

帰納極限群の双対定理

辰馬 伸彦 (Nobuhiko Tatsuuma)

0 準備

$\{G_n\}$ を各 G_n が局所コンパクト群で, G_{n+1} に位相を込めて部分群として埋め込まれている列とする.

$G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ を G_n の帰納極限群とする. すなわち集合としては, $G = \bigcup G_n$ であり, “ $U \subseteq G$ が開集合である” とは “ $\forall n$ で $U \cap G_n$ が G_n で開集合である” と定義した位相を G にいれる. この時, G は位相群となる.

この形の帰納極限群を, “閉型帰納極限群” と呼ぶ (定義 3-1 参照) 事とし, 以下この群を扱う. ここで, さらに

(*) “各 G_n は G_{n+1} と局所同型ではない”

との仮定を置く.

もし, $\exists n$ s.t. $\forall m \geq n$ で “ G_m が G_n と局所同型となる” ならば, G 自身が G_n と局所同型になるので, 議論は局所コンパクト群のそれに帰着してしまう. また帰納極限群の定義から, $\{G_n\}$ の途中に来る元は削除してもよいから, G_n の次に来る G_n と局所同型でない G_m を, G_{n+1} と繰り上げて番号の付け替えをする操作により条件 (*) を満たす同等な列を得る事ができる.

すなわち, 一般性を失う事なく条件 (*) を仮定してよい.

本文の目的は上記の G に対して, 淡中型弱双対定理の成立を証明する事にある.

ここで, ある位相群 K に対する淡中型弱双対定理とは以下に示すものである.

今 $\Omega \equiv \{D = (H^D, T_g^D)\}$ を K の全てのユニタリ表現の全体とする. この時 Ω の元の間には次の様な関係式を考える事が出来る.

- (1) $D_1 \sim_W D_2$ (W は同値を与える交換作用素) [ユニタリ同値性],
- (2) $D_1 \oplus D_2$ [直和],
- (3) $D_1 \otimes D_2$ [テンソル積].

今 Ω 上に定義され, 各表現 $D \in \Omega$ の表現ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^D$ 上のユニタリ作用素 U^D を値にとる作用素場 $U \equiv \{U^D\}_{D \in \Omega}$ を考える.

さらにこの U の値の間には次の関係式が成立するものとする.

- [1] $\forall D_1 \sim_W D_2$ の時, $WU^{D_1}W^{-1} = U^{D_2}$,
- [2] $U^{D_1} \oplus U^{D_2} = U^{D_1 \oplus D_2}$

$$[3] \quad U^{D_1} \otimes U^{D_2} = U^{D_1 \otimes D_2}.$$

この様な U を K の “再表現 (birepresentation)” と呼ぶ事とする. さらにこれら再表現の全体の空間には, 各成分である $\mathcal{H}^D$ 上のユニタリ作用素の空間内の弱位相の積位相を入れて考える事が出来る.

$\forall g \in K$ に対して作られた作用素場 $T_g \equiv \{T_g^D\}_{D \in \Omega}$ は明らかに再表現の一つである. 淡中型弱双対定理はこの逆を主張するものである.

命題 任意に与えられた再表現 $U \equiv \{U^D\}_{D \in \Omega}$ に対して $\exists_1 g \in K$ で

$$U^D = T_g^D \quad (\forall D \in \Omega).$$

さらにこの対応でもとの群 K の位相を写したものは, 上で与えた再表現の空間の位相と一致する.

前論文 [1] で我々は任意の局所コンパクト群に対してこのような定理が成立する事を示した. しかしこの論文では “再表現” の定義に少し異なる点がある.

[1] での “再表現” の定義では, その作用素場 $U \equiv \{U^D\}_D$ の $D \in \Omega$ で取る値は $\mathcal{H}^D$ 上の “ユニタリ作用素” でなくて, 単に “0 でない有界作用素” と仮定するだけでこの “双対定理” が証明された.

この現象の理由は次の様に説明される.

局所コンパクト群では容易に “再表現の各成分の作用素のノルムは 1 で抑えられる” 事が示される. 今, ユニタリ性の代わりに, “0 でない有界作用素” の条件を置いた場合を考える.

このタイプの双対定理を B-タイプと呼ぶ事としよう.

この場合, 作用素場としては $B \equiv \{B = \{B^D\}_{D \in \Omega}\}$ (B^D は $\mathcal{H}^D$ 上の $\|B^D\| \leq 1$ となる有界作用素) とし, その全体の空間に各成分の弱位相の積位相を考える. 単位球 $B^D \equiv \{B^D; \|B^D\| \leq 1\}$ は弱コンパクト. 従ってその積として B もコンパクト. そして再表現の全体 K_U は B に入る.

今, 位相群 K で B-タイプの双対定理が成立したとする. すなわち, K は B の中に K_U の形で埋め込まれている.

ところで K_U は B の中で, 条件 [1] – [3] を満たす元の集合として定義されている.

(1) – (3) の作用は弱連続であるから, 条件 [1] – [3] により定義される集合 $B_0 (\subset B)$ は弱コンパクトである.

K_U の元は B_0 の中の 0 でない元として得られるから $K_U = B_0 \setminus \{0\}$, つまりコンパクト集合から 1 点を除いた集合として, K_U , 従って K は局所コンパクトでなくてはならない. まとめると,

命題 0-1 B-タイプの双対定理が成立する位相群は局所コンパクト群に限る.

記号 ユニタリ表現 $D = \{(\mathcal{H}), T_g^D, v^D\}$ ($\|v^D\| = 1$) で, 表現 $\{\mathcal{H}, T_g^D\}$ の巡回部分表現で, ベクトル $\{T_g^D v^D\}_{g \in G}$ により張られる $\mathcal{H}$ の部分空間の上で実現されるものを

示す.

また, 二つの巡回表現 $D_j = \{\mathcal{H}^j, T_g^j, v^j\}$, $j = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}(D_1 \oplus D_2) &\equiv \{(\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2), T_g^1 \oplus T_g^2, v^1 \oplus v^2\}, \\(D_1 \otimes D_2) &\equiv \{(\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2), T_g^1 \otimes T_g^2, v^1 \otimes v^2\}.\end{aligned}$$

と書く事とする.

1 表現の分離系

K をハウスドルフ (即ち T_2 -) 位相群とし, その巡回ユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}, T_g, v\}$ を考える. ここで $\mathcal{H}$ は表現空間, T_g は表現作用素, v は $\|v\| = 1$ の巡回ベクトルとする.

このとき, 関数 $\eta(g) \equiv \langle T_g v, v \rangle$ は K 上の連続な正の定符号関数を与える.

ここで, 巡回表現 $D \equiv \{\mathcal{H}, T_g, v\}$ の共役表現 $D^* \equiv \{\mathcal{H}^*, T_g^*, v^*\}$ について考える. D^* の表現空間 $\mathcal{H}^*$ は $\mathcal{H}$ 上の線形関数の全体として捕らえられ, 具体的には, $\mathcal{H}$ の元を内積を用いて自分自身の上の線形関数と見る操作で得られる. 即ち, $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}^*$ への斜線形な対応を次で定義する

$$(1.1) \quad \mathcal{H} \ni u \rightarrow u^* \in \mathcal{H}^* : \quad u^*(w) \equiv (w, u^*) = \langle w, u \rangle.$$

$\mathcal{H}^*$ には $\langle w^*, u^* \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$ により内積を入れる. $(u^*)^* = u$ は明らかである.

$\mathcal{H}$ 上の有界作用素 A に対し $A^* u^* \equiv (Au)^*$ とすると, A^* は $\mathcal{H}^*$ 上の有界作用素となる. さらに, 2つの有界作用素 A, B に対し次が成り立つ.

$$A^* B^* u^* = A^* (B^* u^*) = A^* (Bu)^* = (A(Bu))^* = (ABu)^*.$$

ここで, $T_g^* u^* = (T_g u)^*$ を考えると, $g \rightarrow T_g^* \equiv (T_g)^*$ は $\mathcal{H}^*$ 上の K のユニタリ表現を与える.

