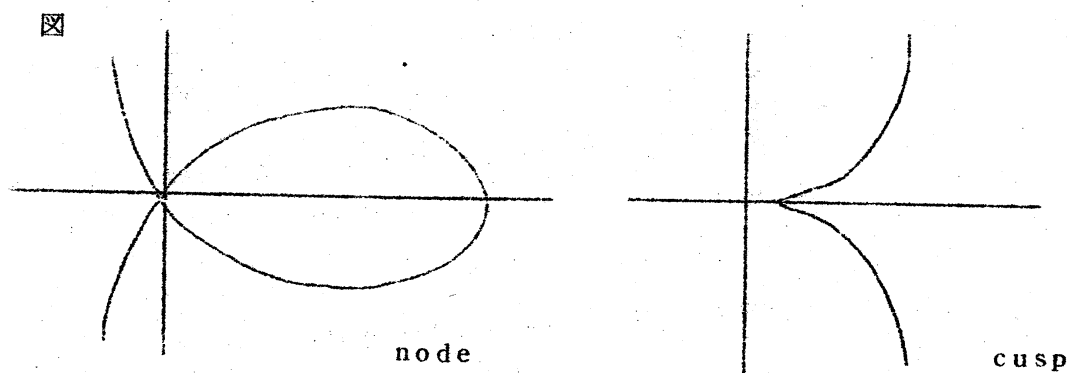
2° Γ の点 P が Γ の単点であるとは、 P をふくむ U_α における非斉次座標 (x, y) についてかいた Γ の方程式 $f=0$ に関して $f_x(p), f_y(p)$ のどちらかが0でないことである。この時 P における Γ の接線は $f_x(X-x) + f_y(Y-y) = 0$ で与えられる。これは斉次座標に関しては $F\zeta_0 \cdot Z_0 + F\zeta_1 \cdot Z_1 + F\zeta_2 \cdot Z_2 = 0$ ((Z) が流通座標) で与えられる。 P が

無限遠平面上にあるような非斉次座標に関しては、接線は（ p に対応する方向の）漸近線として現れる。

3° p が単点でないとき、 p は Γ の特異点（又は重複点）であるという。 p を原点とするような非斉次座標について Γ の方程式は、

$$f(x, y) = f(0) + (xf_x(0) + yf_y(0)) \\ + \frac{1}{2}(x^2 \cdot f_{xx}(0) + 2xy \cdot f_{xy}(0) + y^2 f_{yy}(0)) \\ + \dots\dots\dots$$

とかけるが、 p が重複点なら右辺第一項、第二項は0である。 x, y について r 次の項が始めて恒等的に0でないとき p は r 重点であるという。 p が2重点のとき、 $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ ならば p の近傍で Γ は二つの分枝からなり、それらの接線は一致しない。この時 p は通常の節点（ordinary node）であるという。今一つの代表的な重複点は尖点（cusp）である。これは $y^2 - x^3 = 0$ における原点のような特異点で、 $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ のときにおこり、適当な座標変換ののち、パラメータ t を使つて $x = t^2, y = t^3 + \dots\dots\dots$ とあらわされる点の特異性を意味する。



4° P_2 から P'_2 への写像 Q を、斉次座標 $(\zeta), (\eta)$ に関してつぎのように定義する：
 $\eta_0 = \zeta_1 \zeta_2, \eta_1 = \zeta_2 \zeta_0, \eta_2 = \zeta_0 \zeta_1$ これを2次変換という。（この言葉は代数幾何学ではもつと広い意味にも使われる） Q は本来の意味の写像ではなく P_2 の点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ には P'_2 の直線 $\eta_0 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ が対応する。一方、 P_2 の直線 $\zeta_0 = 0, \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0$ は P'_2 の点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ に写される。その他の点では Q は一対一である。〔実は一般の点 P で $Q(p)$ が一意的にきまり、 p を $(1, 0, 0)$ に近づけると、近づける方向——それらの方向の全体は射影

