

Regular Irreducible Characters of Hyperspecial Compact Groups

宮城教育大学 高瀬 幸一

Koichi Takase

Miyagi University of Education

1 イントロダクション

1.1 動機

非アルキメデスの局所体 F の整数環を O とし, O の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{p} = \varpi O$ とする. $\mathbb{F} = O/\mathfrak{p}$ は有限体である. $\text{ch } \mathbb{F} \neq 2$ と仮定する.

F 上定義された連結簡約線形代数群 G が F 上半分裂 (即ち G の Borel 部分群が F 上定義される) かつ不分岐 (即ち G は F の不分岐拡大上で分裂する) のとき, O 上の滑らかな群スキーム G があって $G \otimes_O F = G$ かつ $G \otimes_O \mathbb{F}$ が連結簡約代数群となる. このとき局所コンパクト群 $G(F) = G(F)$ ($G(F)$ は G の F -値点のなす群, 以下同様) の開コンパクト部分群 $G(O)$ は $G(F)$ のハイパースペシャル・コンパクト部分群と呼ばれる (J.Tits ; P.S.P.M. vol.33, Part 1). 典型的な例として, $GL_n(F)$ における $GL_n(O)$, 或いは $Sp_{2n}(F)$ における $Sp_{2n}(O)$ などが挙げられる.

さて局所コンパクト群 $G(F)$ 上の調和解析を考える上でコンパクト群 $G(O)$ の既約ユニタリ表現を調べることは意味のあることであろう. ところで群スキーム G が滑らかであることと Hensel の補題から, 任意の $r > 0$ に対して自然な群準同型写像 $G(O) \rightarrow G(O/\mathfrak{p}^r)$ は全射となるが, $G(O)$ の既約ユニタリ表現 π は適当な $r > 0$ に対して $G(O) \rightarrow G(O/\mathfrak{p}^r)$ の核で自明となるから, 結局 π は有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の有限次元既約表現を経由する. 従って我々の問題は, 全ての $r > 0$ に対して有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現を求めることに帰着する.

$r = 1$ の時には, 問題は有限簡約群 $G(\mathbb{F})$ の表現論となり, $GL_n(\mathbb{F})$ の既約指標を決定した J.A.Green (Trans. Amer. Math. Soc. 80, 1955) に始まり, 決定的な P.Deligne, G.Lusztig (Ann. of Math. 103, 1976) を経て既に数多くの成果が報告されている. 一方 $r > 1$ の場合の有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の表現論については, あまり詳しい事は知られていない. 実際, 専門家の間では GL_n に関してですら $n \geq 4$ の場合は "wild problem" であると思われる

(A.Stasinski ; Comm. in Alg. 37 (2009), p.4417). そこで特殊な群, 或いは特殊な既約表現の系列について詳しい研究がなされてきた. 幾つかの例を挙げると

- 1) A.J.Shalika (Thesis, 1966) では $G = SL_2$ の場合に $G(O/p^r)$ ($r > 1$) の全ての既約表現が決定された,
- 2) A.J.Silberger (L.N. in Math. vol.166, 1970) は同様の問題を $G = PGL_2$ の場合に解決した. 一方
- 3) T.Shintani (J. Math.Soc. Jpn. vol.20, 1968) とやや遅れて P.Gérardin (Sém. Delange-Pisot-Poitou, 14, 1972/73) は $G = GL_n$ の場合に $G(O/p^r)$ ($r > 1$) の尖点的既約表現を構成し, $G(F)$ の二乗可積分または超尖点的既約表現を構成した.

さて G.Hill は一連の論文 (Comm.Algebra 21 (1993), 402-447; Manuscripta Math. 82 (1994), 293-311; Comm. Algebra 23 (1995), 7-25; J. Algebra 174 (1995), 610-635) で $G = GL_n$ の場合を系統的に研究した. 特に最後の論文により所謂 “split regular character” は完全に決定されたと思われていたが, 最近 [18] により, その証明は半単純な “split regular character” に対してのみ機能することが指摘され, この問題を攻略する新たな方法が提案された. その方法は, 上記論文の続編 [19] により一般のハイパースペシャル・コンパクト群に対して有効であることが示された. 本稿ではそれらの概要を報告したい.

1.2 Clifford の方法

ここで本稿の議論の基礎となる Clifford の方法 (或いは Clifford 理論) について必要な事をまとめておく.

有限群 G の正規部分群 $N \triangleleft G$ と N の既約表現 ψ をとる. ψ の $g \in G$ に共役 ψ^g を $\psi^g(n) = \psi(gng^{-1})$ ($n \in N$) により定義すると

$$G_\psi = \{g \in G \mid \psi^g \simeq \psi\}$$

は G の部分群である. G の既約表現の同値類全体を $\text{Irr}(G)$ と書き

$$\text{Irr}(G \mid \psi) = \{\pi \in \text{Irr}(G) \mid \langle \psi, \pi \rangle_N > 0\}$$

とおく. ここで $\langle \psi, \pi \rangle_N = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_N(\psi, \pi)$ は $\pi|_N$ における ψ の重複度である. $N \subset G_\psi$ だから

$$\text{Irr}(G_\psi \mid \psi) = \{\sigma \in \text{Irr}(G_\psi) \mid \langle \psi, \sigma \rangle_N > 0\}$$

が考えられる. このとき次が成り立つ;

定理 1.2.1 $\sigma \mapsto \text{Ind}_{G_\psi}^G \sigma$ は全単射 $\text{Irr}(G_\psi | \psi) \rightarrow \text{Irr}(G | \psi)$ を与える.

更に N の既約表現 ψ' と $\sigma' \in \text{Irr}(G_{\psi'} | \psi')$ に対して $\text{Ind}_{G_\psi}^G \sigma \rightarrow \text{Ind}_{G_{\psi'}}^G \sigma'$ となる必要十分条件は

- 1) $\psi' \rightarrow \psi^g$. 従って $G_{\psi'} = g^{-1}G_\psi g$, かつ
- 2) $\sigma' \rightarrow \sigma^g$

なる $g \in G$ が存在することである. 従って

$$\text{Irr}(G) = \bigsqcup_{\psi \in \text{Irr}(N)/G} \text{Irr}(G | \psi)$$

となる. 即ち $\text{Irr}(G)$ を決定するために, G より取り扱いやすいと期待される

- 1) N に対して $\text{Irr}(N)/G$ を決定し,
- 2) 各 $\psi \in \text{Irr}(N)/G$ に対して $\text{Irr}(G_\psi | \psi)$ を決定すればよい.