この表現を D の共役表現と呼ぶ.

$v^* \in \mathcal{H}^*$ を上記の写像で $v \in \mathcal{H}$ に対応するベクトルとする. この時

$$(1.2) \quad \forall g \in K, \quad \langle T_g^* v^*, u^* \rangle = \overline{\langle T_g v, u \rangle}.$$

また $(D^*)^*$ はもとの D と同値である.

さらに, D より作った $D^0 \equiv D \oplus D^*$ は前の成分と後ろの成分の入れ替えを交換作用素 W として自己同型になる. すなわち $u \oplus v^*$ の形のベクトルに $v \oplus u^*$ を対応させることで, $(D^0)^* \sim_W D^0$ が成立する.

補題 1-1 任意のユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}^D, T_g^D\}$ から作った $D^0 \equiv D \oplus D^*$ と $\mathcal{H}^D$ の上の有界作用素 A を取る. この時

$\forall u, v \in \mathcal{H}^D, \quad \langle (A \oplus A^*)(u \oplus u^*), v \oplus v^* \rangle (\leq 1)$ は実数値を取る.

証明 $\langle (A \oplus A^*)(u \oplus u^*), v \oplus v \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle A^* u^*, v^* \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle (Au)^*, v^* \rangle$
 $= \langle Au, v \rangle + \overline{\langle Au, v \rangle} = 2\Re \langle Au, v \rangle$ は実数値である. $\square$

今, 任意の巡回表現 $D \equiv \{\mathcal{H}, T_g, v\}$ ($\|v\| = 1$), と自明表現 $I = (C, I_g, v_0)$ から, 新しい表現 $D_p \equiv I \oplus D \oplus D^*$ を作る.

さらにその部分表現でベクトル $v_p \equiv (2^{-1/2})v_0 \oplus (1/2)(v \oplus v^*)$ より生成される巡回部分表現を (D_p) としよう. この時

系 1-1-1 表現 (D_p) の行列要素で

$$1 \geq \langle T_g^{D_p} v_p, v_p \rangle \geq 0.$$

証明 まず, $\|v_p\|^2 = \|v_0\|^2 + 2\|v\|^2 = 2^{-1} + 2 \times 2^{-2} = 1$.

従って $\langle T_g^{D_p} v_p, v_p \rangle \leq 1$ であり, また $|\langle T_g^D v, v \rangle| \leq 1$ となるので

$$(1.3) \quad 1 \geq \langle T_g^{D_p} v_p, v_p \rangle = (2^{-1})\langle I_g v_0, v_0 \rangle + (4^{-1})\{\langle T_g^D v, v \rangle + \langle T_g^{D^*} v^*, v^* \rangle\}$$

$$= 2^{-1} + (2^{-1})(\Re \langle T_g^D v, v \rangle) \geq 0. \quad \square$$

ここで, $\eta(g) \equiv \langle T_g^D v, v \rangle$ とし, $0 < \epsilon < 1$ に対して

$$F(D, \epsilon) \equiv \{g \in K \mid |1 - \eta(g)| < \epsilon\} \quad \text{と書く. すると,}$$

系 1-1-2 (D) と (D_p) を系 1-1-1 で与えた様にとると $1 > \forall \epsilon \geq 0, \exists \delta > 0$ で

$$(1.4) \quad F(D_p, \delta) \subset F(D, \epsilon).$$

証明 $|1 - \eta(g)| < \epsilon < 1$ だから $|1 - \Re \eta(g)| < 1$ で, 従って $\Re \eta(g) > 0$.

一方, $\eta_p(g) = \langle T_g^{D_p} v_p, v_p \rangle = 2^{-1}(1 + (\Re \langle T_g^D v, v \rangle))$ より

$$1 - \eta_p(g) = 1 - 2^{-1} - (2^{-1})\Re \eta(g) = 2^{-1}(1 - \Re \eta(g)) \quad \text{となる.}$$

また, $1 \geq |\Re \eta(g)|^2 + |\Im \eta(g)|^2$ だから

$$|\Im \eta(g)|^2 \leq 1 - (\Re \eta(g))^2 = (1 - \Re \eta(g)) \times (1 + \Re \eta(g)) \leq 2(1 - \Re \eta(g)).$$

これを用いると

$$|1 - \eta(g)|^2 = |1 - \Re \eta(g)|^2 + |\Im \eta(g)|^2 \leq (1 - \Re \eta(g))^2 + 2(1 - \Re \eta(g))$$

$$= (1 - \Re \eta(g))(3 - \Re \eta(g)) \leq 3(1 - \Re \eta(g)) = 6(1 - \eta_p(g)).$$

これは $6\delta < \epsilon^2$ を満たす様に, δ をとれば $\forall g \in F(D_p, \delta)$ なら $g \in F(D, \epsilon)$.

すなわち $F(D_p, \delta) \subseteq F(D, \epsilon)$ を示す. $\square$

定義 1-1 K の巡回表現の系 $\Omega_0 \equiv \{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が有って単位元 e の任意の近傍 V に対して $\epsilon > 0$ と $D \in \Omega_0$ を適当に取れば, 正の定符号関数 $\eta^D(g) \equiv \langle T_g^D v^D, v^D \rangle$ により $\{g \in K \mid |\eta^D(g) - 1| < \epsilon\} \subset V$ と出来る時, Ω_0 を

ユニタリ表現の分離系 (SSUR: separating system of unitary representations)
と呼ぶ.

例 1 K が局所コンパクト群である時, e の任意の近傍 V に対して, $f^* * f$ の台が V に入る様な, 台がコンパクトな連続関数 f を取る事が出来る. 但し此処で $f^* * f$ は関数 f^* ($f^*(g) = \Delta(g)\overline{f(g^{-1})}$) と f との合成積 (convolution) を示す.

f は二乗可積分関数であるから, K の正則表現のベクトルとして見ると, $f^* * f(g) = \langle R_g f, f \rangle$ は正の定符号関数である. すなわち K の正則表現の巡回部分表現の集合が, K の SSUR を与える.

例 2 前論文 [3], Proposition 5.5 で, 閉型帰納極限群 $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ では, e の任意の近傍 V に対して, その台 $[F]$ が V に入る様な正の定符号関数 F を構成出来る事を示した. これはまさしくこの様な F に属する G の巡回表現の族が, G の SSUR を与える事を示している.

補題 1-2 位相群 K が SSUR $\Omega \equiv \{D\}$ を持つ時, 新しい SSUR $\Omega_1 \equiv \{D\}$ を取り直して, その元 $D = \{\mathcal{H}^D, T_g^D, v^D\}$ ($\in \Omega_1$) が属する正の定符号関数 $\eta^D(g) \equiv \langle T_g^D v^D, v^D \rangle$ が常に非負値を取る様に出来る.

証明 最初に与えられた $\Omega \equiv \{D\}$ の元 D に対して補題 1-1 系 1-1-1 で作った $\Omega_1 \equiv \{D_p\}$ を取る. 系 1-1-2 により, Ω_1 はまた K の SSUR であり $\eta^D(g) \geq 0$ を満たす. $\square$

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して, その上の有界作用素全体の作る空間を $B(\mathcal{H})$ と書く. また全てのユニタリ作用素の空間を $U(\mathcal{H})$ で示す. これらの空間にそれぞれ弱位相を入れる. 特に $U(\mathcal{H})$ の上ではこの位相は強位相と一致する.

また, $U(\mathcal{H})$ は通常的作用素の積の演算を考える事によりこの位相で位相群となる. 位相群として $U(\mathcal{H})$ には一様位相構造を考える事が出来る.

ここで位相群 K の任意のユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}^D, T_g^D\}$ について写像 $K \ni g \rightarrow T_g^D \in U(\mathcal{H}^D)$ を取る. もちろんこの写像は連続である.

