

非線形問題解析の増分形式化

東大 生研 山田 嘉昭

非線形問題解析法の定式化には Lagrange 型と Euler 型の二つがある。Lagrange 型は主として、有限変形の非線形弾性論を出发点として生まれ、その増分形式は、元来の有限変形論の式を微分する形で作り出されたものである。これに比べて、Euler 型は比較的新しく、とくに材料の塑性変形に関連して、最初から増分形式で書かれるのが特徴である。

弾性解析に成功を収めた有限要素法を材料非線形問題や大変形の幾何学的非線形問題に適用するに当たって、初めに多く用いられたのは Lagrange 型の定式化である。ここでは、それに対抗して、また将来の発展を見通すという見地から、Euler 型の増分形式定式化について、まとめておきたいと思う。

なお本稿は、筆者の近著¹⁾の主要な点を要約し、若干を

1) 山田嘉昭, 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座, II-2-A, 培風館, 1972.

れを一般化した形になっている。さらに筆者らが 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis のために用意した論文²⁾も参照いたけると幸いである。

1. 材料特性とその評価

1. 1 塑性体 降伏条件として、次の二つがある。

$$\text{等方硬化 (isotropic hardening)} \quad f(\sigma_{ij}) = C \quad (1)$$

$$\text{移動硬化 (kinematic hardening)} \quad f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = C \quad (2)$$

C は一般に塑性仕事の関数とされ、そのひずみ履歴に対する依存性は、単軸引張りまたは圧縮試験によって評価することができる。ただし異方性材料では、ラングホードの r 値などを必要とする。土や岩盤など圧縮性材料では、引張りのほかにせん断試験などが必要となる。

応力-ひずみ関係あるいは構成方程式を、等方塑性体について記述すれば

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E (d\varepsilon - d\varepsilon^p) = E d\varepsilon - \frac{E}{H'} d\sigma \quad (3)$$

または

$$d\sigma = E d\varepsilon - \frac{E^2}{E+H'} d\varepsilon \quad (4)$$

2) Yamada, Y., Takatsuka, K. and Iwata, K., Nonlinear Analysis by the Finite Element Method and Some Expository Examples, to appear Proceedings of the Seminar, Univ. of Tokyo Press, 1973.

または

$$d\sigma = H'_0 d\varepsilon, \quad H'_0 = \frac{EH'}{E+H'} \quad (5)$$

式(3)と式(4)の表示を初期応力法, 式(5)の表示を接線係数法という。3次元問題の応力-ひずみマトリックスは, 上の表示を拡張して得られる。

$$\{d\sigma\} = [D^e]\{d\varepsilon\} - \frac{1}{g}[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]\{d\sigma\} \quad (6)$$

または

$$\{d\sigma\} = [D^e]\{d\varepsilon\} - \frac{[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]}{g + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}}\{d\varepsilon\} \quad (7)$$

または

$$\{d\sigma\} = [D^p]\{d\varepsilon\}, \quad [D^p] = [D^e] - \frac{[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]}{g + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \quad (8)$$

ここに

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}df = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]\{d\sigma\} = \frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]\{d\varepsilon\}}{g + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right][D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \quad (9)$$

ただし

$$g = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\sigma]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}(H' + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} \frac{dT}{d\varepsilon^p}), \quad H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon^p} \quad (10)$$

とくに Mises や Hill の降伏条件では

$$[\sigma]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} = \bar{\sigma}, \quad \{d\varepsilon^p\} = \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}df = \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}d\varepsilon^p \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}}[\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \ 2\tau'_{yz} \ 2\tau'_{zx} \ 2\tau'_{xy}] \quad (12)$$

1. 2 粘弾性体

一般化 Maxwell モデルと一般化 Voigt

モデルの二つ系列があり, 前者はひずみ入力に対する応力応答, 後者は応力を入力とするときのひずみ応答の解析に適し

ている。

単位ひずみ入力に対する一般化 Maxwell モデルの応力応答すなわち応力緩和は

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} = E e^{-t/T} + \sum_i E_i e^{-t/T_i}, \quad T = \eta/E, \quad T_i = \eta_i/E_i \quad (13)$$