直線をなす。—— ごとに $Q(p)$ の極限点が定まつてその全体が $\eta_0 = 0$ をなすのである。]

P_2 内で同一直線上にない任意の三点をとつて、それらが $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ になるような斉次座標をとることができる。従つて任意の点を“広げる”ことができる。与えられた曲線の特異点を広げるような 2 次変換を行うと、“特異性の程度”を下げるができる。その結果

定理 既約な平面曲線 Γ は、その平面に何回かの 2 次変換を行うことにより、ordinary singularities のみをもつ曲線に変換しうる。

新曲線と旧曲線の間では、任意の一方の座標が他方のその有理函数となる。それで両者は双有理的に同値であるという。

(もつと一般な、平面→平面の双有理変換で、nodes だけでもできる)

§ 3 可約な代数曲線, Cycle

1° 斉次座標に関して可約な斉次多項式 $F(\zeta)$ があるとき、 $F(\zeta)$ の零点の集合は、 $F(\zeta)$ の既約因数の零点 Γ_i ($i=1, \dots, r$; これらは既約曲線である) の和集合である。それで Γ を可約な代数曲線という。

以上は点集合としての Γ を考えたのである。それにしても実は抜穴があつて、 $G(\zeta)$ が既約なとき $F(\zeta) = G(\zeta)^2$ とおけば F のきめる可約曲線は、 G のきめる既約曲線と、点集合としては同一である。それ故上の定義では“既約または可約な”代数曲線を定義したことになる。

2° 有限個の既約曲線 Γ_i の、整係数による形式的な一次結合、 $\Gamma = \sum a_i \Gamma_i$ を (射影平面上の、代数的な) cycle という。

位相幾何学における cycle の特別の場合になつている。 Γ_i の既約方程式が $F_i = 0$ であるとき、 $F = \prod F_i^{a_i} = 0$ を Γ の方程式という。こうすれば cycle とその方程式との間には、 F に 0 でない定数をかけることを除けば、一対一の対応がつく。cycle とは、その既約成分に重複度をつけて考えた可約曲線であるといつてよい。これからは係数 a_i が負でないような cycle のことを可約曲線とよぶことにする。既約曲線も可約曲線の一種となる。

(負の係数をも考えると、cycle の全体が形式的な加法により群をなすので都合なのである。)

3° 既約曲線 Γ と、 Γ に対し一軽の位置にある直線との交点の数を Γ の次数 (degree) という。これは Γ の方程式の次数にひとしい。これに対し、一般の位置にある点から Γ にひいた接線の数を Γ の級の数 (class) という。交点や接線を適当な重複度で数えれば、

degree, class は任意の直線と Γ との交点の数, 任意の点からの Γ への接線の数となる。

可約曲線 $\sum a_i \Gamma_i$ の次数は $\sum a_i \cdot \deg(\Gamma_i)$ だと定めると, つぎの定理がなりたつ。

Bezout の定理 可約な平面曲線 Γ_1, Γ_2 の次数が n_1, n_2 , であるとき, Γ_1 と Γ_2 との交点は (適当な重複度で数えれば) ちょうど $n_1 \cdot n_2$ 個ある。

