

§ 4 あと一言

上述の結果は数値解析であるので、解析的研究が今後望まれる。(1)式で1階微分項 $\rho^2 d\phi/dz$ が存在しない場合には積分が(5)式に加えもう一つ知られており体系は可積分となる⁴⁾。今の場合には、ソリトン格子解の不安定化が認められており、不可積分であると考えられる。また、様々な実在の体系に適用するのも今後の課題である⁵⁾。

文 献

- 1) M. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 622.
- 2) P. G. de Gennes, Solid State Commun. **6** (1968), 163.
W. L. McMillan, Phys. Rev. **B14** (1976), 1496.
- 3) M. B. Walker and A. E. Jacobs, Phys. Rev. **B24** (1981), 6770.
P. Prelovsek, J. Phys. **C15** (1982), L269.
M. Yamashita and O. Tamada, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985), 2963.
- 4) J. Hietarinta, Phys. Lett. **96A** (1983), 273.
- 5) M. Yamashita, Jpn. J. Appl. Phys. (第6回強誘電体国際会議(1985年8月於神戸)プロシーディング)。

Statics and Dynamics of Kink Solutions

東大・理 伊藤浩之, 田崎晴明

§ 0. Introduction

Multi-component の order parameter を持つ非線形な系のモデルとして、一次元非線形 Klein-Gordon 方程式に従う N 成分スカラー場を考え、そこでのキंक解の static, dynamic な性質を調べることにする。

§ 1. Static Kink solutions

キंक解とは、場の local ポテンシャル $V(\phi)$ の縮退した ground state を空間変化を持つてつなぐ有限の励起エネルギーを持つ解であり、具体的には、configuration energy $E(\phi)$ [下式] の変分における極値点として定義される。

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} |\phi_x|^2 + V(\phi) \right], \quad \phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in \mathbf{R}^N.$$

ところで、上式は x を“時間”だと読み替えれば、ポテンシャル V の下での N 自由度質点力学系の Action になっていることは、良く知られている。つまり、Field Model でのキंक解は、ポテンシャル V の不安定な fixed point をつなぐ質点の運動の trajectory として理解できる。この“力学系”対応を考えれば、Field Model は、static なキंक解に関して、対応する“力学系”が“可積分”な場合と“非可積分”な場合に分類される (Field Model の意味での可積分、非可積分性と混同の無いように)。前者の場合には“力学系”が解けるので、すべてのキंक解を求めることができる。例としては、一自由度“力学系”に対応する一成分系 ($N=1$)、(sine-Gordon, ϕ^4 など) の他にも、二成分非等方 $|\phi|^4$ モデル (Ref. 1) などがある。後者のモデルでは、二種類のトポロジカルキंक解と one parameter family のノントポロジカルキंक解が存在する。

§ 2 Phase stability

求められた static なキंक解の phase stability は、Euler-Lagrange 方程式をキंकまわりの small deviation について線形化し、線形モードに対する固有値問題を解いて、負の固有値を持つ不安定振動モードの存在の有無を調べるというのがスタンダードな方法になっている。しかし、この計算は、多成分の場を扱う場合などには、ほとんど困難になってしまう。

ところで、static なキंक解は、もともと configuration energy $E(\phi)$ の functional としての極値点として求まるという変分的立場に戻れば、極値点における $E(\phi)$ の 2nd variational derivative $\frac{\delta^2 E}{\delta \phi^2}$ の負の固有値の数 (モース指標) が、キंक解に対する独立な不安定振動モードの数に一致することが分かる。変分学におけるモースの指標定理を用いることで、この負の固有値の数はキंक trajectory とこれに無限小近い trajectories との intersection number を使って計算することのできる常に有限の量であることがわかる (詳しくは Ref. 2)。

ゆえに対応する“力学系”が“可積分”である場合には、すべての trajectories の flow を知ることができるのでキंक解の安定性は簡単に調べられる。例えば、一成分スカラー場においては、“力学系”のターニング・ポイントが intersection point になっていることから、トポロジカルキंकは安定であるが、ノントポロジカルキंकは、常に一つの不安定モードを持つことが示せる。二成分の非等方 $|\phi|^4$ モデルにおいては、この stability theory を用いることで、安定な解は一種類のトポロジカルキंकだけであり、もう一種のトポロジカルキंकとすべてのノントポロジカルキंकは不安定であることが始めて解析的に示される (Ref. 2)。

§ 3. Dynamical properties of Kink solutions

実際の field dynamics では時間と空間の構造が問題になる複雑な世界であるが、ここでは、実際に Euler-Lagrange 方程式を numerical に解いていくつかのキंक解の dynamical な性質を調べてみる。具体的には、一成分系のノントポロジカルキंकの decay や、二成分非等方 $|\phi|^4$ モデルでの不安定なトポロジカルキंक解の安定な解への decay について行なった。これらの例では、configuration energy functional $E(\phi)$ の saddle point である不安定キंक解が、不安定モードに従って local minimum である別の解へ decay し、余分なエネルギーは、放出されるフォノンモードへ移されるという simple な dynamics を示す。