1.3 Lie 環の元の正則性

有限体 $\mathbb{F}$ 上定義された連結簡約線形代数群 G の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする. $\beta \in \mathfrak{g}$ の中心化環を

$$Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \beta] = 0\}$$

として, $\dim_{\mathbb{F}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = \text{rank}(G)$ であるとき, $\beta \in \mathfrak{g}$ は G で smoothly regular であるという ([17, 1.4], 簡単のために正則と呼ぶ). $\beta \in \mathfrak{g}$ の Jordan 分解を $\beta = \beta_s + \beta_n$ とすると, 半単純部分 $\beta_s \in \mathfrak{g}$ の中心化群

$$Z_G(\beta_s) = \{g \in G \mid \text{Ad}(g)\beta_s = \beta_s\}$$

の単位元を含む連結成分 $Z_G(\beta_s)^\circ$ は $\mathbb{F}$ 上定義された連結簡約群となり, G の極大トーラス T であってその $\mathbb{F}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{t}$ が β_s を含むものがとれる ([1, Prop.13.19]). 一方, $Z_G(\beta_s)^\circ$ の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環は $Z_{\mathfrak{g}}(\beta_s)$ である ([1, 9.1]). よって $\beta \in \mathfrak{g}$ が G で正則であることは $\beta_n \in Z_{\mathfrak{g}}(\beta_s)$ が $Z_G(\beta_s)^\circ$ で正則であることと同値である.

ここで $T \subset Z_G(\beta_s)$ だから, T に関する $Z_G(\beta_s)^\circ$ の根系 $\Phi(T, Z_G(\beta_s)^\circ)$ の正の根系 Φ^+ を

$$\beta_n = \sum_{\alpha \in \Phi^+} c_\alpha \cdot X_\alpha \quad (c_\alpha \in \overline{\mathbb{F}})$$

となるように定める ($X_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ は $\alpha \in \Phi^+$ に対応する根ベクトル). すると次が成り立つ ([2, p.228, III-3.5]);

命題 1.3.1 1) $\beta \in \mathfrak{g}$ が正則ならば, 全ての単純根 $\alpha \in \Phi^+$ に対して $c_\alpha \neq 0$ である.

2) 根系 $\Phi(T, Z_G(\beta_s)^\circ)$ の単純成分ごとに bad prime を次のように定める;

	A_r	B_r, D_r	C_r	E_6, E_7, F_4	E_8	G_2
bad prime	$\emptyset$	2	2	2, 3	2, 3, 5	2, 3

$\mathbb{F}$ の標数が bad prime でないならば 1) の逆が成り立つ.

上の命題から

命題 1.3.2 $G = GL_n$ のとき $\beta \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して次は同値である;

1) β は GL_n で正則.

2) β は

$$J_{n_1}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_r}(\alpha_r) = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\alpha_r) \end{bmatrix},$$

と $GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ -共役である. ここで $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \overline{\mathbb{F}}$ は相異なり

$$J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

は固有値 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}$ の Jordan 細胞である.

3) $\beta \in M_n(\mathbb{F})$ の固有多項式は β の最小多項式である.

4) $\{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid X\beta = \beta X\} = \mathbb{F}[\beta]$.

更に

命題 1.3.3 $G \subset GL_n$ が古典群で $\overline{\mathbb{F}}$ 上の Weyl 群が A -型 (即ち “任意の置換と任意の符号変更により生成された群”) のとき, $\beta \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して, β が G で正則である必要十分条件は β が GL_n で正則なることである.

注意 1.3.4 本稿では $\mathbb{F} = O/\mathfrak{p}$ であるが, この場合 $\beta \in \mathfrak{gl}_n(O)$ に対して次は同値である;

1) $\widehat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ は GL_n で正則,

2) $\{X \in M_n(O/\mathfrak{p}^l) \mid [X\widehat{\beta}] = 0\} = O/\mathfrak{p}^l[\widehat{\beta}] \ (\forall l > 0),$

3) $\{X \in M_n(O) \mid [X, \beta] = 0\} = O[\beta].$

1.4 設定

加法群 F の連続なユニタリ指標 τ を一つ固定して

$$\{x \in F \mid \tau(xO) = 1\} = O$$

であるとする.

$G \subset GL_n$ を O 上の滑らかな群スキームとして, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ をその Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ は O 上のアフィンスキームである. 従って任意の O -代数 K に対して $G(K)$ は K 上の一般線形群 $GL_n(K)$ の部分群であり, $\mathfrak{g}(K)$ は K 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}_n(K) = M_n(K)$ ($[X, Y] = XY - YX$) の K -部分 Lie 環である. $\mathfrak{gl}_n$ の trace form

$$\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n \times_O \mathfrak{gl}_n \rightarrow O = \mathrm{Spec}(O[t])$$

の $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ への制限を $B : \mathfrak{g} \times_O \mathfrak{g} \rightarrow O$ とする. 即ち, 任意の O -代数 K に対して $X, Y \in \mathfrak{g}(K) \subset \mathfrak{gl}_n(K) = M_n(K)$ とすれば $B(X, Y) = \mathrm{tr}(XY) \in K$ である. G は O 上滑らかだから任意の $0 < r \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$\mathfrak{g}(O)/\varpi^r \mathfrak{g}(O) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^r) = \mathfrak{g}(O) \otimes_O O/\mathfrak{p}^r$$

が成り立つ ([4, p.215, Proposition]). また任意の $0 < l < r$ に対して自然な全射 $G(O/\mathfrak{p}^r) \rightarrow G(O/\mathfrak{p}^l)$ の核を $K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ と書く.

ここで次の三つの条件が満たされると仮定する;

(I) $B : \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ は非退化,

(II) $r = l + l'$ ($0 < l' \leq l < r$) とすると群同型

$$\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l'}) \xrightarrow{\sim} K_l(O/\mathfrak{p}^r) \quad (\overline{X} \mapsto \overline{1_n + \varpi^l X})$$

が成り立つ,

(III) $r = 2l - 1$ が奇数のとき写像

$$\mathfrak{g}(O) \rightarrow K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \quad (X \mapsto \overline{1_n + \varpi^{l-1} X^{l-1} + 2^{-1} \varpi^{2l-2} X^{2l-2}})$$

がある.

条件 (I) から任意の $l > 0$ に対して $B : \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^l) \times \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^l) \rightarrow O/\mathfrak{p}^l$ が非退化であり, 更に $B : \mathfrak{g}(O) \times \mathfrak{g}(O) \rightarrow O$ が非退化であることが示される. 条件 (II), (III) の写像は “指数写像” の truncation とみなせる.

