

3. おわりに

以上、開いた流れの中から不規則な挙動を示すものをいくつか挙げてみた。今後は従来の実験をカオスの立場から見直し、精密な実験を繰り返す必要があるように思われる。

強制振動の下での大振巾水面波のカオスの挙動

九大・応力研 船越満明, 井上 進

水の入った円筒形容器(半径 $a = 9\text{ cm}$, 水深 $d = 14\text{ cm}$)を水平方向に, 変位が $x = x_0 \cdot \cos \omega t$ となるように加振する実験を行ない, (ω, x_0) がある領域内にあるときには水面波がカオスのふるまうことを示した。

加振周期 $T (= 2\pi/\omega)$ は T_0 に近い値に設定した。ここで T_0 は, 水面変位 η が

$$\eta = c J_1(kr) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix},$$

であらわされるような固有モードの周期である。なお (r, θ) は円筒の中心を原点とする極座標であり, $\theta = 0$ を加振軸の方向にとる。また k は, ka が J_1' の 0 に最も近い零点であるように決める。

図 1 は (T, x_0) のいろいろな値に対する水面波の挙動の分類を示したものである。 T が T_0 からある程度以上離れている場合には, 波高の最大の点が常に加振軸上にある一次元的振動がみられる。しかし T が T_0 に比較的近い時には, 最大の $|\eta|$ を与える点が側壁に沿って一定方向に回る一方向回転運動や, 最大の $|\eta|$ を与える点の回る向きや波の振巾が不規則に変化するカオスの挙動がみられる。なお図 1 において, 一次元的振動

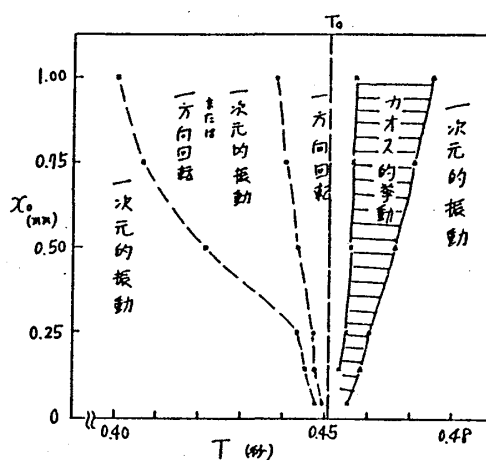


図 1

と一方向回転の重なり合った領域では、どちらの状態が現れるかは初期値に依存する。

図2に、カオスの挙動を示す場合 ($T = 0.465$ 秒) の、 $(r, \theta) = (0.88a, 0)$ の点での η の時間変化を示した。この図は時間方向に圧縮して表示してあるので、包絡線のゆっくりとし

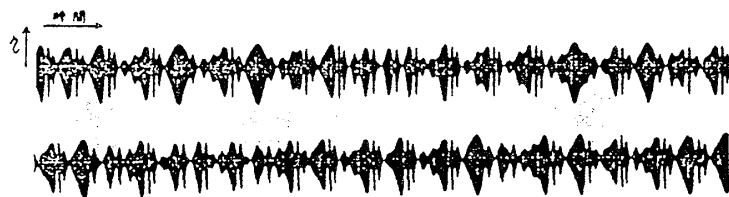


図 2

た変化が表現されていることになる。次にカオスの挙動をより詳しく調べるために、 η が

$$\eta = (P_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t) J_1(kr) \cos \theta \\ + (P_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t) J_1(kr) \sin \theta ,$$

の形に表現できると仮定し、 $t = nT, (n + \frac{1}{4})T$ [n は整数] における $(r, \theta) = (0.88a, 0), (0.88a, \pi/2)$ での η の値から (P_1, P_2, q_1, q_2) を求め、これらがゆっくり変化していくようすを調べた。カオスの挙動を示す場合の典型的な (P_1, P_2, q_1, q_2) の動きを図3に示す (図では任意の2変数の作る平面への射影を示してある)。

一方、理論においては Miles が平均化ラグランジアン法を使って次のような形の方程式を導出した (J. Fluid Mech. Vol. 149 ('84) 15)

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -\alpha P_1 - (\beta + AE) q_1 + BMP_2, \\ \dot{P}_2 = -\alpha P_2 - (\beta + AE) q_2 - BMP_1, \\ \dot{q}_1 = -\alpha q_1 + (\beta + AE) P_1 + BM q_2 + 1, \\ \dot{q}_2 = -\alpha q_2 + (\beta + AE) P_2 - BM q_1, \end{cases}$$

ここで A, B, α, β は定数であり、

$$M = P_1 q_2 - P_2 q_1$$

$$E = (P_1^2 + q_1^2 + P_2^2 + q_2^2)/2.$$

上の方程式の定数の中で、 α だけは理論からは決められないので、実験において急に加振を止めた時の波高の減衰率から計算した。この方程式を数値的に解いてみると、いくつかの T に対

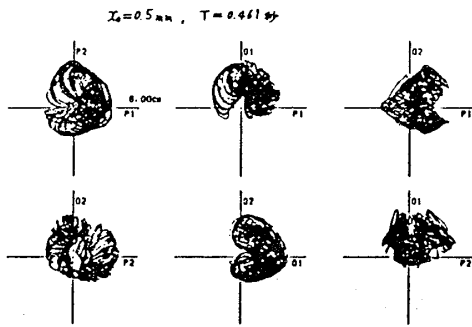


図 3

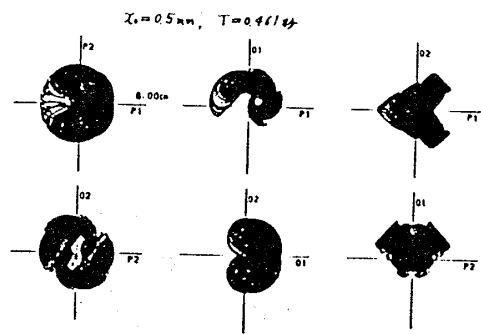


図 4

しては実験と同様なカオスの挙動が現れた(図4参照)。しかし実験の場合と異なり, x_0 を固定して T を少しずつ変えていくとカオスの挙動と規則的挙動が交互に何回かずつ現れる。この差異の原因としては (i) 実験における T の一定性が不十分, (ii) 理論において高次の非線形項を無視している, (iii) 理論において減衰率 α を一定としている, 等が考えられるが, いまのところ未解決である。

Onset of Chaotic Convection in Low Prandtl Number Fluids

広島大・理 八 幡 英 雄

2枚の平行平板間に閉じこめられた流体を下から加熱した時発生する熱対流運動を, 常微分方程式系の模型を用いて考察した¹⁾。流体は直方体容器に容れられているとし, 水平方向に x , y 軸, 垂直方向に z 軸をとり, さらに容器の縦横比を Γ_x , Γ_y とする。流体の高さを d , 温度伝導率を κ としたとき, 長さ・時間の尺度因子として d , d^2/κ を用いると, 無次元化された運動方程式は速度 $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, 温度 θ に対して Boussinesq 近似の範囲で,

$$\partial_t u_i - \sigma \Delta u_i - \sigma \lambda_i \theta + \partial_i \left(\frac{\partial p}{\rho_0} \right) = -u_j \partial_j u_i, \quad (i = x, y, z) \quad (1)$$

$$\partial_t \theta - \Delta \theta - R \lambda_j u_j = -u_j \partial_j \theta, \quad \lambda = (0, 0, 1) \quad (2)$$

$$\partial_j u_j = 0 \quad (3)$$