

不確定セルオートマトンによる不確定並列写像の 逆写像と単射性について

夜久竹夫 早大理工

あらすじ. 様相の集合の上で定義されている二項関係(不確定写像)はこれを導入する不確定セルオートマトン(以下で, "不確定" を省略する)が存在するとき不確定並列写像という. 本報告では不確定並列写像の逆写像が不確定並列写像であるための必要十分条件, さらに単射であるための必要十分条件を与える. これらは導入するセルオートマトンが与えられている場合とそうでない場合に分けて考察され, 後者の場合, Richardson [1] の手法が用いられる. なお, 前者の場合, 単射であるための等価条件は semi-recursive な述語で与えられる.

1. セルオートマトン を $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ とあらわす[6].
ここで V は 状態集合, $\mathbb{Z}$ は 整数の集合, d は 次元, X は 近傍指数, f は 局所関係 である. f は写像として不確定なほいても含む. 又, 一般には totally defined とは限らないとする.

$d > 0$ と有限集合 V に対して写像 $c: \mathbb{Z}^d \rightarrow V$ を 様相 とい
 い、このような様相の集合を $C_{d,V}$ であらわす (d, V は省
 略されることがある). 関係 $R \subseteq C \times C$ は通常の方法で R
 を導入するセルオートマトンが存在すると 不確定並列写像
 (並列関係) という. 様相の有限集合への制限を パターン と
 いい、上と同様にして パターン上の不確定並列写像 が定義さ
 れる. これを F_P であらわす.

2.

定義. セルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ により導入
 されるパターン上の不確定並列写像 F_P が有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$
 ($0 \in A$) について A -独立 であるとは、任意のパターン
 $p: A \rightarrow V$ と $p': A \rightarrow V$ に対して

$$F_P(p) \ni q, F_P(p') \ni q$$

ならば、 $r(0) = p'(0)$, $r(i) = p(i)$ ($i \neq 0$) なる $r: A \rightarrow V$
 に対して $F_P(r) \ni q$ となることをいう. $\square$

定義. セルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ の近傍指数 X
 に対して集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が 十分大きい とは、任意の $i \in \mathbb{Z}^d$ に対
 して

$$\bar{X}(0) \cap \bar{X}(i) = \emptyset \text{ 又は } (\mathbb{Z}^d - \bar{X}(A)) \cap \bar{X}(i) = \emptyset$$

である。ただし $\bar{X}(i)$ は i の近傍、 $\bar{X}(A)$ は A の元の近傍の和集合。 $\square$

補題 1. F を $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ によって導入される totally defined な不確定並列写像とする。もし F の逆写像 F^{-1} が $M' = (V, \mathbb{Z}^d, Y, g)$ によって導入される不確定並列写像ならば、 X について十分大きな $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が存在して F_F は A -独立である。 $\square$

セルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ と有限集合 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($a_i \neq \emptyset$) に対して、 $M(A) = (V, \mathbb{Z}^d, Y, g)$ をつぎのようなセルオートマトンとする。(i). $Y = (y_1, \dots, y_{n'})$ は $A = \bigcap_{i=1}^n \bar{Y}(x_i)$, ただし $X = (x_1, \dots, x_n)$, と取るような近傍であり。(ii) もし: パターン p が存在して $F_F(p) \ni q$, $p(\emptyset) = v$, $q(y_i) = v_i$ ($\forall i, 1 \leq i \leq n'$) ならば、

$$q(v_1, \dots, v_{n'}) \ni v \quad (1),$$

ただし F_F は M によって導入されるパターン上の不確定並列写像で $\text{dom } p = \bar{X}(Y(\emptyset))$ 又 $\text{dom } q = Y(\emptyset)$ である。つぎの定理は、不確定並列写像の逆写像が不確定並列写像であるための十分条件をあたえる。同時に、この条件がみたさ

れ F を F^{-1} に逆写像を導入するセルオートマトンが構成されることを示す。

定理1. F をセルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ に F を導入した F 不確定並列写像とする。 X について十分大きな有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ に対して $F|_A$ が A -独立ならば逆写像 F^{-1} は (1) で定義されたセルオートマトン $M(A)$ に F^{-1} を導入される不確定並列写像である。

証明. $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ($a_1 = 0$), $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_{n'})$, $M(A) = (V, \mathbb{Z}^d, Y, g)$ とする。 G を $M(A)$ に G を導入される不確定並列写像とする。はじめに、 $F^{-1}(d) \ni c$ ならば $G(d) \ni c$ を示す。

任意の $i \in \mathbb{Z}^d$ に対して p, q を i の i -相補 c, d の $\chi(\bar{A}(i))$ と $\bar{A}(i)$ への制限とする。このとき、 $p(i) \in g(q(i+y_1), \dots, q(i+y_{n'}))$ である。また $\bar{A}(i) = \{i+a_1, \dots, i+a_m\}$ 。

逆に、 $G(d) \ni c$ と仮定する。任意の $i \in \mathbb{Z}^d$ に対して $d(i) \in f(c(i+x_1), \dots, c(i+x_n))$ となることを示す。

(1) より 各 j ($1 \leq j \leq n$) (i は固定) に対して、 パー
 ーン p_j が存在して

$$\begin{cases} \text{dom } p_j = \bar{X}(\{i+a_1, i+a_2, \dots, i+a_m\}) \\ p_j(i+x_j) = c(i+x_j) \\ F_p(p_j) \ni q \end{cases}$$

また $q(i+a_k) = d(i+a_k) \quad (1 \leq k \leq m)$.