$G = GL_n, Sp_{2n}$ 等古典群は簡単な付加条件の下でこれらの条件を満たす.

以下, $1 < r \in \mathbb{Z}$ を固定して $r = l + l'$ ($0 < l' \leq l < r$) なる最小の整数 l をとる. 即ち r が偶数ならば $r = 2l, l' = l$ であり, r が奇数なら

ば $r = 2l - 1, l' = l - 1$ である. 条件 (II) から可換群 $K_l(O/p^r)$ の指標は $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して

$$\psi_\beta(h) = \tau(\varpi^{-l'} B(X, \beta))$$

($h = \overline{1_n + \varpi^l X} \in K_l(O/p^r), X \in \mathfrak{g}(O)$) により尽くされる. このとき $g \in G(O/p^r)$ に対して

$$\psi_\beta(g^{-1}hg) = \psi_{\text{Ad}(g)\beta}(h) \quad (h \in K_l(O/p^r))$$

だから

$$G(O/p^r)_{\psi_\beta} = \{\bar{g} \in G(O/p^r) \mid \text{Ad}(g)\beta \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^{l'}}\}$$

である. Clifford の方法に従って $\text{Irr}(G(O/p^r)_{\psi_\beta}, \psi_\beta)$ を決定することが目標である. ここで $G(O/p^r)_{\psi_\beta}$ の構造に関して一つの仮定をする;

仮定 1.4.1 $G(O/p^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C} \cdot K_{l'}(O/p^r)$ なる可換部分群 $\mathcal{C} \subset G(O/p^r)_{\psi_\beta}$ が存在する.

注意 1.4.2 $\hat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則 (1.3 参照) ならば注意 1.3.4 より $G(O/p^r)_{\psi_\beta}$ の可換部分群 $\mathcal{C} = G(O/p^r) \cap (O/p^r[\bar{\beta}])^\times$ をとれば仮定 1.4.1 が成り立つ.

注意 1.4.3 $r = l + l'$ ($0 < l' \leq l$) とすると $r - 1 \geq l$ だから $K_{r-1}(O/p^r) \subset K_l(O/p^r)$ である. $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_\beta|_{K_{r-1}(O/p^r)} = 1 &\Leftrightarrow 1 = \psi_\beta(\overline{1_n + \varpi^{r-1}X}) \\ &= \tau(\varpi^{-1}B(X, \beta)) \text{ for } \forall X \in \mathfrak{g}(O) \\ &\Leftrightarrow \hat{\beta} = 0 \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}). \end{aligned}$$

従って $\hat{\beta} \neq 0$ ならば $\text{Irr}(G(O/p^r), \psi_\beta)$ の元は自然な全射 $G(O/p^r) \rightarrow G(O/p^{r-1})$ を経由しない.

1.5 $r = 2l$ が偶数のとき

前節の設定の下で $r = 2l$ は偶数であるとする. 仮定 1.4.1 から

$$G(O/p^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C} \cdot K_l(O/p^r)$$

なる可換部分群 $\mathcal{C} \subset G(O/p^r)_{\psi_\beta}$ が存在する. 可換群 $\mathcal{C}$ の指標群 $\hat{\mathcal{C}}$ の部分集合

$$\hat{\mathcal{C}}_{\psi_\beta} = \{\theta \in \hat{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C} \cap K_l(O/p^r) \text{ 上では } \theta = \psi_\beta\}$$

の元 θ に対して, $G(O/p^r)_{\psi_\beta}$ の一次元表現 $\theta \cdot \psi_\beta$ が $gh \mapsto \theta(g) \cdot \psi_\beta(h)$ ($g \in \mathcal{C}, h \in K_l(O/p^r)$) により定義される. 更に $\theta \mapsto \theta \cdot \psi_\beta$ は $\hat{\mathcal{C}}_{\psi_\beta}$ から $\text{Irr}(G(O/p^r)_{\psi_\beta}, \psi_\beta)$ への全単射を与えることが容易に示される. よって定理 1.2.1 より

定理 1.5.1 $\widehat{C}_{\psi_\beta}$ から $\text{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ への全単射が

$$\theta \mapsto \text{Ind}_{G(O/\mathfrak{p}^r)\psi_\beta}^{G(O/\mathfrak{p}^r)} (\theta \cdot \psi_\beta)$$

により与えられる.

以下の各節では, $r = 2l - 1 \geq 3$ が奇数の場合を考察するが, その前に有限体上の代数群に付随した Schur multiplier を一つ定義しておく.

2 有限体上の代数群に付随する Schur multiplier

2.1 定義

$G \subset GL_n$ を有限体 $\mathbb{F}$ 上の代数群として, G の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して

$$B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F} \quad (B(X, Y) = \text{tr}(XY))$$

は非退化とする. $\beta \in \mathfrak{g}$ は中心の元ではないとし, $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は加法群 $Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ の指標とする. このとき $\mathbb{V}_\beta = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ は非退化交代形式 $\langle X, Y \rangle_\beta = B([X, Y], \beta)$ に関して $\mathbb{F}$ 上の斜交空間となる.

$$G(\mathbb{F})_\beta = \{g \in G(\mathbb{F}) \mid \text{Ad}(g)\beta = \beta\}$$

とおくと $g \in G(\mathbb{F})_\beta$ に対して $\sigma_g \in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ が $X \pmod{Z_{\mathfrak{g}}(\beta)} \mapsto \text{Ad}(g)^{-1}X \pmod{Z_{\mathfrak{g}}(\beta)}$ により定義される. さて $v \mapsto [v]$ を完全列

$$0 \rightarrow Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{V}_\beta \rightarrow 0$$

の $\mathbb{V}_\beta$ 上の $\mathbb{F}$ -線形な切断として, $v \in \mathbb{V}_\beta, g \in G(\mathbb{F})_\beta$ に対して

$$\gamma(v, g) = \gamma_{\mathfrak{g}}(v, g) = \text{Ad}(g)^{-1}[v] - [v\sigma_g] \in Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$$

とおく. すると $v \mapsto \rho(\gamma(v, g))$ は加法群 $\mathbb{V}_\beta$ の指標となるから $\rho(\gamma(v, g)) = \widehat{\tau}(\langle v, v_g \rangle_\beta) \ (\forall v \in \mathbb{V}_\beta)$ なる $v_g \in \mathbb{V}_\beta$ が定まる.

$$G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \{g \in G(\mathbb{F}) \mid \text{Ad}(g)X = X \ \forall X \in Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\}$$

は $G(\mathbb{F})_\beta$ の部分群で, 任意の $g, h \in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ に対して

$$v_{gh} = v_h \sigma_g^{-1} + v_g \tag{1}$$

となる. そこで

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = \widehat{\tau}(2^{-1}\langle v_g, v_{gh} \rangle_\beta) \quad (g, h \in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)})$$

とおくと, 関係式 (1) より次の命題が示される;

命題 2.1.1 $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ は $\mathbb{C}^\times$ に自明に作用するとして

- 1) $c_{\beta,\rho} \in Z^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$,
- 2) cohomology class $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は $\mathbb{F}$ -線形切断 $v \mapsto [v]$ の選択に依らない,
- 3) $c_{\beta,\rho}(g, h)^{-1} = c_{\beta,\rho}(h^{-1}, g^{-1})$.