続いてこれらの空間の直積 $U(\Omega) \equiv \prod_{D \in \Omega} U(\mathcal{H}^D)$ に直積位相を入れると, $U(\Omega)$ は各成分での作用素の積演算により位相群となる. そして写像

$$(1.5) \quad K \ni g \mapsto (T_g^D)_{D \in \Omega} \in \prod_{D \in \Omega} U(\mathcal{H}^D) = U(\Omega)$$

は位相群としての中への準同型を与える.

今 K を SSUR を持つ T_2 -位相群とする.

補題 1-3 この群 K では写像 (1.5) は, 中への同型写像となる. 即ち K は $U(\Omega)$ の中に部分位相群として埋め込まれる.

証明 上記の如くこの写像は連続である.

逆に K は T_2 -位相群であり, SSUR Ω_0 を持つと仮定したから単位元 e の任意の近傍 V に対して, $D \in \Omega_0$ と $\varepsilon > 0$ を選んで

$$\{g \in K \mid \|T_g^D v - v\| < \varepsilon\} \subset V$$

と出来る. これは (1.5) が一対一であり, その逆写像が連続である事を示す. $\square$

以後, K の写像 (1.5) による $U(\Omega)$ の中への像を K_U と書く.

2 Cauchy フィルター 基

定義 2-1 T_2 -位相群 K 上のフィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ (Γ は半順序集合) が Cauchy であるとは,

K の単位元 e の任意の近傍 V に対して,

$$\exists \alpha \in \Gamma, \quad \forall \beta, \gamma \succ \alpha \quad (\beta, \gamma \in \Gamma), \quad F_\beta^{-1} F_\gamma \subset V$$

となる事を言う.

補題 2-1 T_2 -位相群 K の上の任意の Cauchy フィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ に対して集合族 $\overline{\mathcal{F}} \equiv \{\overline{F_\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$ を作るとこれはまた K 上の Cauchy フィルター基を与える. ここで $\overline{F_\alpha}$ は F_α の閉包を示す.

この時 $\mathcal{F}$ 又は $\overline{\mathcal{F}}$ の一方が収束するなら, 他方も同じ極限に収束する.

証明 $\overline{F_\alpha} \cap \overline{F_\beta} \supset \overline{F_\alpha \cap F_\beta}$, だから $\overline{\mathcal{F}} \equiv \{\overline{F_\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$ は K 上のフィルター基を与える.

これが Cauchy である事を示そう.

e の与えられた近傍 W に対し, $V^3 \subset W$ を満たす e の対称近傍 V (i.e. $V = V^{-1}$) を取る.

$\mathcal{F}$ は Cauchy であるとしたから, $\exists \alpha \in \Gamma, \quad \forall \beta, \gamma \succ \alpha, \quad F_\beta^{-1} F_\gamma \subset V$.

しかし $\overline{F_\alpha} \subset F_\alpha V$, $\overline{F_\beta} \subset F_\beta V$ だから $\overline{F_\alpha}^{-1} \overline{F_\beta} \subset V F_\alpha^{-1} F_\beta V \subset V^3 \subset W$ となる. 従って $\overline{\mathcal{F}}$ は Cauchy である.

次に $\forall \alpha, \overline{F_\alpha} \supset F_\alpha$ だからもし $\overline{\mathcal{F}}$ が収束するなら $\mathcal{F}$ は同じ極限に収束する.

逆にもし $\mathcal{F}$ が収束したなら $\mathcal{V}\mathcal{F} \equiv \{V F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma, V \in \mathcal{V}}$ ($\mathcal{V}$ は e の全ての近傍がつくるフィルター) も同じ極限に収束するが $\mathcal{V}\mathcal{F} \supset \overline{\mathcal{F}}$ だから結論が得られる. $\square$

定義 2-2 その全ての元が閉集合であるようなフィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$ を **C-フィルター基** と呼ぶ.

今 $K \equiv U(\Omega) = \prod_{D \in \Omega} U(\mathcal{H}^D)$ を位相群と見てその上の Cauchy フィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$ を考えると、その各成分 $U(\mathcal{H}^D)$ 上への射影成分 $\mathcal{F}^D \equiv \{F_\alpha^D \equiv \text{Proj}_{\mathcal{H}^D} F_\alpha\}$ はまた各成分上の Cauchy フィルター基を与える。

逆に、 $K \equiv U(\Omega)$ 上のフィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$ の各成分 $\mathcal{F}^D$ が Cauchy であるなら $\mathcal{F}$ 自身が Cauchy である。

ここで D を一つ固定すると、任意の $v \in \mathcal{H}^D$ に対して、 $\{F_\alpha^D v\}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}^D$ 上で Cauchy であるから、あるベクトル $u(v)$ に収束する。

すなわち、 $\forall U_\alpha^D \in F_\alpha^D, \forall v \in \mathcal{H}^D$ で $\lim_\alpha U_\alpha^D v = u(v)$

そして $\lim_\alpha U_\alpha^D(v_1 + v_2) = u(v_1) + u(v_2)$ および $\|u(v)\| = \|U_\alpha^D v\| = \|v\|$ 。

つまり、写像 $\mathcal{H}^D \ni v \rightarrow u(v) \in \mathcal{H}^D$ は等長線形である。結論として、ある等長作用素 B^D があって $u(v) = B^D v$ となる。まとめて、

補題 2-2 $U(\Omega) = \prod_{D \in \Omega} U(\mathcal{H}^D)$ 上の任意の Cauchy フィルター基は、各 B^D が等長作用素であるような $(B^D)_{D \in \Omega} \in B(\Omega) = \prod_{D \in \Omega} B(\mathcal{H}^D)$ に収束する。

さらに SSUR を持つ位相群 K の上のフィルター基 $\mathcal{F}$ について、 K_U の中への像 $\mathcal{F}_U$ を考える。

もし $\mathcal{F}$ が Cauchy なら、その像 $\mathcal{F}_U$ は $U(\Omega)$ の中でまた Cauchy となる。そこで

補題 2-3 SSUR を持つ位相群 K 上の Cauchy フィルター基は $B(\Omega)$ の元に収束する。

3 帰納極限群の部分的コンパクト集合

定義 3-1 帰納極限群 $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ が閉型 であるとは次を満たす時を言う。

(1) 各 G_n が局所コンパクト群であり、しかも G_n は G_{n+1} の中に閉部分群として埋め込まれている。

(2) 各 G_n は G_{n+1} と局所同型ではない。

注意 (0章 準備) で示した様に、条件 (2) は本質的ではないが、議論を簡便化する為に加えて置く。

以後、閉型帰納極限群について考える。

ここで前論文 [3] の結果を使う。

定義 3-2 各 G_n の単位元 e の近傍を取り W_n とする。この時

$$(3.1) \quad W \equiv \bigcup_{1 \leq k < \infty} W_1 \cdot W_2 \cdots W_k$$

は G の e の近傍である. この形の近傍を, BS (bamboo shoot)-近傍と呼ぶ.

[3] Proposition 2.3 で次を示した.

命題 3-1 BS-近傍の全体は G の e の基本近傍系を与える.

定義 3-3 $E (\subset G_n)$ が部分的コンパクト (PC)-集合 であるとは
 $\forall n$ で $E \cap G_n$ がコンパクト (空集合を許す) である事を言う.

次は明らかである.

補題 3-1 任意の PC-集合 E と $\forall g \in G$ について Eg, gE はまた PC-集合である.

補題 3-2 E を G の PC-集合で, $\exists n \ E \cap G_n = \emptyset$ を満たすとする. この時 G の e の近傍 W を取って $E \cap G_n W = \emptyset$ と出来る.

証明 G_n は G_{n+1} の閉部分集合だから, コンパクト集合 $E_{n+1} \equiv E \cap G_{n+1}$ に対して, G_{n+1} の e のコンパクト近傍 W_{n+1} を $E_{n+1} \cap G_n W_{n+1} = \emptyset$ となるように取れる. この時 $G_n W_{n+1}$ は閉集合で G_{n+1} に入る.