$E(t)$ を緩和弾性率という。単位応力を入力するときの一般化 Voigt モデルのひずみ応答，すなわちフリー・フロー（または遅延弾性）は

$$C(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma(t)} = C + \frac{t}{\eta} + \sum_i C_i (1 - e^{-t/T_i}), \quad T_i = C_i \eta_i \quad (14)$$

$C(t)$ をフリー・フローコンプライアンスという。

上と同様にして， $\epsilon^* e^{j\omega t}$ のひずみ入力に対する一般化 Maxwell モデルの応力応答は

$$\frac{\sigma^*}{\epsilon^*} = E(j\omega) = E \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} + \sum_i E_i \frac{j\omega T_i}{1 + j\omega T_i} \quad (15)$$

$\sigma^* e^{j\omega t}$ の周期応力に対する一般化 Voigt モデルのひずみ応答は

$$\frac{\epsilon^*}{\sigma^*} = C(j\omega) = C \frac{1 + j\omega T}{j\omega T} + \sum_i \frac{C_i}{1 + j\omega T_i} \quad (16)$$

$E(j\omega)$ を複素弾性率， $C(j\omega)$ を複素コンプライアンスという。

上記は，単軸応力場における粘弾性体の応答で，一般化 Maxwell 体といえば，個々の要素についての構成方程式

$$\dot{\sigma}_i = E_i \dot{\epsilon}_i - \sigma_i/T_i \quad (17)$$

をひずみ入力 $\epsilon_i(t) = \epsilon(t) = 1(t)$ または $\epsilon^* e^{j\omega t}$ に対して

解き，全要素についての総和をとって，式(13)または式(15)が得られたのである。式(17)を3次元問題に拡張した場合の式は

$$\{\dot{\sigma}_i\} = [D_i^e]\{\dot{\epsilon}\} - \{\dot{\sigma}_{ai}\} \quad (18)$$

$$\{\dot{\sigma}_{ai}\} = \frac{1}{3T_{qi}T_{ki}} \begin{bmatrix} T_{qi}+2T_{ki} & & & & & \\ T_{qi}-T_{ki} & T_{qi}+2T_{ki} & & & & \\ T_{qi}-T_{ki} & T_{qi}-T_{ki} & T_{qi}+2T_{ki} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3T_{ki} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3T_{ki} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3T_{ki} \end{bmatrix} \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{matrix} \quad (19)$$

SYM.

あるいは

$$\{\dot{\sigma}_{ai}\} = \frac{1}{T_{qi}}\{\sigma_i'\} + \frac{1}{T_{ki}}\{\sigma_{mi}\}, \quad T_{qi} = \frac{\eta_{qi}}{G_i}, \quad T_{ki} = \frac{\eta_{ki}}{K_i} \quad (20)$$

式(19)や式(20)から明らかなように，粘弾性体の構成式の中には，せん断変形の η_{qi} ， G_i および体積変形の η_{ki} ， K_i が含まれている。したがって非圧縮性の塑性体の場合とは異なり，単軸試験の軸方向変位と応力の関係だけでは不十分である。

2. 各種のひずみと応力

2.1 Greenのひずみ増分 $[\dot{\lambda}]$ とEulerのひずみ増分 $[\dot{\epsilon}]$

いずれもテンソル量であって，両者間の関係は

$$[\dot{\lambda}] = [J][\dot{\epsilon}][J]^T, \quad [\dot{\epsilon}] = [G][\dot{\lambda}][G]^T \quad (21)$$

$$[\dot{\lambda}] = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{11} & \dot{\lambda}_{12} & \dot{\lambda}_{13} \\ \dot{\lambda}_{21} & \dot{\lambda}_{22} & \dot{\lambda}_{23} \\ \dot{\lambda}_{31} & \dot{\lambda}_{32} & \dot{\lambda}_{33} \end{bmatrix}, \quad [\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial X & \partial y/\partial X & \partial z/\partial X \\ \partial x/\partial Y & \partial y/\partial Y & \partial z/\partial Y \\ \partial x/\partial Z & \partial y/\partial Z & \partial z/\partial Z \end{bmatrix}, \quad [J][G] = [I] \quad (23)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (24)$$