命題 2.1.2 指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を加法群 $\mathfrak{g}$ の指標 $\tilde{\rho}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に延長したとき

$$c_{\beta,\rho}(g, h) = \tilde{\rho}(2^{-1}\text{Ad}(g)[v_h]) \cdot \tilde{\rho}(2^{-1}[v_{gh}])^{-1} \cdot \tilde{\rho}(2^{-1}[v_g])$$

$(g, h \in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)})$ である。

2.2 係数拡大との関係

有限次拡大 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ の拡大次数は $\mathbb{F}$ の標数と素であるとして, $T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}} = (\mathbb{K} : \mathbb{F})^{-1}T_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ とおく. $\mathbb{K}$ の加法群の指標 $\tilde{\tau} = \tau \circ T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ は $\mathbb{F}$ の加法群の指標 τ の延長となる. $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ の $\mathbb{K}$ -双線形延長 $B: \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \times \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ は非退化である. 指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\tilde{\rho}: Z_{\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \xrightarrow{1 \otimes T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$$

とおくと, 次の命題が成り立つ;

命題 2.2.1 $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は制限写像

$$\text{Res}: H^2(G(\mathbb{K})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\tilde{\rho}}] \in H^2(G(\mathbb{K})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である。

2.3 部分代数群との関係

$\mathbb{F}$ 上の部分代数群 $G \subset H \subset GL_n$ があって, H の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{h}$ としたとき

$$\tilde{B}: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{F} \quad (\tilde{B}(X, Y) = \text{tr}(XY))$$

が非退化であるとする. このとき

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp, \quad \mathfrak{g}^\perp = \{X \in \mathfrak{h} \mid \tilde{B}(X, \mathfrak{g}) = 0\}$$

である. 中心にない元 $\beta \in \mathfrak{g}$ に対して

$$Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \oplus (\mathfrak{g}^\perp)_\beta, \quad (\mathfrak{g}^\perp)_\beta = Z_{\mathfrak{h}}(\beta) \cap \mathfrak{g}^\perp$$

となるから

$$\tilde{V}_\beta = \mathfrak{h}/Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = V_\beta \oplus (\mathfrak{g}^\perp / (\mathfrak{g}^\perp)_\beta)$$

は斜交空間 $\tilde{V}_\beta$ の直交分解となる. $\mathbb{F}$ -ベクトル空間の完全列

$$0 \rightarrow Z_{\mathfrak{h}}(\beta) \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{V}_\beta \rightarrow 0$$

の $\mathbb{F}$ -線形切断 $v \mapsto [v]$ で $[V_\beta] = \mathfrak{g}$ かつ $[Z_{\mathfrak{g}}(\beta) / (\mathfrak{g}^\perp)_\beta] = \mathfrak{g}^\perp$ なるものをとる. 加法群の指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\tilde{\rho}: Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \oplus (\mathfrak{g}^\perp)_\beta \xrightarrow{\text{projection}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$$

とおくと次の命題が成り立つ;

命題 2.3.1 $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} \subset H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ と仮定する. このとき $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は制限写像

$$\text{Res}: H^2(H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である.

特に $H = GL_n$ の場合

命題 2.3.2 $\beta \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ が GL_n で正則ならば

$$1) \ G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = G(\mathbb{F})_\beta \subset GL_n(\mathbb{F})_\beta = GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)},$$

$$2) \ [c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \text{ は制限写像}$$

$$\text{Res}: H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^2(GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である.

2.4 代数群の直積との関係

$G = G_1 \times G_2$ が $\mathbb{F}$ 上の代数群 G_i の直積の場合を考える. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ は G_i の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環の直積 (直和) であって, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{g}$ は $\beta_i \in \mathfrak{g}_i$ がともに中止の元ではないとする. このとき指標 $\rho_i: Z_{\mathfrak{g}_i}(\beta_i) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して $Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ の指標

$$\rho = \rho_1 \times \rho_2: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}_1}(\beta_1) \times Z_{\mathfrak{g}_2}(\beta_2) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

が定義される. $\mathbb{F}$ -ベクトル空間の完全列

$$0 \rightarrow Z_{\mathfrak{g}_i}(\beta_i) \rightarrow \mathfrak{g}_i \rightarrow V_{\beta_i} \rightarrow 0$$

の $\mathbb{F}$ -線形切断 $v \mapsto [v]_i$ に対して

$$0 \rightarrow Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow V_\beta \rightarrow 0$$

の $\mathbb{F}$ -線形切断が

$$\mathbb{V}_\beta = \mathbb{V}_{\beta_1} \times \mathbb{V}_{\beta_2} \rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \quad ((v_1, v_2) \mapsto ([v_1]_1, [v_2]_2))$$

により与えられる。よって $g = (g_1, g_2), h = (h_1, h_2) \in G$ ($g_i, h_i \in G_i$) に対して

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = c_{\beta_1, \rho_1}(g_1, h_1) \cdot c_{\beta_2, \rho_2}(g_2, h_2)$$

となる。

2.5 Schur multiplier の自明性 (GL_n の場合)

$G = GL_n$ として $\beta \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ は正則であるとする。よって

$$G(\mathbb{F})_\beta = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \mathbb{F}[\beta]^\times$$

である。

$$\chi_\beta(t) = \prod_{i=1}^r p_i(t)^{e_i}, \quad p_i(t) \in \mathbb{F}[t] : \text{既約多項式}$$

とすると, $\beta \in M_n(\mathbb{F})$ の $G(\mathbb{F})$ -共役をとって

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_i & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_r \end{bmatrix}, \quad \beta_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}) \text{ s.t. } \chi_{\beta_i}(t) = p_i(t)^{e_i}$$