つまり G_{n+2} の中の閉集合 $G_n W_{n+1}$ とコンパクト集合 $E_{n+2} \equiv E \cap G_{n+2}$ に対して次が得られた.

$$\begin{aligned} E_{n+2} \cap G_n W_{n+1} &= E \cap G_{n+2} \cap G_n W_{n+1} \\ &= E \cap G_{n+1} \cap G_n W_{n+1} = E_{n+1} \cap G_n W_{n+1} = \emptyset. \end{aligned}$$

同様にして G_{n+2} 中の e のコンパクト近傍 W_{n+2} を次の様に取りれる.

$$E_{n+2} \cap G_n W_{n+1} W_{n+2} = \emptyset.$$

再び G_{n+3} の中の閉集合 $G_n W_{n+1} W_{n+2}$ とコンパクト集合 $E_{n+3} \equiv E \cap G_{n+3}$ に対して G_{n+3} の e のコンパクト近傍 W_{n+3} を次を取る.

$$E_{n+3} \cap G_n W_{n+1} W_{n+2} W_{n+3} = \emptyset.$$

添数 k についての帰納法により G_{n+k} の e のコンパクト近傍 W_{n+k} を次を満たす様に取って置く.

$$E_{n+k} \cap G_n W_{n+1} W_{n+2} \cdots W_{n+k} = \emptyset.$$

すると

$$\forall k > m, E_{n+k} \supset E_{n+m}, E_{n+m} \cap G_n W_{n+1} W_{n+2} \cdots W_{n+k} = \emptyset,$$

即ち

$$E_{n+m} \cap G_n \left(\bigcup_{k \geq 1} W_{n+1} W_{n+2} \cdots W_{n+k} \right) = \emptyset$$

ところで $W \equiv \bigcup_{k \geq 1} W_{n+1} W_{n+2} \cdots W_{n+k}$ は G の e の近傍である.

しかも $\forall k > m, E_{n+m} \cap G_n W = \emptyset$ であり, $E = \bigcup_{k \geq 1} E_{n+k}$ となるから, 結論が出る. すなわち

$$E \cap G_n W = \emptyset.$$

□

補題 3-3 G 内の PC -集合 $\{F_m\}_{m \geq 1}$ で次を満たすものがあったとする.

$$(1) \quad \forall m, \quad F_m \supset F_{m+1}.$$

$$(2) \quad \forall m, \quad F_{m+1} \cap G_m = \emptyset.$$

この時 G の e の近傍 V を次の様にする事が出来る.

$$\forall m, \quad F_{m+1} \cap G_m V = \emptyset.$$

証明 各 n に対して補題 3-2 の E を F_{m+1} と見て適用し, 作られた G の e の近傍 W を V_{m+1} と書く. 即ち各 n で $F_{m+1} \cap G_m V_{m+1} = \emptyset$ が成立する.

ここで作り方から $G_m V_{m+1}$ は, G の e の近傍である.

$V \equiv \bigcap_{m \geq 1} G_m V_{m+1}$ とすれば, V はまた G の e の近傍になる事を示そう. それには V が, ある G の e の開近傍を含む事を示せばよい.

V_m は G の e の近傍だから, $O_m \subset V_m$ となる G の e の開近傍 O_m が有る. 当然

$$V = \bigcap_{m \geq 1} G_m V_{m+1} \supset O \equiv \bigcap_{m \geq 1} G_m O_{m+1} \ni e.$$

ここで O が G の開部分集合である事を言えばよい. その為に任意の k で

$$O_k \equiv O \cap G_k \quad \text{が } G_k \text{ で開集合である事を示す.}$$

さて任意の $m \geq k$ について $G_k \subset G_m O_{m+1}$ だから $O_k = O \cap G_k \subset G_m O_{m+1}$. 従って

$$O_k = O \cap G_k = \bigcap_{m < k} G_m O_{m+1} \cap G_k.$$

これは O_k が G_k で開集合である事を示す. 一方

$$\forall m, \quad F_{m+1} \cap G_m V = F_{m+1} \cap G_m \left(\bigcap_{k \geq 1} G_k V_{k+1} \right) \subset F_{m+1} \cap G_m V_{m+1} = \emptyset.$$

だから結論を得る. □

補題 3-4 G の e の任意の近傍 V に対して, V に含まれる様な PC -集合である e の近傍が取れる.

証明 一般性を失う事なく V は BS -近傍としてよい. そこで次の形であるとする.

$$V = \bigcup_{1 \leq k < \infty} V_1 \cdot V_2 \cdots V_k.$$

(3.1) の中の W_n ($\subset V_n$) を n について帰納的に定める.

まず, G_1 中 e の相対コンパクト開近傍 W_1 ($\subset V_1$) を取る.

次に G_2 中 e の相対コンパクト開近傍 W_2 ($\subset V_2$) を $(W_2)^2 \cap G_1 \subset W_1$ に取る.

以下, 同様にして W_{j-1} が決まったとして, G_j 中 e の相対コンパクト開近傍 W_j ($\subset V_j$) を $(W_j)^2 \cap G_{j-1} \subset W_{j-1}$ を満たす様に行く.

この時, 作り方より $W_1 \cdot W_2 \cdots W_{j-1} \cdot (W_j)^2$ は G_j の中の e の相対コンパクトな開近傍である.

そこで, $W \equiv \bigcup_{k \geq 1} W_1 \cdot W_2 \cdots W_k$ と置き, $E(k, j) \equiv W_1 \cdot W_2 \cdots W_k \cap G_j$ と書く.

これで k を止めて考える.

$k \leq j$ については $G_j \supset W_1 \cdot W_2 \cdots W_k \supset E(k, j)$.

$k > j$ なる j では

$$\begin{aligned} E(k, j) &\equiv W_1 \cdot W_2 \cdots W_k \cap G_j \subset W_1 \cdot W_2 \cdots W_{k-1} (W_k)^2 \cap G_j \\ &= W_1 \cdot W_2 \cdots W_{k-1} (W_k)^2 \cap G_{k-1} \cap G_j \\ &= (W_1 \cdot W_2 \cdots W_{k-1} (W_k)^2 \cap G_{k-1}) \cap G_j \\ &\subset ((W_1 \cdot W_2 \cdots W_{k-1}) ((W_k)^2 \cap G_{k-1})) \cap G_j \\ &\subset W_1 \cdot W_2 \cdots W_{k-2} (W_{k-1})^2 \cap G_{k-2} \cap G_j \\ &\quad \dots \dots \\ &\subset W_1 \cdot W_2 \cdots W_{j-1} (W_j)^2 \cap G_j = W_1 \cdot W_2 \cdots W_{j-1} (W_j)^2. \end{aligned}$$

いずれの場合でも次が成立する.

$$\forall k, \quad E(k, j) \subset W_1 \cdot W_2 \cdots W_{j-1} (W_j)^2.$$

すなわち

$$W \cap G_j \equiv \bigcup_{k \geq 1} W_1 \cdot W_2 \cdots W_k \cap G_j \subset W_1 \cdot W_2 \cdots W_{j-1} (W_j)^2$$

は G の中で相対コンパクトな集合である.

W は位相群 G の e の近傍だから $(V_0)^2 \text{ bset } W$ となる様な e の近傍 V_0 が取れる.

ここで $\forall n, \overline{V_0} \cap G_n (\subset W \cap G_n)$ はコンパクトであるから, $\overline{V_0}$ は求める所の V に入る G の e の PC-集合の近傍である. $\square$

系 3-4-1 全ての Cauchy C -フィルター基 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ について

$\exists \alpha \quad \forall \beta \succ \alpha$ で, F_β は PC-集合となる.

証明 G の e の PC-集合の近傍 W を一つ取る.

$\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を Cauchy としたから,

$$\exists \alpha, \forall \beta \succ \alpha, \quad F_\alpha^{-1} F_\beta \subset W.$$

すなわち $g \in F_\alpha, \quad F_\beta \subset gW$.