このように重複度というものを考えるのが代数幾何学の特徴だが, その正確な定義は難しい。

§4 Dual curve

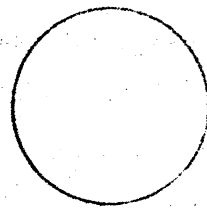
1° P_2 内の既約な曲線 Γ が方程式 $F(\zeta) = 0$ で与えられているとする。 Γ の単点 (x) での接線を考えると, これは dual plane P_2^* の点をあらわす。その点は $(u_0 : u_1 : u_2) = (F_{\zeta_0}(x) : F_{\zeta_1}(x) : F_{\zeta_2}(x))$ で与えられる。これによつて Γ から P_2^* 内への (解析的な) 写像 Φ が定まり, $\Phi(\Gamma) = \Gamma'$ は P_2^* 内の既約代数曲線になる。これを Γ に dual な曲線という。もつとも Γ が直線のときは別で, この時は $\Phi(\Gamma)$ は一点になつてしまう。以下この場合は除く。 Γ の一部分 (重複点の近くの一分枝でもよい) が, 一つのパラメータ t によつて $\zeta = \zeta(t)$ とかけると, その Φ -image は $u = u(t) = (\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\zeta(t)))$ とかける。 u が接線をあらわす条件は $\sum_i \zeta_i' F_{\zeta_i} = 0$ であり, 一方斉次多項式に関するオイラーの定理により, $\sum_i \zeta_i F_{\zeta_i} = nF = 0$ 。これは $\sum_i \zeta_i(t) \cdot u_i(t) = 0$ を意味する。これを微分して前の関係を参照すれば $\sum_i \zeta_i u_i' = 0$ が与えられる。これは Γ' の dual が Γ に他ならないことを意味する。

即ち, dual curve という関係は (Γ が直線であるときを除いて) 双互的であり, Φ により Γ と Γ' とは双有理的に同値である。

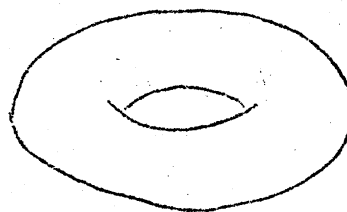
2° P_2 と P_2^* との双対関係 (§1.5°, 6°) を考えると, degree Γ の class とは $\Phi(\Gamma)$ の degree に他ならないことがわかる。前項の双対性によつて, $\Phi(\Gamma)$ の class は Γ の degree に等しい。今 Γ とともに $\Phi(\Gamma)$ も node と cusp 以外の特異点をもたないとする。 $\Phi(\Gamma)$ の node では二つの相異なる分枝に相異なる接線がひける。これを Γ の話に移せば, $\Phi(\Gamma)$ の node は Γ の相異なる二点で接する直線即ち Γ の bitangent に対応していることがわかる。同様に $\Phi(\Gamma)$ の cusp は Γ の一点で 2 重に接する接線に対応する。あるいは Γ の変曲点に対応するといつてもよい。それ故 Γ の degree を n , class を m , nodes の数を δ , cusps の数を k , bitangents の数を τ , 変曲点の数を i で表わし, $\Gamma' = \Phi(\Gamma)$ のそれらを' をつけて表わせば, $n = m'$, $m = n'$, $\delta = \tau'$, $k = i'$, $\tau = \delta'$, $i = k'$ となる。

§5 Non-singular model

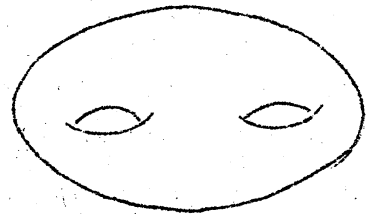
1° 既約な平面曲線 Γ に対して、平面内にこれと双有理的に同値なものを求める限り、
 §3. 4° の定理以上には出られない。しかし高次元の射影空間内には Γ と双有理的に同値で
 重複点を全くもたないもの $\tilde{\Gamma}$ が存在する。しかも $\tilde{\Gamma}$ は本質的には唯一つである。即ちこのよ
 うなものが二つあれば、(もとの Γ との双有理的対応を通じて) 両者は例外点なしに一対一の双
 有理的対応をなす。 P_d 内の、重複点のない既約代数曲線 $\tilde{\Gamma}$ とは、斉次座標に関するいくつか
 の斉次式の共通零点の集合であり、その任意の点 x_0 の近くで非斉次座標のうちの 하나가独立
 変数、他のものがその正則函数としてあらわされ、($\tilde{\Gamma}$ の方程式がそのようにとけること。
 このときその座標を local parameter という) かつ全体として連結なものである。こ
 のような図形は位相幾何学の立場からは、方向づけのできる閉曲面に他ならないので、(複素
 1次元は実2次元である!) その様子はよく知れている。即ち $\tilde{\Gamma}$ は P 個の穴をもつ浮輪の面
 ($P=0, 1, 2, \dots$ のどれか) と位相同型である。
 P は $\tilde{\Gamma}$ に対して (従つて Γ に対して) 決まつている値である。 P を Γ の genus という。