としてよい。このとき $\beta_i \in \mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{F})$ は正則である。ここで GL_n の部分代数群

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_r \end{bmatrix} \in GL_n \mid g_i \in GL_{n_i} \right\}$$

の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環は

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_r \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid X_i \in \mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{F}) \right\}$$

となる。更に $\beta \in \mathfrak{l}$ で $Z_{\mathfrak{l}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ かつ $L(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ である。よって命題 2.3.2 と 2.4 節の結果から

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = \prod_{i=1}^r c_{\beta_i, \rho_i}(g_i, h_i)$$

となる。よって $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の自明性を示すには $\chi_\beta(t) = p(t)^e$ ($p(t) \in \mathbb{F}[t]$ は既約多項式) の場合に示せば十分である。

I. $\chi_\beta(t) = p(t)$ の場合 このとき $\mathbb{F}[\beta]$ は有限体となるから $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \mathbb{F}[\beta]^\times$ は巡回群となり, Schur multiplier の一般論 ([8, Prop.2.1.1]) より

$$H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) = 1$$

である.

II. $\chi_\beta(t) = (t - \alpha)^n$ の場合 $\beta \in M_n(\mathbb{F})$ の $G(\mathbb{F})$ -共役をとって

$$\beta = J_n(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

であるとしてよい. 更に $\text{ch } \mathbb{F} > n$ であると仮定する.

$f(t) \in \mathbb{F}[t]$ s.t. $\deg f(t) < n$ に対して

$$f(J_n(\alpha)) = f(\alpha 1_n + J_n(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} J_n(0)^k$$

となるから

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[\beta] &= \mathbb{F}[J_n(0)] \\ &= \{a_0 1_n + a_1 J_n(0) + a_2 J_n(0)^2 + \cdots + a_{n-1} J_n(0)^{n-1} \mid a_k \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

となる. よって群の同型

$$\mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[\beta]^\times \quad ((r, s) \mapsto r \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i J_n(0)^i\right))$$

が成り立つ. ここで

$$\exp S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} S^k \quad \text{for } S = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

である. 特に $|\mathbb{F}[\beta]^\times| = q^{n-1}(q-1) = q^n \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ である. また

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} x_k J_n(0)^k, A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n(0)^k \in \mathbb{F}[\beta]$$

に対して $\text{tr}(X^t A) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) x_k a_k$ だから, 群の同型

$$\mathbb{F}[\beta] \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[\beta]^\sim \quad (A \mapsto \rho_A = [X \mapsto \tau(\text{tr}(X^t A))])$$

が成り立つ。ここで

$$V = \{X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid \text{tr}(X^t A) = 0 \text{ for } \forall A \in \mathbb{F}[\beta]\}$$

とおくと, $\text{ch } \mathbb{F} > n$ より $V \cap \mathbb{F}[\beta] = 0$ だから

$$\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{g}_\beta \quad (\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{F}[\beta]).$$

そこで V に関して $[v] \in V$ ($v \in \mathbb{V}_\beta$) 及び $\gamma(v, g) \in \mathfrak{g}_\beta$ ($v \in \mathbb{V}_\beta, g \in G(\mathbb{F})_\beta = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \mathbb{F}[\beta]^\times$) を定義する. 特に $\rho = \rho_A$ ($A \in \mathbb{F}[\beta]$) のとき, $\tilde{\rho}(X) = \tau(\text{tr}(X^t A))$ ($X \in \mathfrak{g}$) とすれば, $\tilde{\rho}(X) = 0$ ($\forall X \in V$) だから, 命題 2.1.2 より

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = \tau(2^{-1} \langle v_g, g v_h g^{-1} \rangle_\beta) = \tau(2^{-1} \text{tr}(g X_h g^{-1} {}^t A))$$

となる.

例 2.5.1 $n = 2, \beta = J_2(\alpha)$ で $\text{ch } \mathbb{F} > 3$ のとき.

$$\rho = \rho_A \in \mathbb{F}[\beta]^\wedge, \quad A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), h = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$\begin{aligned} c_{\beta, \rho}(g, h) &= \tau\left(\frac{1}{2} \text{tr}(g X_h g^{-1} {}^t A)\right) = \tau\left(\frac{1}{2} \rho_1^2 \cdot (r^2 u + r u^2)\right) \\ &= \alpha_A(h) \alpha_A(gh)^{-1} \alpha_A(g). \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_A(g) = \tau\left(-\frac{1}{2 \cdot 3} \rho_1^2 \cdot r^3\right).$$

例 2.5.2 $n = 3, \beta = J_3(\alpha)$ で $\text{ch } \mathbb{F} > 5$ のとき.

$$\rho = \rho_A \in \mathbb{F}[\beta]^\wedge, \quad A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), h = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = \tau\left(\frac{1}{2} \text{tr}(g X_h g^{-1} {}^t A)\right) = \alpha_A(h) \alpha_A(gh)^{-1} \alpha_A(g)$$

である。ここで

$$\alpha_A(g) = \tau \left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \rho_1^2 \cdot r^3 + 2\rho_1\rho_2 \cdot r^2s + \rho_2^2 \cdot \left(rs^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 5} r^5 \right) \right\} \right).$$

例 2.5.3 $n = 4, \beta = J_4(\alpha)$ で $\text{ch } \mathbb{F} > 7$ のとき.

$$\rho = \rho_A \in \mathbb{F}[\beta]^\wedge, \quad A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & 0 & \rho_0 & \rho_1 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g = \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & r & s & t \\ 0 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad h = \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$c_{\beta, \rho}(g, h) = \alpha_A(h) \alpha_A(gh)^{-1} \alpha_A(g).$$

ここで

$$\alpha_A(g) = \tau \left[-\frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} \rho_1^2 \cdot r^3 + 2\rho_1\rho_2 \cdot r^2s + \rho_2^2 \cdot \left(2rs^2 + r^2t - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} r^5 \right) \\ & + \rho_1\rho_3 \cdot \left(2rs^2 + 2r^2t + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} r^5 \right) \\ & + \rho_2\rho_3 \cdot \left(4rst + \frac{4}{3} s^3 - \frac{1}{3} r^4s \right) \\ & + \rho_3^2 \cdot \left(s^2t + rt^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} r^4t - \frac{1}{3} r^3s^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} r^7 \right) \end{aligned} \right\} \right].$$

2.6 予想と問題

前節の結果と命題 2.2.1 から次の主張が成り立ちそうである；

予想 2.6.1 $G = GL_n$ において $\beta \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が正則ならば, $\text{ch } \mathbb{F}$ が十分大きいとき, 任意の加法的指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\eta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は自明である.