これは $\forall \beta \succ \alpha$ で F_β が PC-集合である事を示す. $\square$

補題 3-5 ヒルベルト空間の中の σ -コンパクト集合はある可算次元 閉部分空間に入る.

証明 線形距離空間の中のコンパクト集合 C は可算稠密集合 Ξ を持つ. コンパクト集合 C_n の可算和である σ -コンパクト集合 $B \equiv \bigcup_{n \geq 1} C_n$ について, 各 C_n の可算稠密集合 Ξ_n を取り, その和の可算集合 $\bigcup_{n \geq 1} \Xi_n$ を作ると, これは B を含む可算次元 閉部分空間を張る. $\square$

系 3-5-1 E を G の PC-集合とする. G の任意のユニタリ表現 $D = \{\mathcal{H}^D, T_g^D\}$ と $v \in \mathcal{H}^D$ に対して集合 $T_E^D v \equiv \{T_g^D v \mid g \in E\}$ は $\mathcal{H}$ のある可算次元 閉部分空間に含まれる.

証明 集合 E は σ -コンパクトだから、その連続像 $T_E^D v$ はまた σ -コンパクトである。
従って補題を使って結果が出る。 $\square$

4 $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ の完備性

定理 1 閉型帰納極限群 $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ は完備である。

証明 G 上の任意の Cauchy フィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が G の点に収束する事を示せばよい。

$\mathcal{F}$ については、次の二つの場合がある。

場合 1) ある n があってすべての α で $F_\alpha \cap G_n \neq \emptyset$ となる。

場合 2) 全ての n で、 $F_\alpha \cap G_n = \emptyset$ となる様な α が存在する。

場合 1) の時、 $\mathcal{F}_n \equiv \{F_{\alpha,n} \equiv F_\alpha \cap G_n\}_{\alpha \in A}$ を考えると、これは 局所コンパクト群 G_n 上の Cauchy フィルター基を与える。

実際 $\forall F_{\alpha,n}, F_{\beta,n} \in \mathcal{F}_n$ について $F_{\alpha,n} \cap F_{\beta,n} = (F_\alpha \cap G_n) \cap (F_\beta \cap G_n) = F_\alpha \cap F_\beta \cap G_n$ はまた $\mathcal{F}_n$ の元となるから、 $\mathcal{F}_n$ はフィルター基となる。

また $\mathcal{F}_n$ の “Cauchy-性” は $\mathcal{F}$ のそれから出る。

局所コンパクト群は完備であるから、 $\mathcal{F}_n$ は G_n の 1 点に収束するが、この点はまた $\mathcal{F}$ の極限点でもある。つまり $\mathcal{F}$ は $G_n (\subset G)$ で収束する。

次に、場合 2) はあり得ない事を示す。そうすれば G は完備であることが示された事となる。

補題 2-1 により、 $\mathcal{F}$ は C-フィルター基であるとしてよく、更に系 3-4-1 を適用する事により、 $\mathcal{F}$ の全ての元は PC-集合としてよい。

今 場合 2) であると仮定すると、すべての F_α について、ある n があって次が成り立つ。

$$(4.1) \quad F_\alpha \cap G_n = \emptyset.$$

すなわち $F_1 \in \mathcal{F}$ を $F_1 \cap G_1 = \emptyset$ とし、 $n(1)$ を $F_1 \cap G_{n(1)} \neq \emptyset$ とする。

次に $F_2 \subset F_1, F_2 \cap G_{n(1)} = \emptyset$ を満たす $F_2 \in \mathcal{F}$ を取り、 $n(2)$ を $F_2 \cap G_{n(2)} \neq \emptyset$ に取る。

F_{k-1} と $n(k-1)$ が決まれば、同様に $F_k \in \mathcal{F}$ を $F_k \subset F_{k-1}, F_k \cap G_{n(k-1)} = \emptyset$ に取り $n(k)$ を $F_k \cap G_{n(k)} \neq \emptyset$ と定めて行く。

こうして対の列 $\{F_m, n(m)\}_{m \geq 1}$ を次を満たす様にとる。

$$(4.2) \quad \forall m, F_{m+1} \subset F_m, \quad F_{m+1} \cap G_{n(m)} = \emptyset, \quad F_{m+1} \cap G_{n(m+1)} \neq \emptyset.$$

帰納極限群 $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ の定義では, 列の途中に出てくる元を抜いた列を用いても, 結果は同じ群が定義出来るので, 以後簡単の為に今得られた $G_{n(m)}$ の番号を書き直して G_m とする.

この番号で書いた帰納極限群に補題 3-3 を適用すると, G の e の近傍 V を $\forall m, F_{m+1} \cap G_m V = \emptyset$ と取れる. すなわち

$$(4.3) \quad G_m F_{m+1} \cap V = \emptyset \quad \text{で} \quad F_{m+1} \cap G_{m+1} \neq \emptyset.$$

ここで, [3] Proposition 5.5, Theorem 5.10 の次の結果を用いる.

[命題] $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ の e の任意の近傍 V に対して, その台が V に入る様な連続な正の定符号関数 η を作る事が出来る. すなわち

$$(4.4) \quad [\eta] \subset V.$$

GNS-構成法により $\eta(g) = \langle T_g v, v \rangle$ となる巡回ユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}, T_g, v\}$ を作る事が出来る. この時, 関係式 (4.4) は, V に入らない g_0 については $\langle T_{g_0} v, v \rangle = 0$ となる事, 言い換えると次を示している.

$$(4.5) \quad T_g v \perp v.$$

従って (4.3) 式と組み合わせて次が言える.

$$(4.6) \quad \forall h_m \in G_m, \forall g_{m+1} \in F_{m+1} \implies (T_{h_m^{-1} g_{m+1}} v) \perp v,$$

すなわち,

$$(4.7) \quad \forall h_m \in G_m, \forall g_{m+1} \in F_{m+1} \implies T_{g_{m+1}} v \perp T_{h_m} v.$$

他方, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中のベクトルの集合の系 $\{T_F v\}_{F \in \mathcal{F}}$ は Cauchy フィルター基となるから, ある $u \in \mathcal{H}$ に収束する.

ここで $D_m \equiv \{g \in G \mid \|T_g v - u\| < 1/m\}$ と置く.

u は $\{T_F v\}_{F \in \mathcal{F}}$ の極限であるから, 任意の $F \in \mathcal{F}$ と m で $D_m \cap F \neq \emptyset$ となる.

$E(m) \equiv D_m \cap F_m$ を考えると m について単調減少である.

まず $G_{n(1)} \cap E(1) \neq \emptyset$ となる $n(1)$ を取り, 元 $g_1 \in G_{n(1)} \cap E(1)$ を一つ固定する.

次に $G_{n(2)} \cap E(n(2)) \neq \emptyset$ となる $n(2)$ を取り, 元 $g_2 \in G_{n(2)} \cap E(n(2))$ を一つ取る.

これを繰り返す事により, $g_k \in G_{n(k)} \cap E(n(k))$ を満たす対の列 $\{(n(k), k)\}_{k \geq 1}$ を得る事が出来た.

列 G_n は単調増大であるから, $\forall m < k, g_m \in G_{n(k)-1}$, 一方 $g_k \in E(n(k)) \subset F_{n(k)}$. 従って (4.6) によって, $\forall m < k, T_{g_k} v \perp T_{g_m} v$ となる.

これは $\{T_{g_k} v\}_{k \geq 1}$ の各元が相互に直交している事を示す.

しかし $\{T_F v\}_{F \in \mathcal{F}}$ は Cauchy フィルター基である.

これは矛盾であり, すなわち “場合 2” はありえず, 定理 1 は証明された. □

5 準正則表現

前論文 [3] 5.1- 5.3, Theorem 5.10 で任意にとった G の e の PC-集合の近傍 E に対して, G の巡回ユニタリ表現 $\mathfrak{R} \equiv \{\mathfrak{H}, R_g, f^\sim\}$ を作り, それが属する正の定符号関数 $\eta(g) \equiv \langle R_g f^\sim, f^\sim \rangle$ で $[\eta] \subset E$ を満たす様に出来る事を示した.