ところが、後者のモデルでの one parameter family である不安定なノントポロジカルキंक族の decay に関しては、すべてが同じエネルギーを持っているにもかかわらず decay の process は多様であり、wave packet を放出して burst したり、非常に damping の弱いキंक・アンチキंक bound state である breather like な振動解に移っていったりする。このような複雑な dynamics を示す原因としては、ノントポロジカルであるという topological な原因の他に、キंक間の相互作用が大きく関与していると考えられる。

§ 4. Further problems (主観的見地から)

Field model として可積分な場合には、無限自由度としての力学系の時間と空間に関する構造が無数個の保存量によって完全に決定してしまう。また、今回示したように static キंकの性質は、対応する“力学系”が“可積分”である場合には、有限自由度の質点の運動と対応して完全に決定される。では、ほとんどのモデルの属する非可積分かつ“非可積分”である系のキंक解の static, dynamic な性質はどのようになっているのだろうか。この場合、ground state をつなぐどのようなキंक解が存在するのかという問題すらこれを解く systematic な方法は無い。それ故、energy functional $E(\phi)$ の極値点(キंक解)の個数などを解析できる大域的な理論(Nonlinear Analysis)の研究が課題の一つとして残されていると思われる。

また、非可積分系において、キंकやそれらの間の相互作用によって生みだされる非線形性の顕著な複雑さを、系を無限自由度力学系としてとらえた時に、キंकの統計性と合わせてどのように理解して行けるのだろうか。これらの系に普遍的なキंकの担う役割というものが存在するのだろうか。モデルの数だけ(つまり無数に)、多様な複雑さが存在するといった荒涼とした世界である可能性もある。

References

- 1) E. Magyari and H. Thomas: Phys. Lett. **100A** (1984) 11;
H. Ito: Phys. Lett. **112A** (1985) 119.
- 2) H. Ito and H. Tasaki: Phys. Lett. **113A** (1985) 179.

電圧の反転に対して対称な電気回路におけるソリトンの実験

横浜国大・工 石渡信吾, 渡辺慎介, 田中 裕

1. はじめに

戸田格子に等価な非線形 LC 梯子形回路として非線形キャパシタに可変容量ダイオードを用いた Fig. 1. a のような電気回路がある。この回路では正の電圧振幅をもつパルスは安定に伝播することができるが、負の電圧パルスは回路を安定に伝播することができない。そこで Fig 1. b のように可変容量ダイオードを2個逆向きにつないでキャパシタとした回路を考える。この回路では負のパルスに対して下側のダイオードがうまく働いて、正負のパルスが安定に伝播できることが予想される。実際、このような回路で実験を行ったところ正負のパルスが安定に伝播することが確かめられた。今回はこの回路における二、三の実験結果について報告する。

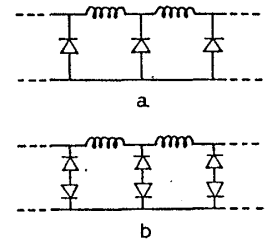
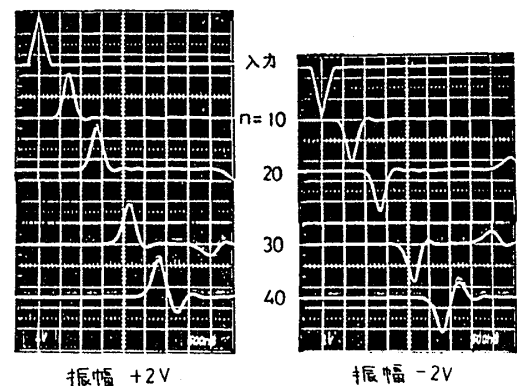


Fig. 1

2. 実験とその結果

まず Fig 1. b の回路の左端からパルスを入力したときの正負の電圧パルスの伝播の様子を Fig. 2 に示す。(i)は振幅+2Vの正のパルス, (ii)は振幅-2Vの負のパルスの場合である。尚 $n=20$ 段以降右側に現われる小さな波形は回路の右端での反射波である。このように正負しかも対称な形のパルスが安定に伝播することがわかる。



(i) パルスの伝播 (ii)

Fig. 2

次に正のパルスについて、パルスの振幅と伝播速度及び幅（時間的幅）との関係をそれぞれ Fig. 3, 4 に示す。また Fig. 5 はキャパシタに用いたペアのダイオードの容量特性である。特性は正負の電圧に対して対称であり、ここでは正の側のみ示す。これを見ると電圧と容量の逆数の関係は0～5Vの範囲で直線を示している。