1.4 節にあるような O -部分群スキーム $G \subset GL_n$ に対して命題 2.3.2 を適用すれば, 予想 2.6.1 より次の主張が成り立つ；

$\beta \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則ならば, $\text{ch } \mathbb{F}$ が十分大きいとき, 任意の加法的指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は自明である.

ところで命題 1.3.3 に注意すれば, 上の命題は次の命題を導く ;

$G \subset GL_n$ が古典群で $\overline{\mathbb{F}}$ 上の Weyl 群が A -型のとき, $\beta \in \mathfrak{g}$ が正則ならば, $\text{ch } \mathbb{F}$ が十分大きいとき, 任意の加法的指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_{\beta}^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は自明である.

そこで次のような問題を考えることが出来る ;

問題 2.6.2 $\beta \in \mathfrak{g}$ は正則であるとする. $\text{ch } \mathbb{F}$ が十分大きければ, 任意の加法的指標 $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta, \rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_{\beta}^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は自明となるか?

3 r が奇数の場合の基本的な構成方法

3.1 有限群の表現論の簡単な命題

有限群 G の正規部分群 $N \triangleleft G$ をとり G/N は可換であるとする. N から $\mathbb{C}^\times$ への群準同型写像 ψ をとり $\psi(gng^{-1}) = \psi(n)$ ($\forall g \in G, n \in N$) であるとする. すると

$$D_\psi: G/N \times G/N \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

が $D_\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \psi([x, y])$ ($[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$) により定義されて, $\bar{x} \mapsto D_\psi(\bar{x}, *)$ は G/N から双対群 $(G/N)^\wedge$ への群準同型写像である. このとき次の命題が成り立つ ;

命題 3.1.1 D_ψ が非退化のとき (即ち, $\bar{x} \mapsto D_\psi(\bar{x}, *)$ が群の同型 $G/N \xrightarrow{\sim} (G/N)^\wedge$ を与えるとき), G の既約表現 π_ψ で $\langle \pi_\psi, \psi \rangle_N > 0$ なるものが同型を除いて唯一存在する. 更に

$$\text{Ind}_N^G \psi = \bigoplus^{\dim \pi_\psi} \pi_\psi$$

なる既約分解が成り立ち, 任意の $n \in N$ に対して $\pi_\psi(n)$ は $\psi(n)$ -倍写像である.

3.2 既約表現の構成法と必要な仮定

自然な全射

$$\heartsuit: K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \rightarrow K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^{r-1}) \rightarrow \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}) \rightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{ll} 1 + \varpi^{l-1}X \pmod{\mathfrak{p}^r} & \mapsto 1 + \varpi^{l-1}X \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}} \\ & \mapsto X \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}} \mapsto X \pmod{\mathfrak{p}} \end{array} \right)$$

による $Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta})$ の逆像を $Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ とおく. $K_l(O/\mathfrak{p}^r) \subset Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ だから $\psi|_{K_l(O/\mathfrak{p}^r)} = \psi_\beta$ なる群準同型写像 $\psi : Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ の全体を $Y(\psi_\beta)$ とおく. $[Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta), Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)] \subset \text{Ker}(\psi_\beta)$ だから $Y(\psi_\beta) \neq \emptyset$ である. $\psi \in Y(\psi_\beta)$ とする. 任意の $x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r), y \in Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ に対して

$$\psi(xy x^{-1} y^{-1}) = \psi_\beta(xy x^{-1} y^{-1}) = 1$$

だから

$$D_\psi : K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)/Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta) \times K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)/Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

が

$$D_\psi(\dot{g}, \dot{h}) = \psi(ghg^{-1}h^{-1}) = \tau(\varpi^{-1}B([X, Y], \beta))$$

($g = 1 + \varpi^{l-1}\overline{X}, h = 1 + \varpi^{l-1}\overline{Y} \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$) により定義され, これは非退化である. よって命題 3.1.1 より次の命題が成り立つ;

命題 3.2.1 任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して, $\langle \psi, \pi_\psi \rangle_{Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)} > 0$ なる $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現 π_ψ が同型を除いて唯一存在する. 更に

$$\text{Ind}_{Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)}^{K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)} \psi = \bigoplus^{\dim \pi_\psi} \pi_\psi$$

なる既約分解が成り立ち, 任意の $n \in Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ に対して $\pi_\psi(n)$ は $\psi(n)$ -倍写像である.

ここで次を仮定する;

仮定 3.2.2 仮定 1.4.1 の可換部分群 $\mathcal{C}$ は $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の部分群

$$\left\{ \bar{g} \in G(O/\mathfrak{p}^r) \mid \begin{array}{l} \text{Ad}(g)\beta \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^l}, \\ \text{Ad}(\bar{g})X = X \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\beta) \end{array} \right\}$$

に含まれる.

注意 3.2.3 仮定 1.4.1 と同様に, $\widehat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{g}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則 (1.3 参照) ならば注意 1.3.4 より $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の可換部分群 $\mathcal{C} = G(O/\mathfrak{p}^r) \cap (O/\mathfrak{p}^r[\widehat{\beta}])^\times$ をとれば仮定 3.2.2 が成り立つ.

仮定 3.2.2 の下では任意の $g \in \mathcal{C}$ に対して, $\psi(g^{-1}xg) = \psi(x)$ ($\forall x \in Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$) となるから, π_ψ の g -共役は π_ψ と同値である; 即ち $U(g) \in GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ (V_ψ は π_ψ の表現空間) があって

$$\pi_\psi(g^{-1}xg) = U(g)^{-1} \circ \pi_{\psi_i}(x) \circ U(g) \quad (\forall x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r))$$

が成り立つ. π_ψ は $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現だから, 任意の $g, h \in \mathcal{C}$ に対して $c_U(g, h) \in \mathbb{C}^\times$ があって

$$U(g) \circ U(h) = c_U(g, h) \cdot U(gh)$$

となる. ここで $\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}^\times$ に自明に作用するとして次が成り立つ;

- 1) $c_U \in Z^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$,
- 2) cohomology class $c_\psi = [c_U] \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ は各 $U(g) \in GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ の選択に依らない.