ここでは, $\mathfrak{R}$ の構造について, さらに考察を加える.

この表現の構成では, まず各 G_n の上の正值連続関数 $f_n^\sim$ と, ハール測度 μ_n の組の列 $\{(f_n^\sim, \mu_n)\}_{n \geq 1}$ をある収束条件の下に, n について帰納的に作る.

この時 G 上の正值連続関数 $f^\sim$ があり, 各 G_n 上への制限 f_n は一様かつ $L^2(\mu_n)$ での $f_m^\sim$ ($m \geq n$) の G_n での極限である.

ここでさらに次の式が成り立つ.

$$(5.1) \quad \|f^\sim\| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^\sim\|_{L^2(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{G_n} |f_n^\sim(g)|^2 d\mu_n(g) \right)^{1/2} = 1;$$

$$(5.2) \quad \|R_g f^\sim\| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_g f_n^\sim\|_{L^2(n)} = \|f^\sim\| \quad (\forall g \in G);$$

$$(5.3) \quad (\|R_{g_1} f_n^\sim\|_{L^2(n)})^2 = \int_{G_n} |R_{g_1} f_n^\sim(g)|^2 d\mu_n(g).$$

上で R_g は g による右移動を示す.

H を $\{R_g f^\sim\}_{g \in G}$ で代数的に張られた空間とする. すなわち G 上の $\{\sum_j c_j R_{g_j} f^\sim(g)\}$ なる形の関数空間とする. (5.1), (5.2) のノルム $\|\cdot\|$ により H には前ヒルベルト空間の構造が入り, その完備化のヒルベルト空間が $\mathfrak{H}$ である. そして $\mathfrak{R} \equiv \{\mathfrak{H}, R_g, f^\sim\}$ が G の $[\eta] \subset E$ となる $\eta(g) \equiv \langle R_g f^\sim, f^\sim \rangle$ に属するユニタリ表現であった.

しかし以下の議論の為には, 扱うユニタリ表現のクラスをもう少し広げて置く必要がある.

別に G の任意の巡回ユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}^D, T_g^D, v^D\}$ を取り, 次のテンソル積を考える.

$$D^\sim \equiv (D \otimes \mathfrak{R}) = \{(\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}), T_g^D \otimes R_g, f^\sim (\equiv v^D \otimes f^\sim)\},$$

ここで $(D \otimes \mathfrak{R})$ は $\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}$ の部分空間 $(\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H})$ 上に実現された $D \otimes \mathfrak{R}$ の部分表現である. (0 章の記号 参照)

空間 $\mathcal{H}^D \otimes H$ の元は G 上の $\mathcal{H}^D$ に値を取る関数 $f(g) \equiv \sum_j c_j R_{g_j} f^\sim(g) v_j$ ($v_j \in \mathcal{H}^D$) と見る事が出来る. ここでは $f, k \in \mathcal{H}^D \otimes H$ となる. そして,

$$(5.4) \quad \|f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} \|f(g)\|_{\mathcal{H}^D}^2 d\mu_n(g),$$

$$(5.5) \quad \langle f, k \rangle_{L^2(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} \langle f(g), k(g) \rangle_{\mathcal{H}^D} d\mu_n(g).$$

次の正の定符号関数に属する巡回表現を $D^\sim$ とする.

$$(5.6) \quad \langle T_g^{D^\sim} f^\sim, f^\sim \rangle = \langle (T_g^D \otimes R_g)(v^D \otimes f^\sim), (v^D \otimes f^\sim) \rangle$$

$$= \langle T_g^D v^D, v^D \rangle \cdot \langle R_g f^\sim, f^\sim \rangle.$$

二つの連続関数の積として $\langle T_g^{D^\sim} f^\sim, f^\sim \rangle$ は連続であり、これは積表現 $D^\sim$ の連続性に対応する。

ところで広げた空間 $\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}$ は G 上の $\mathcal{H}^D$ -ベクトル値関数と見ると、この空間の上に作用素 $(T_g^0 f)(*) \equiv T_g^D f(*g)$ により $D^0 \equiv \{\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}, T_g^0\}$ はまた G のユニタリ表現を与える。

この表現 D^0 を $\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}$ の部分空間 $(\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H})$ へ制限して得られる表現が $D^\sim$ となる。

$D^\sim$ でのベクトル $v^D \otimes f^\sim$ は D^0 では $f^\sim(g)v^D$ の形で、

$$T_g^{D^\sim}(v^D \otimes f^\sim) = f^\sim(*g)(T_g^D v^D).$$

ここで $\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}$ 上の作用素

$$(5.7) \quad W : f(g) \rightarrow T_g^D f(g)$$

を考える。この時

$$\begin{aligned} (5.8) \quad \|T_*^{D^\sim} f(*)\|_{\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{G_n} \|f_n^\sim(*g) T_*^D v^D\|^2 d\mu(g) \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{G_n} |f_n^\sim(*g)|^2 \|v^D\|^2 d\mu(g) \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{G_n} \|f_n^\sim(*g) v^D\|^2 d\mu(g) \right)^{1/2} = \|f(*)\|_{\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

さらに $T_{g^{-1}}^{D^\sim} = (T_g^{D^\sim})^{-1}$ となるから W はユニタリ作用素である。

しかも $D^1 \equiv \{\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}, WT_g^0 W^{-1}\}$ は D^0 にユニタリ同値な G の表現を与える。そしてその同値対応

$$(5.9) \quad WT_g^0 W^{-1}(f(*)) = W((T_{g*}^0)^{-1} f(*)) = W((T_{g*}^0)^{-1} f(*g)) = f(*g)$$

による先を見るとこの表現 $D^1 \equiv \{\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}, T_g^1\}$ の作用素 $T_g^1 \equiv WT_g^0 W^{-1}$ はベクトル値関数の g による右移動となる。

G の PC-集合 E を取る。

系 3-5-1 を使うと、 $T_E^D v^D$ は $\mathcal{H}^D$ 中の可算次元閉部分空間 $\mathcal{H}_0^D$ に含まれている。

$\mathcal{H}_0^D$ の CONS $\{v_j\}$ を $v_1 = v^D$ として固定する。ここで値が $\mathcal{H}_0^D$ に入る $f(g)$ を CONS $\{v_j\}$ で展開すると

$$(5.10) \quad f(*) = \sum_{j \geq 1} \langle f(*), v_j \rangle v_j,$$

$$(5.11) \quad (T_g^1 f)(*) = \sum_{j \geq 1} \langle f(*g), v_j \rangle v_j \quad (g \in E).$$

これは空間 $H_j \equiv \{\langle f(*), v_j \rangle v_j\}_{f \in (\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H})}$ が $\forall f \in E$ に対し, $\mathcal{H}^D$ 中の不変部分空間である事を示す.

ここで再び巡回表現 $D^\sim = \{(\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}), T_g^D \otimes R_g, f^\sim \equiv v^D \otimes f^\sim\}$ を考える.

上の議論によって, $W(f^\sim(g)v^D) = f^\sim(g)T_g^D v^D$.

特に $g \notin E$ の時は $f^\sim(g) = 0$ となるから

$$(5.12) \quad \langle f(*), v_j \rangle = f^\sim(*) \langle T_*^D v^D, v_j \rangle.$$

特に $j = 1$ すなわち, $v_1 = v^D$ の成分では

$$\langle f(*), v^D \rangle = f^\sim(*) \langle T_*^D v^D, v^D \rangle$$

となり, この成分に対応する表現は G 上の $\{R_g(f^\sim(*) \langle T_*^D v^D, v^D \rangle)\}_{g \in G}$ の形の関数により張られる関数空間 $\mathfrak{H}_D$ の部分空間の上に実現され, その表現作用素は, G の元 g による右移動 R_g である.