$p=0$ (球面)



$p=1$ (円環面)



$p=2$

2° $\tilde{\Gamma}$ 上に有限個の開集合 $\{V_j\}$ をとり、 $\bigcup_j V_j = \tilde{\Gamma}$ 、しかも V_j 上では一つの非斉次座
 標 x_j が local parameter であるようにする。(非斉次座標 x_j を考えるとき、無限
 遠平面として、 $\zeta_0=0, \dots, \zeta_d=0$ のうちのどれをとつているかは、 j によつて変るで
 あらう。) V_j 上で定義された x_j の有理型函数 $\varphi_j(x_j)$ があつて $P \in V_j \cap V_k$ のとき
 $\varphi_j(x_j(P)) = \varphi_k(x_k(P)) \frac{dx_k}{dx_j}(P)$ がなりたつならば、表式 $\varphi_j(x_j) \cdot dx_j$ は j に
 無関係で $\tilde{\Gamma}$ 全体で定まつた “あるもの” を決めている。これを $\tilde{\Gamma}$ 上の有理型微分という。特に
 各々の $f_j(x_j)$ が V_j で正則ならば、この微分は第1種であるという。第1種微分同志を加
 え、または第1種微分に定数をかけることの意味は明らかであらう。これにより $\tilde{\Gamma}$ 上の第1種
 微分の全体 g は複素係数のベクトル空間をなす。これに関しつぎの定理がなりたつ。

定理 g は P 次元のベクトル空間である。

3° 第1種微分を $\varphi(x)dx$ とかくとき、 $\varphi(x)$ は実は $\tilde{\Gamma}$ 上の有理函数である。(証略、 $\tilde{\Gamma}$ 上の有理函数とは $\tilde{\Gamma}$ の点の非斉次座標の有理函数なること。)従つてこれは Γ の点の非斉次座標に関して代数的にあらわすことができる。以下 Γ は node, cusp 以外に重複点をもたないとして論ずる。 P_2 の一組の非斉次座標 $x = \zeta_1/\zeta_0$, $y = \zeta_2/\zeta_0$ に関して Γ の方程式が $f(x, y) = 0$ であつたとする。(無限遠直線 $\zeta_0 = 0$ 上には Γ の重複点はないようにしておく。)このとき f_x が恒等的に0でなければ、 $f_x \neq 0$ となるような Γ 上の任意の点の近傍で x が local parameter である。それ故 $\tilde{\Gamma}$ 上の有理型微分は $\varphi = \frac{p(x, y)}{f_y(x, y)} dx$ の形にかけが、ここで φ が第1種であるための必要十分条件は

(1) $P(x, y)$ が x, y の多項式でその次数 $\leq n-3$

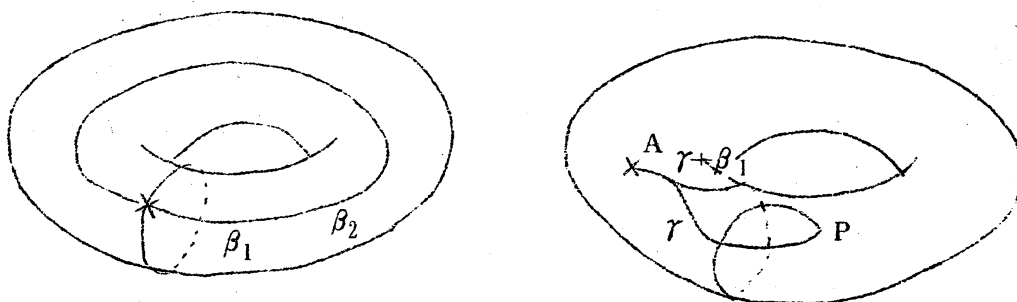
(n は Γ の次数即ち f の次数)