更に cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ が自明ならば

- 1) 任意の $g \in \mathcal{C}, x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して $\pi_\psi(g^{-1}xg) = U_\psi(g)^{-1} \circ \pi_\psi(x) \circ U_\psi(g)$,
- 2) 任意の $h \in \mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して $U_\psi(h) = 1$

なる群準同型写像 $U_\psi : \mathcal{C} \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ が存在する. よって $\mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ 上では $\theta = \psi$ となる $\theta \in \widehat{\mathcal{C}}$ をとれば, $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C} \cdot K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の V_ψ 上の表現 $\pi_{\beta, \psi}$ が

$$\pi_{\beta, \psi}(gh) = \theta(g) \cdot U_\psi(g) \circ \pi_\psi(h) \quad (g \in \mathcal{C}, h \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r))$$

により定義される. そこで $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ において

$$\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta) = \{(\theta, \psi) \in \widehat{\mathcal{C}} \times Y(\psi_\beta) \mid \theta = \psi \text{ on } \mathcal{C}'\}$$

とおくと次の定理が成り立つ;

定理 3.2.4 任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ は自明であるとする. このとき $(\theta, \psi) \mapsto \pi_{\beta, \psi}$ は $\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta)$ から $\text{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_{\text{beta}}, \psi_\beta})$ への全単射を与える.

よって定理 1.2.1 より

系 3.2.5 定理 3.2.4 の仮定の下で $(\theta, \psi) \mapsto \text{Ind}_{G(O/\mathfrak{p})_{\psi_\beta}}^{G(O/\mathfrak{p}^r)} \pi_{\theta, \psi}$ は $\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta)$ から $\text{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ への全単射を与える.

4 Weil 表現

4.1 既約表現 π_ψ の構成

自然な全射 (2) の核は $K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ で 1.4 節の条件 (II) より同型

$$\diamond : \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}) \twoheadrightarrow K_l(O/\mathfrak{p}^r) \quad (S \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}} \mapsto 1 + \varpi^l S \pmod{\mathfrak{p}^r})$$

が成り立つから, 群拡大

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}(O_{l-1}) \xrightarrow{\diamond} K_{l-1}(O_r) \xrightarrow{\vee} \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \rightarrow 0 \quad (3)$$

を得る. この群拡大の cohomology class を計算するために

$$X = \lambda(X) \pmod{\mathfrak{p}} \text{ for } \forall X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$$

かつ $\lambda(0) = 0$ なる任意の写像 $\lambda: \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{g}(O)$ をとれば 1.4 節の条件 (III) から

$$l: \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \rightarrow K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \quad (X \mapsto 1 + \varpi^{l-1}\lambda(X) + 2^{-1}\varpi^{2l-2}\lambda(X)^2 \pmod{\mathfrak{p}^r})$$

が (3) の切断となる. ここから $\mathfrak{g}(\mathbb{F})$ の $\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ への作用は自明であり, $\mu: \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{g}(O)$ を

$$\lambda(X) + \lambda(Y) - \lambda(X+Y) = \varpi \cdot \mu(X, Y) \text{ for } \forall X, Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$$

により定めると, $Z^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}), \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}))$ の二つの元

$$c = [(\hat{X}, \hat{Y}) \mapsto 2^{-1}\varpi^{l-2}[X, Y] \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}}], \quad \mu = [(X, Y) \mapsto \mu(X, Y) \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}}],$$

($\hat{X} = X \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$) が定義されて cohomology class $[c+\mu] \in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}), \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}))$ が群拡大 (3) の cohomology class となる. そこで cohomology class $[c], [\mu] \in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}), \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}))$ に付随する群拡大を $\mathbb{G}, \mathbb{M}$ とする. 即ち $\mathbb{G} = \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ の群演算を

$$(X, \bar{S}) \cdot (Y, \bar{T}) = (X+Y, \overline{S+T+2^{-1}\varpi^{l-2}[X, Y]})$$

により定義し, $\mathbb{M} = \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ の群演算を

$$(X, \bar{S}) \cdot (Y, \bar{T}) = (X+Y, \overline{S+T+\mu(X, Y)})$$

により定義する. $\mathbb{G}, \mathbb{M}$ から $\mathfrak{g}(\mathbb{F})$ への自然な射影によるファイバー積

$$\mathbb{G} \times_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})} \mathbb{M} = \{(X; S, T) = ((X, S), (X, T)) \in \mathbb{G} \times \mathbb{M}\}$$

から $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ への全射

$$(X; \bar{S}, \bar{T}) \mapsto l(X) \cdot (1 + \varpi^l(S+T)) \pmod{\mathfrak{p}^r}$$

ができる. 準同型写像 $B(*, \bar{\beta}): \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}) \rightarrow O/\mathfrak{p}^{l-1}$ による $[c] \in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}), \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}))$ の像 $[c_\beta] \in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}), O/\mathfrak{p}^{l-1})$ に付随する群拡大を $\mathcal{H}_\beta$ とする. 即ち $\mathcal{H}_\beta = \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times O/\mathfrak{p}^{l-1}$ の群演算を

$$(\hat{X}, \bar{s}) \cdot (\hat{Y}, \bar{t}) = ((X+Y)^\wedge, \overline{s+t+2^{-1}\varpi^{l-2}B([X, Y], \beta)})$$

により定義する. 自然な全射

$$\mathbb{G} \times_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})} \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{H}_\beta \quad ((X; S, T) \mapsto (X, S) \mapsto (X, B(X, \beta)))$$

が出来るが, 基本的な着想を説明するために, これを簡単に

$$(!): K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \dashrightarrow \mathcal{H}_\beta$$

と書くことにする。 $\mathcal{H}_\beta$ の中心は直積群 $Z(\mathcal{H}_\beta) = Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \times O/\mathfrak{p}^{l-1}$ であり

$$\mathcal{H}_\beta/Z(\mathcal{H}_\beta) = \mathfrak{g}(\mathbb{F})/Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})} = \mathbb{V}_\beta$$

は $\langle \dot{X}, \dot{Y} \rangle_\beta = B([X, Y], \widehat{\beta})$ に関する $\mathbb{F}$ 上の斜交空間となる。一方 (!) を通して $Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ は $Z(\mathcal{H}_\beta)$ に写される。このとき $\psi \in Y(\psi_\beta)$ は

$$\psi : Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta) \xrightarrow{(!)} Z(\mathcal{H}_\beta) = Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \times O/\mathfrak{p}^{l-1} \xrightarrow{\rho \otimes \tau} \mathbb{C}^\times$$

により加法的指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を誘導する。このとき自然な写像

$$H^2(\mathbb{V}_\beta, Z(\mathcal{H}_\beta)) \xrightarrow{\rho \otimes \tau} H^2(\mathbb{V}_\beta, \mathbb{C}^1) \quad (\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\})$$