定義 5-1 $\mathfrak{A}$ の形の表現を **準正則表現** と呼び,

$$(5.13) \quad D^\sim(D) \equiv \{(\mathfrak{H}_D), R_g, f^\sim(*) \langle T_*^D v^D, v^D \rangle\}.$$

を汎準正則表現と呼ぶ.

6 G の再表現

ここでもう一度一般の T_2 -位相群に戻り, そのユニタリ表現 D と, その上の再表現の性質について考察する.

補題 6-1 任意の再表現 $U \equiv \{U^D\}$ に対して次が成立する,

$$(6.1) \quad U^{D^*} = (U^D)^*.$$

証明 表現 $D^0 \equiv D \oplus D^*$ に対しては, $U^{D^0} = U^D \oplus U^{D^*}$ となる.

§1 で述べた様に, $(D^0)^* \sim_{W^0} D^0$ で

$(U^{D^0})^* = W^0 U^{D^0} (W^0)^{-1} = U^{D^*} \oplus U^D$ が成り立つ.

一方, $(U^{D^0})^* = (U^D)^* \oplus (U^{D^*})^*$ だから,

$(U^D)^* = U^{D^*}$ 及び $U^{D^0} = (U^{D^*})^*$ でなくてはならない. $\square$

系 6-1-1 表現 $D^0 \equiv D \oplus D^*$ に対しては $\langle U^{D^0}(u \oplus u^*), v \oplus v^* \rangle$ は実数値をとる.

証明. $\langle U^{D^0}(u \oplus u^*), v \oplus v^* \rangle = \langle U^D u, v \rangle + \langle U^{D^*} u^*, v^* \rangle$
 $= \langle U^D u, v \rangle + \langle (U^D u)^*, v^* \rangle = \langle U^D u, v \rangle + \overline{\langle U^D u, v \rangle} \in \mathbf{R}. \quad \square$

系 6-1-2 系 1-1-1 で与えた表現 $D_p \equiv I \oplus D \oplus D^*$ と, ベクトル $v_0 \in \mathcal{H}^I, v \in \mathcal{H}^D$ より, $v_p \equiv (2^{-1/2})v_0 \oplus (1/2)(v \oplus v^*)$ を取る. この時

$$(6.2) \quad \langle U^{D_p} v_p, v_p \rangle \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \langle U^{D_p} v_p, v_p \rangle &= (2^{-1} \langle I v_0, v_0 \rangle + (4^{-1}) \{ \langle U^D v, v \rangle + \langle U^{D^*} v^*, v^* \rangle \}) \\ &= 2^{-1} + (2^{-1}) (\Re \langle U^D v, v \rangle) \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

系 6-1-3. 系 6-1-2 の $D_p \equiv I \oplus D \oplus D^*$ と v_p について

$$(6.3) \quad \forall g \in G, \quad \langle T_g^{D_p} U^{D_p} v_p, v_p \rangle \geq 0.$$

証明 任意の再表現 $U \equiv \{U^D\}$ と $T_g \equiv \{T_g^D\}$ では, $T_g U \equiv \{T_g^D U^D\}$ はまた再表現となる. 従って系 6-1-2 より結果は従う. $\square$

以後, 閉型帰納極限群 G の場合の再表現 $U \equiv \{U^D\}$ に限って話しを進める.

G の巡回ユニタリ表現 $D = \{\mathcal{H}^D, T_g^D, v^D\}$ を取る. それが属する正の定符号関数を $\eta^D(g) \equiv \langle T_g^D v^D, v^D \rangle$ で示す. ここで次の記号を入れる.

$$K^D(g) \equiv \langle T_g^D U^D v^D, v^D \rangle.$$

こうすると

補題 6-2

$$(6.4) \quad \sup_{g \in G} |K^D(g)| = \sup_{g \in G} |\eta^D(g)| = \eta^D(e) = \|v^D\|^2 = 1.$$

証明 $\|v^D\| = 1$ であり, U^D, T_g^D はユニタリであるから $|K(g)| \leq 1$.

今, $\delta > 0$ があって $a \equiv \sup_{g \in G} |K^D(g)| < 1 - \delta$ となっていたとする.

関数 $\eta^D(g)$ は連続だから, G の e のある近傍 V を取って

$$g \in V \implies \Re(\eta^D(g)) > 1 - \delta \quad \text{と出来る.}$$

5 章の結果を使い $[\langle R_g f^\sim, f^\sim \rangle] \subset V$ となる様な準正則表現 $\mathfrak{R} \equiv \{\mathfrak{H}, R_g, f^\sim\}$ を取り, テンソル積 $D^1 \equiv (D \otimes \mathfrak{R}) = \{(\mathcal{H}^D \otimes \mathfrak{H}), T_g^D \otimes R_g, v^D \otimes f^\sim\}$ を作る.

$$(6.5) \quad W(U^{D^1}(v^D \otimes f^\sim)) = U^{\mathfrak{R}} W(v^D \otimes f^\sim) = U^{\mathfrak{R}} (\langle T_*^D v^D, v^D \rangle f^\sim(*)).$$

(W は (5.7) で与えた作用素).

一方

$$(6.6) \quad W(U^{D^1}(v^D \otimes f^\sim)) = W(U^D v^D \otimes U^{\mathfrak{R}} f^\sim) = v^D \otimes (\langle T_*^D U^D v^D, v^D \rangle U^{\mathfrak{R}} f^\sim(*)).$$

両辺のノルムを計算して次を得る.

$$(6.7) \quad \|U^{\mathfrak{R}} (\langle T_*^D v^D, v^D \rangle f^\sim(*))\| = \|\langle T_*^D v^D, v^D \rangle f^\sim(*)\|$$

$$\begin{aligned}
&> (1 - \delta) \|f^\sim\| = 1 - \delta. \\
(6.8) \quad &\| \langle T_*^D U^D v^D, v^D \rangle U^{\mathfrak{R}} f(*) \| = \|K(*) U^{\mathfrak{R}} f(*)\| \\
&< (1 - \delta) \|U^{\mathfrak{R}} f^\sim\| = (1 - \delta) \|f^\sim\| = 1 - \delta.
\end{aligned}$$

これは矛盾である. $\square$

注意 6-1 準正則表現の代わりに正則表現を使って, 上記と同様な議論をする事により, 局所コンパクト群に対しても同じ結論を導く事が出来る.

7 適合群に対する双対定理

定義 7-1 位相群 G が次の (1)-(3) の条件を満たす時, G を **適合群** (well-behaved group) と言う.

- (1) G は SSUR を持つ.
- (2) G は完備である.
- (3) 任意の再表現 $U \equiv \{U^D\}_D$ が全ての巡回ユニタリ表現 $D \equiv \{\mathcal{H}^D, T_g^D, v^D\}$ ($\|v^D\| = 1$) に対して次を満たす:

$$\sup_{g \in G} |\langle T_g^D U^D v^D, v^D \rangle| = 1.$$

これまでの議論から次が判る.

補題 7-1 局所コンパクト群や閉型帰納極限群は適合群である.

ここで再表現 $U \equiv \{U^D\}_D$, を一つ固定する. そして §6 で定めた関数 $K^D(g) \equiv \langle T_g^D U^D v^D, v^D \rangle$ を使う.

系 6-1-3 で与えた表現 $D_p \equiv I \oplus D \oplus D^*$ は $K^{D_p}(g) \geq 0$ を満たす次の巡回部分表現を持つ.

$$(D_p) = \{(C \oplus \mathcal{H}^D \oplus (\mathcal{H}^D)^*), I \oplus T_g^D \oplus (T_g^D)^*, v_p \equiv (2^{1/2})v_0 \oplus (1/2)(v \oplus v^*)\}.$$

補題 7-2 もし $\forall g \in G, \quad K^{D_p}(g) = \langle T_g^{D_p} U^{D_p} v_p, v_p \rangle \geq 0$ ならば,

$$(7.1) \quad \inf_{g \in G} (1 - K^{D_p}(g)) = 0.$$

証明 U^{D_p} はユニタリ作用素であり, $\|v_p\| = 1$ であるから $1 \geq K^{D_p}(g) \geq 0$ である, すなわち $|K^{D_p}(g)| = K^{D_p}(g)$.