(2) $P(x, y)$ は Γ の重複点で0となる。

であることが示される。 x, y に関する $\leq n-3$ 次の多項式で一次独立なもの数は $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ であるから、 g の次元 p に対し $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k$ なる関係がえられる。これが genus formula である。

4° 微分、特に第1種微分 $\varphi = \varphi(x) \cdot dx$ を $\tilde{\Gamma}$ 上の(実の)曲線 r 上で積分するということは、定まつた意味をもつ。即ち曲線 r が実のパラメータ λ によつて $P = P(\lambda)$ ($\alpha \leq \lambda \leq \beta$) と与えられ、これを local parameter $x = x(P)$ に関して $x = x(\lambda)$ とかくとき、 $x(\lambda)$ が連続、有限個の(λ の)値を除いて $\frac{dx}{d\lambda}$ も連続で、例外点の所では左右からの極限值が有限確定だとすると、表式 $\varphi(x(\lambda)) \cdot \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda$ は local parameter のとり方に無関係であり、 $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x(\lambda)) \cdot \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$ は r をあらわすパラメータ λ のとり方にもよらない。これを $\int_r \varphi$ とかき、 r にそつての φ の積分という。Cauchy の積分定理により、 r が $\tilde{\Gamma}$ の部分 Δ の境界 $\partial \Delta$ であるときは、 $\int_r \varphi = 0$ である。それで、 r の始点を固定し終点 P を動点と考へて、 $\int_r \varphi$ を P の函数 $u(P)$ とみると、 $u(P)$ は局所的には P の正則函数で、 $\frac{du}{dx} = \varphi(x)$ となる。このような函数を $\tilde{\Gamma}$ 上の Abel 積分という。局所的にはというのは、 $u(P)$ が $\tilde{\Gamma}$ 全体での一価函数ではないからで、 β が2次元部分の境界になりえない閉曲線であるとき、 P が β に沿つて一周してもとの位置にもどるとき、 $u(P)$ には定数 $\omega = \int_{\beta} \varphi$ が加わる。

$p=1$ のときはこのような r' の基本的なものが二つあつて、同一点 P に対する u の値は $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ (m_1, m_2 は整数) だけ不定である。逆に $\tilde{\Gamma}$ 上で一価な有理型函数($\tilde{\Gamma}$ の点の非斉次座標の有理函数)は u の二重週期函数即ち楕円函数としてあらわされる。実際、この場



合 $\tilde{\Gamma}$ は複素平面 $\mathcal{C}(u \text{ の平面})$ 上で u と $u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ ($m_1 m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)とを同一視してえられた空間なのである。

§ 6 Plücker の公式

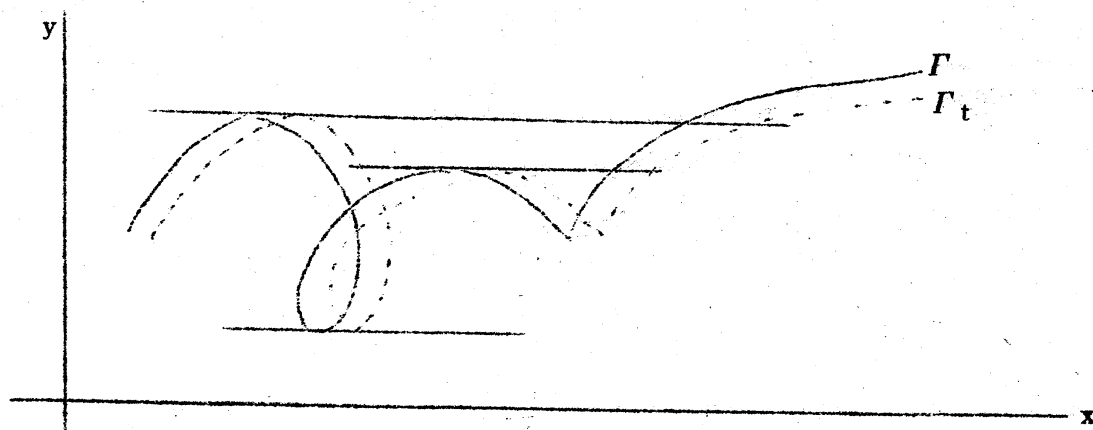
1° 再び既約な平面曲線 Γ にもどる。 Γ とそのdual Γ' がともにnode と cusp 以外の重複点をもたないとする。この場合つぎの関係が成立する ; (n =次数, m =class, δ =node の数, k =cusps の数, τ =bitangents の数, i =変曲点の数, すべて曲線 Γ についていう。)