$r_1, r_2, \dots, r_n$ をつぎのようになる $\mathbb{P}A$ - π とする.

$$\begin{cases} r_1 = p_1 \\ r_{j+1}(x) = r_j(x) & (x \neq i+x_{j+1}) \\ & = p_{j+1}(x) & (x = i+x_{j+1}) \end{cases}$$

ただし, $1 \leq j \leq n$, $\text{dom } r_j = \bar{X}(\{i+a_1, i+a_2, \dots, i+a_m\})$.

すると $F_p(r_1) \ni q$ から, $F_p(r_n) \ni q$ がえられる. (したがって $d(i) \in f(c(i+x_1), \dots, c(i+x_n))$ である.)

Q.E.D.

定理 2. セルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ により導入された不確定並列写像 F の逆写像が不確定並列写像ならばこのときのみ, F_p は十分大きなある有限集合 A に対して A -独立である. $\square$

定理 1, 2 と Richardson [1] を結びつけて, 確定的並列写像の単射性についてつぎを得る.

定理3. F を静止状態 c_q をもつ 確定的セルオートマトン $M = (V, \mathbb{Z}^d, X, f)$ により導入される totally defined な 確定的並列写像とする. F が単射ならば, そのときにのみ X について十分大きな有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が存在して, F_P が A -独立であり, (1) で定義される $M(A)$ の局所関係 g が, 確定的, totally defined 又 c_q は $M(A)$ の静止状態である. $\square$

3. 不確定並列写像を導入するセルオートマトンの存在だけが仮定されている場合の結果をつぎに述べる. この日あい, 近傍が有限集合でおさえられているというところが Richardson により云いかえられているのでこの結果を用いる.

定理A (Richardson [1]). 様相の集合の上の二項関係 F が (静止状態をもつ) 不確定並列写像ならばそのときのみ, (F に静止状態が存在して) 次の (i) ~ (iii) が成り立つ;

$$(i) \quad F(c) \ni d \Rightarrow F(c^d) \ni d^d \quad \text{ただし, } c(i+d) = c^d(i), \quad d(i+d) = d^d(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d$$

$$(ii) \quad (c_i) \text{ が unique to accumulation point [1]} \\ c^* \text{ をもつ, } \text{dom } F \text{ の様相の無限列ならば} \\ [F(c^*) \ni d^* \Leftrightarrow d^* \text{ は } F(c_i) \ni d_i \text{ である}]$$

るような任意の列 (d_i) の accumulation point である].

(iii) $F(c) \ni d_1, F(c) \ni d_2, A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が有限
 $\Rightarrow d(i) \in \{d_1(i), d_2(i)\} \quad \forall i \in A$ であるよ
うな d に対して $F(c) \ni d$.

定義. 不確定並列写像 F が有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d (A \ni \emptyset)$ につい
て A-独立 とは, $F(c) \ni d, F(c) \ni d'$ ならば $e(\emptyset) = c',$
 $e(i) = c(i) (i \neq \emptyset)$ なる任意の e に対して $F(e) \ni d''$ となるこ
とをいう. 尤も $d(i) = d'(i) = d''(i) (i \in A), \square$

定理4 [5]. 不確定並列写像 F の逆写像が不確定並列写像
ならばこのとき $\mathbb{Z}^d$ のみ有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が存在して F が A -独立. $\square$

定理5 [5]. 静止状態 c_q をもつ ^(totally defined) 確定的並列写像 $F: C \rightarrow C$ が
単射ならばこのときのみ, (i) 有限集合 A が存在し F が A -
独立, (ii) c_q が F で静止状態, かつ (iii) F が全射 $\square$

1. D. Richardson, Tessellations with local transformations, JCSS 6(1972), 373 - 388.
2. 夜久竹夫, 不確定セルオートマトンに対する並列写像の全射性について, 数研講究録 179(1973), 127-140.
3. T. Yaku, The constructibility of a configuration in a cellular automaton, JCSS 7 (1973), 481 - 496.
4. —, Inverse and injectivity of parallel relations.
5. —, Forward continuity and injectivity of parallel relations.
6. H. Yamada and S. Amoroso, Tessellation automata, Information and Control 14 (1969), 299 - 317.