定義 7-1 (3) より $\sup_{g \in G} K^{D_p}(g) = 1$ となり結論が出る. $\square$

Ω_+ で、次を満たす巡回ユニタリ表現 D の全体を示す：

$$\forall g \in G \quad K^D(g) = \langle T_g^D U^D v^D, v^D \rangle \geq 0.$$

上記の議論から Ω_+ は (D_p) の形の巡回ユニタリ表現全てを含む。

さて $K^{D_1}(g), K^{D_2}(g) \geq 0$, なら $K^{D_1}(g) \times K^{D_2}(g) \geq 0$ だから,

補題 7-3

$$D_1, D_2 \in \Omega_+ \implies (D_1 \otimes D_2) \in \Omega_+.$$

そして対応する正の定符号関数は $K^{D_1 \otimes D_2}(g) = K^{D_1}(g) \times K^{D_2}(g)$ となる。

ここで適合群 G とその上の再表現 $U \equiv \{U^D\}$ を取ると,

補題 7-4 $\varepsilon > 0$ と $D \in \Omega_+$ に対して $F(D, \varepsilon) \equiv \{g \mid (1 - K^D(g)) < \varepsilon\}$ と書き, 次の集合族を考える。

$$(7.2) \quad Z = \{F(D, \varepsilon)\}_{D \in \Omega_+, \varepsilon > 0}.$$

この系 Z は集合の “含む, 含まれる” の順序によって G 上の *Cauchy* フィルター基を与える。

証明 定義 7-1 の条件 (3) から $F(D, \varepsilon) \neq \emptyset$ である。また明らかに

$$(7.3) \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \implies F(D, \varepsilon_1) \supseteq F(D, \varepsilon_2).$$

二つの巡回表現 $D^j \equiv \{\mathcal{H}^j, T_g^j, v^j\}$ ($j = 1, 2$) に対して, $D^0 \equiv (D^1 \otimes D^2)$ を考えると, $0 \leq K^{D^1}(g), K^{D^2}(g) \leq 1$ だから 補題 7-3 より,

$$K^{D^0}(g) = K^{D^1}(g) K^{D^2}(g) \leq K^{D^1}(g), K^{D^2}(g) \quad \text{となり, 次が出る.}$$

$$(7.4) \quad 1 - K^{D^0}(g) \geq 1 - K^{D^1}(g), 1 - K^{D^2}(g).$$

すなわち

$$(7.5) \quad F(D^1, \varepsilon) \cap F(D^2, \varepsilon) \supseteq F(D^0, \varepsilon) \neq \phi.$$

これは Z がフィルター基となる事を示す。

次に $1 - K^D(g) < \varepsilon$ とすると

$$(7.6) \quad \|T_g^D U^D v^D - v^D\|^2 = \|T_g^D U^D v^D\|^2 + \|v^D\|^2 - 2K^D(g) = 2(1 - K^D(g)) \leq 2\varepsilon.$$

これより

$$(7.7) \quad \|U^D v^D - T_{g^{-1}}^D v^D\| = \|T_g^D U^D v^D - v^D\| \leq (2\varepsilon)^{1/2}.$$

そこで $g, h \in F(D, \varepsilon)$ なら

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \|T_{hg^{-1}}^D v^D - v^D\| &= \|T_g^D v^D - T_{h^{-1}}^D v^D\| \\ &\leq \|T_g^D v^D - U^D v^D\| + \|U^D v^D - T_{h^{-1}}^D v^D\| \leq 2(2\varepsilon)^{1/2}. \end{aligned}$$

定義 7-1 (1) の SSUR を持つと言う条件から, G の e の任意の近傍 V を与えると, ある $D \in \Omega_+$ と $\delta > 0$ があって, $\{g \in G \mid |\langle T_g^D v, v \rangle - 1| < \delta\} \subset V$ を満たす.

しかし, $\|T_g^D v^D - v^D\|^2 = 2(1 - \Re \langle T_g^D v^D, v^D \rangle) = 2(1 - \langle T_g^D v^D, v^D \rangle)$ だから $\zeta > 0$ を $\zeta^2 < 2\delta$ と取れば, $\|T_g^D v^D - v^D\| < \zeta \Rightarrow g \in V$ となる.

まとめて, $2(2\varepsilon)^{1/2} < \zeta$, $\zeta^2 < 2\delta$ 結局, $4\varepsilon < \delta$ と置けば,

$g, h \in F(D, \varepsilon)$ なら.

$$(7.9) \quad \|T_{hg^{-1}}^D v^D - v^D\| < \zeta \quad \text{つまり} \quad hg^{-1} \in V,$$

となる. すなわち,

$$(7.10) \quad F(D, \varepsilon)F(D, \varepsilon)^{-1} \subset V.$$

これは Z が Cauchy フィルター基となる事を示す. □

補題 7-5 $g_U \in G$ が一意的にあって, 次を満たす.

$$(7.11) \quad \forall D \in \Omega_+, \quad U^D v^D = T_{g_U}^D v^D.$$

証明 定義 7-1 (2) より G は完備である. だから Cauchy フィルター基 Z は G の 1 点 $(g_U)^{-1}$ に収束する, すなわち, $\bigcap_{(D, \varepsilon)} \zeta(D, \varepsilon) = \{(g_U)^{-1}\}$.

ここで $D \in \Omega_+$, だから $\bigcap_{\varepsilon} \zeta(D, \varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon} \{g \mid 1 - \langle T_g^D U^D v^D, v^D \rangle < \varepsilon\} \ni (g_U)^{-1}$.

この事は

$$1 = \langle T_{(g_U)^{-1}}^D U^D v^D, v^D \rangle, \quad \text{従って} \quad T_{(g_U)^{-1}}^D U^D v^D = v^D, \quad \text{つまり}$$

$$U^D v^D = T_{g_U}^D v^D, \quad \text{を意味する.} \quad \square$$

補題 7-6 任意の D で, $U^D = T_{g_U}^D$.

証明 $\forall v \in \mathcal{H}^D$ ($\|v\| = 1$), で巡回表現 $(D) \equiv \{(\mathcal{H}^D, T_g^D, v^D)\}$ を考える. 続いて, (D) に対して, 系 1-1-1 の D_p を作る. すなわち

$$(7.12) \quad (D_p) = \{(C \oplus \mathcal{H}^D \oplus (\mathcal{H}^D)^*), I \oplus T_g^D \oplus (T_g^D)^*, v_p\} \in \Omega_+.$$

補題 7-5 により, $U^{D_p} v_p = T_{g_{U_p}}^{D_p} v_p$ となるから

$$(7.13) \quad I v_0 \oplus U^D v \oplus (U^D)^* v^* = I v_0 \oplus T_{g_U}^D v \oplus T_{g_U}^{D*} v^*.$$

すなわち $U^D v = T_{gv}^D v$ が得られた. ここで v は空間 $\mathcal{H}^D$ の中の任意の正規化ベクトルに取れるから, 結局, 全空間で $U^D = T_{gv}^D$ が示された. $\square$

結論として, 適合群に対する淡中型弱双対定理が示された.

定理 2 任意の適合群に対して淡中型弱双対定理が成立する.

補題 7-1 をこの結果に適用すれば,

系 A 任意の局所コンパクト群に対して淡中型弱双対定理が成立する.

系 B に任意の閉型帰納極限群に対して淡中型弱双対定理が成立する.

参考文献

- [1] N.Tatsuuma, A duality theorem for locally compact groups. J. Math. Kyoto Univ., **6**(1967), 187-293.
- [2] N.Tatsuuma, Duality theorem for inductive limit group of direct product type. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B7**(2008), 13-23.
- [3] N.Tatsuuma, H.Shimomura and T.Hirai, On group topologies and unitary representations of inductive limits of topological groups and the case of the group of diffeomorphisms. J. Math. Kyoto Univ., **38**(1998), 551-578.