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3k, \quad n = m(m-1) - 2\tau - 3i$$

$$k = 3m(m-2) - 6\tau - 8i, \quad i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k$$

これらをPlücker の公式という。dual curve を考えれば、右側の式は左側の式の結果であることがすぐ判る。

2° m を与える式の説明を試みよう。 Γ に対し一般の位置にある点 P_0 をとり、これを $(0:1:0)$ とするような斉次座標をそる。そして $x = \zeta_1 / \zeta_0$, $y = \zeta_2 / \zeta_0$ を考えると、 P_0 は x 軸方向の無限遠点となり、 P_0 からひいた接線とは x 軸に平行な接線のことになる。そこで Γ を x 軸に平行に t だけずらせて Γ_t とする。Bezout の定理により Γ と Γ_t とは n^2 個の交点をもつが、その中 n 個は Γ と無限遠直線との交点である。(非斉次座標に関する平行移動では直線の方法が変らない。従つてその方向の無限遠点が変わらない。) つぎに x 軸に平行な k 個の接線の接点に対し $t \rightarrow 0$ のときこれらに近づくような k 個の交点が存在する。 $t \rightarrow 0$ のとき各々のnodeの所では2つずつの交点がこれに近づき、cusp の所では3つずつの交点近づき。(図から大体判る、cusp の所は判り難いが、cusp は α なるnodeのloopが小さくなつた極限とみると、尤もらしく思える。正確な議論はややこしい)



従つて、 $n^2 = n + m + 2\delta + 3k$ となり求める関係がえられる。

3° Γ の方程式を $F(\zeta) = 0$ とし、その次数 n は ≥ 2 とする。点 (a) を Γ の単点、 (b) を P_2 の一点とすると、

$$(*) \quad F(s \cdot a + t \cdot b) = F(a) \cdot s^n + \sum_j F_j(a) b_j s^{n-1} t + \frac{1}{2} \sum_{ij} F_{ij}(a) \cdot b_i b_j s^{n-2} t^2 + \dots, \text{ここに } F_i = \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}, F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \text{ であり } \sum_j \text{は } \sum_{j=0}^2 \text{ である。}(a) \text{ における}$$

Γ の接線 L は $\sum F_j(a) \zeta_j = 0$ で与えられる。 $\sum F_{ij}(a) \zeta_i \zeta_j = 0$ なる 2 次曲線を Q とかく。一方 $H(\zeta) = \det(F_{ij}(\zeta))$ とおく。 $H(\zeta)$ は (a) に無関係で ζ につき $3(n-2)$ 次式である。 (a) が Γ の変曲点 $\Leftrightarrow (a)$ は Γ の単点で、 $H(\zeta) = 0$ 上にある。

を証明する。実際 (a) が変曲点なら (a) は Γ の単点であり、 b が接線 L 上にある限り（即ち $\sum_j F_j(a) b_j = 0$ である限り） $(*)$ で t^2 の項がきえる。これは Q が直線 L をふくむことを意味するから、 Q の係数の行列式 $H(a)$ が 0 となる。逆に $F(a) = 0, H(a) = 0$ と