により群拡大

$$1 \rightarrow Z(\mathcal{H}_\beta) \rightarrow \mathcal{H}_\beta \rightarrow \mathbb{V}_\beta \text{ to } 0$$

に対応する群拡大を

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^1 \rightarrow H(\mathbb{V}_\beta) \rightarrow \mathbb{V}_\beta \rightarrow 0$$

とすると, $H(\mathbb{V}_\beta) = \mathbb{V}_\beta \times \mathbb{C}^1$ は $\mathbb{F}$ 上の斜交空間 $(\mathbb{V}_\beta, \langle \cdot, \cdot \rangle_\beta)$ に付随する Heisenberg 群となる。従って斜交空間の偏極 $\mathbb{V}_\beta = \mathbb{W}' \oplus \mathbb{W}$ をとって中心指標 $[z \mapsto z]$ の Schrödinger 表現 $(\pi_\beta, L^2(\mathbb{W}'))$ をとれば, (!) を通して $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の $L^2(\mathbb{W}')$ 上の既約表現 π_ψ が決まる;

$$\pi_\psi : K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \xrightarrow{(!)} \mathcal{H}_\beta \rightarrow H(\mathbb{V}_\beta) \xrightarrow{\pi_\beta} GL_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{W}')).$$

更に任意の $z \in Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ に対して $\pi_\psi(z)$ は $\psi(z)$ -倍写像である。

4.2 cohomology class c_ψ の明示公式

$g \in \mathcal{C}$ は共役により $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に作用する。その作用は

$$K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \xrightarrow{(!)} \mathcal{H}_\beta \rightarrow H(\mathbb{V}_\beta)$$

を通して $(v, s) \in H(\mathbb{V}_\beta)$ に $(v, s)^g = (v\sigma_{\widehat{g}}, \widehat{\tau}(\langle v, v_{\widehat{g}} \rangle_\beta))$ により作用する。ここで $\sigma_{\widehat{g}} \in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ と $v_{\widehat{g}} \in \mathbb{V}_\beta$ は $\widehat{g} \in G(\mathbb{F})_{\widehat{\beta}}^{(c)}$ に対して 2.1 節で定義した通りである。一方, 有限体上の Weil 表現の一般論より群準同型写像

$$\omega_\beta : Sp(\mathbb{V}_\beta) \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_\beta)$$

があつて, 任意の $\sigma \in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ と $h \in H(\mathbb{V}_\beta)$ に対して

$$\pi_\beta(v\sigma, s) = \omega_\beta(\sigma)^{-1} \circ \pi_\beta(v, s) \circ \omega_\beta(\sigma)$$

となる。そこで $g \in \mathcal{C}$ に対して

$$U(g) = \pi_\beta(v_{\widehat{g}}, 1) \circ \omega_\beta(\sigma_{\widehat{g}}) \in GL_{\mathbb{C}}(L^2(W'))$$

とおくと、任意の $g \in \mathcal{C}$ と $x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して

$$\pi_\psi(g^{-1}xg) = U(g)^{-1} \circ \pi_\psi(x) \circ U(g)$$

となり、更に任意の $g, h \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して

$$U(g) \circ U(h) = c_{\widehat{\beta}, \rho}(\widehat{g}, \widehat{h}) \cdot U(gh)$$

となる。従って $c_\psi(g, h) = c_{\widehat{\beta}, \rho}(\widehat{g}, \widehat{h})$ ($g, h \in \mathcal{C}$) となる。よって問題 2.6.2 に肯定的に答えることが出来れば次の命題が成り立つ；

$\widehat{\beta} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$ が正則なる $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して、 $\text{ch } \mathbb{F}$ が十分大きければ、
任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$
は自明である。

従って系 3.2.5 により、 $\widehat{\beta} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$ が正則なる $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対しては $\text{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ が決定される。

参考文献

- [1] A.Borel : Linear Algebraic Groups (Second Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1991)
- [2] A.Borel, et alii : Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (Lecture Notes in Math. 131, Springer-Verlag, 1970)
- [3] P.Deligne, G.Lusztig : *Representations of reductive groups over finite field* (Ann. of Math. 103 (1976), 103–161)
- [4] M.Demazure, P.Gabriel : Groupes Algébriques (Masson, 1970)
- [5] P.Gérardin : *Sur les représentations du groupe linéaire général sur un corp p-adique* (Sém. Delange-Pisot-Poitou, 14 (1972-1973), exp. 12)
- [6] P.Gérardin : *Weil representations associated to finite fields* (J.of Algebra, 46 (1977), 54–101)
- [7] J.A.Green : *The characters of the finite general linear groups* (Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402–447)
- [8] G.Karpilovsky : The Schur Multiplier (Vlarendon Press, Oxford, 1987)

- [9] G.Hill : *A Jordan decomposition of representations for $GL_n(\mathcal{O})$* (Comm. Algebra 21 (1993), 3529-3534)
- [10] G.Hill : *On the nilpotent representations of $GL_n(\mathcal{O})$* (Manuscripta Math. 82 (1994), 293-311)
- [11] G.Hill : *Semisimple and cuspidal characters of $GL_n(\mathcal{O})$* (Comm. Algebra 23 (1995), 7-25)
- [12] G.Hill : *Regular elements and regular characters of $GL_n(\mathcal{O})$* (J. Algebra 174 (1995), 610-635)
- [13] G.Karpilovsky : *The Schur Multiplier* (Oxford Univ. Press, 1987)
- [14] A.J.Shalika : *Representation of the two by two unimodular group over local fields* (Thesis (Ph.D), The Johns Hopkins Univ. 1966, in Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory. Johns Hopkins Univ. Press, (2004),1-38)
- [15] T.Shintani : *On certain square integrable irreducible unitary representations of some p -adic linear groups* (J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 522-565)
- [16] A.J.Silberger : *PGL_2 over the p -adics: its Representations, Spherical Functions, and Fourier Analysis* (Lecture Notes in Math. vol. 166 (1970), Springer-Verlag)
- [17] T.A.Springer : *Generalization of Green's Polynomials* (P.S.P.M. vol. 21 (1971),149-153, Amer. Math. Soc.)
- [18] K.Takase : *Regular characters of $GL_n(\mathcal{O})$ and Weil representations over finite fields* (Journal of Algebra 449 (2016) 184-213, arXiv:1510.04377)
- [19] K.Takase : *Regular irreducible characters of a hyperspecial compact group and Weil representations over finite fields* (arXiv:1509.07573)
- [20] J.Tits : *Reductive groups over local fields* (P.S.P.M. vol. 33 (1979), part I, 29-69, Amer.Math.Soc.)