する。 $F(a) = 0$ から（斉次式に関する Euler の定理により） $\sum_j F_j(a) a_j = 0$,

$\sum_{ij} F_{ij}(a) a_i a_j = 0$, 従つて L も Q も (a) を通る。さらに (a) での Q の接線は

$\sum_{ij} F_{ij}(a) a_i x_j = 0$ 即ち $\sum F_j(a) \cdot x_j = 0$ となり、これは L に他ならぬ。 $H(a) = 0$ は

Q が二直線に分解していることを示すから、 $L \subset Q$ となり、 $\sum_j F_j(a) b_j = 0$ なら必ず

$\sum_{ij} F_{ij}(a) a_i b_j = 0$, これは (a) が変曲点となることを示す。

Bézout の定理により、 Γ と $H(\zeta) = 0$ との交点は $3n(n-2)$ 個あるが、その中変曲点が i 個、他の交点は Γ の重複点からおこる。各々の node は 6 個、cusp は 8 個の交点をもたらすことがいえるので、 $i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k$ が与えられる。node についてだけ少し詳しくやってみよう。

$(1, 0, 0)$ が node であるとする。 $x = \zeta_1 / \zeta_0, y = \zeta_2 / \zeta_0$ とおき、話を非斉次

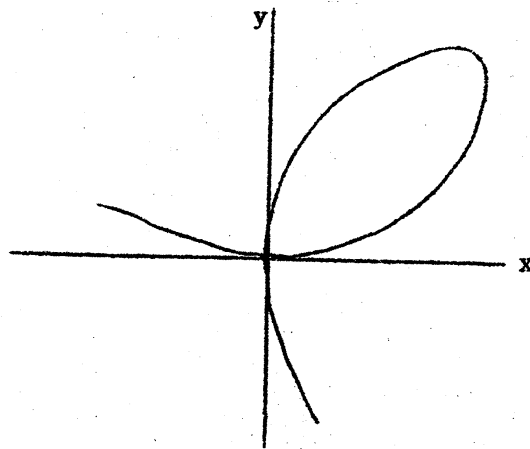
座標にうつす。Euler の恒等式により、

$$\begin{cases} \zeta_0 F_0 = nF - \zeta_1 F_1 - \zeta_2 F_2 \\ \zeta_0 F_{0i} = (n-1)F_i - \zeta_1 F_{1i} - \zeta_2 F_{2i} \end{cases}$$

$$\therefore H(\zeta) = \begin{vmatrix} n & F & F_1 & F_2 \\ n-1 & F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \times \frac{(n-1)^2}{\zeta_0^2}$$

そうすると $f(x, y) = F(1, x, y)$ に移つてもよい。即ち $H(\zeta) = 0$ は、 (x, y) については

$$h(x, y) \equiv \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1}f & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 0$$



となる。 x, y の適当な一次変換により、

$$f(x, y) = xy + g(x, y),$$

$$g(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + (\text{4次以上の項})$$

とかける。それで Γ は原点の所で2つの枝をもつ。 x 軸に接する枝は、 $x = t, y = t^2 + \dots$

とあらわれるはずである。(必要なら y に定数をかける)これを代入して $f \equiv 0$ となるのだから、

$1 + \alpha = 0$ がえられる。そうすると

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1 = (1 + 3\alpha) \cdot t^2 + \dots, & f_2 = t + \dots \\ f_{11} = 6\alpha t + \dots, & f_{12} = 1 + \dots \\ f_{22} = 6\gamma \cdot t + \dots \end{array} \right.$$

となるため、 $h(x(t), y(t)) = 2t^3 + \dots$ となる。このことは、 x 軸に接する Γ の分枝が、原点において $h=0$ と 3 重の交点をもつことを示す。今一つの分枝からも 3 重の交点が出てくるのである。

4° § 2. 4° で述べた定理の証明の状態を詳しくみれば、 Γ がどんな型の重複点をもつときにも、それをいくつの nodes いくつの cusps と数えれば、Plücker の公式が適用できるか判るはずだが、ここではとても触れられない。

文献 : R. J. Walker 著 Algebraic Curves

Princeton Univ. Press 1950, Dover Publications
1962.