2. 2 各種の応力 Lagrange の応力 $[s]$, Euler の応力 $[\sigma]$, Kirchhoff の応力 $[t]$ および Cauchy の応力 $[\tau]$ があって, 相互の関係は

$$[s] = [t][J], \quad [t] = [s][G] \quad (25)$$

$$[s] = \frac{\rho_0}{\rho} [G]^T [\sigma], \quad [\sigma] = \frac{\rho}{\rho_0} [J]^T [s] \quad (26)$$

$$[t] = \frac{\rho_0}{\rho} [G]^T [\sigma][G], \quad [\sigma] = \frac{\rho}{\rho_0} [J]^T [t][J] \quad (27)$$

$$[t] = \frac{\rho_0}{\rho} [\tau], \quad [\tau] = \frac{\rho}{\rho_0} [t] \quad (28)$$

Cauchy の応力 $[\tau]$ は, 第2種 Piola-Kirchhoff の応力とよばれることがある。

Euler の応力増分 $[\dot{\sigma}]$ と Lagrange の応力増分 $[\dot{s}]$ の関係は

$$[\dot{s}] = \frac{\rho_0}{\rho} [G]^T [\dot{\sigma}] - \frac{\dot{\rho}}{\rho} [s] - [G]^T [\dot{j}]^T [s] \quad (29)$$

考えている変形段階を基準として増分を考えるときは, $\rho = \rho_0$,

$[G]^T = [I]$ であるから

$$[\dot{s}] = [\dot{\sigma}] - \frac{\dot{\rho}}{\rho} [s] - [\dot{j}]^T [s]$$

ただし

$$[\dot{j}]^T = \begin{bmatrix} \partial U_x / \partial x & \partial U_x / \partial y & \partial U_x / \partial z \\ \partial U_y / \partial x & \partial U_y / \partial y & \partial U_y / \partial z \\ \partial U_z / \partial x & \partial U_z / \partial y & \partial U_z / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{32} \\ \dot{\epsilon}_{13} & \dot{\epsilon}_{23} & \dot{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(22)と式(30)における $\dot{\epsilon}_{ij}$ の定義は、必ずしも一致しないことに注意を要する。

3. 増分形の仮想仕事の原理

Lagrange 系で記述された次の式から出発するのが便利である。

$$\int [\delta \dot{\epsilon}] \{ \dot{s} \} dV = \int [\delta v] \{ \dot{\bar{x}} \} dV + \int [\delta V] \{ \dot{F}_0 \} dS \quad (31)$$

式(31)から、2次元問題に対して、Euler系で記述した次の表示が得られる。

$$\begin{aligned} \int [\delta \dot{\epsilon}] \{ \dot{\sigma} \} dV - \int [\delta \dot{\epsilon}] \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{11} \sigma_{11} + \dot{\epsilon}_{21} \sigma_{21} \\ \dot{\epsilon}_{11} \sigma_{12} + \dot{\epsilon}_{21} \sigma_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \sigma_{11} + \dot{\epsilon}_{22} \sigma_{21} \\ \dot{\epsilon}_{12} \sigma_{12} + \dot{\epsilon}_{22} \sigma_{22} \end{array} \right\} dV &= \int [\delta v] \{ \dot{\bar{x}} \} dV + \underbrace{\int [\delta V] \{ \dot{F} \} dS}_{\text{dS}} \\ &+ \int \frac{\dot{\rho}}{\rho} [\delta \dot{\epsilon}] \{ \sigma \} dV - \int \frac{\dot{\rho}}{\rho} [\delta v] \{ \bar{x} \} dV + \int [\delta V] \left(\frac{d\dot{S}}{dS} + \frac{dU_z}{dz} \right) \{ F \} dS \quad (32) \end{aligned}$$

最後の積分は、次のように置きかえることができる。

$$-\int [L\delta V] \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} \{F\} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{l}_1 + \dot{\epsilon}_{11}l_1 + \dot{\epsilon}_{12}l_2 \\ \dot{l}_2 + \dot{\epsilon}_{21}l_1 + \dot{\epsilon}_{22}l_2 \end{Bmatrix} \right) dS \quad (33)$$

ただし l_1 と l_2 は面要素 dS の変形前の方向余弦, $d\dot{S}$ は dS の長さの変化を表わすものとする。ここで, 次の関係が成立することに注意する。

$$d\dot{S}/dS = \dot{\epsilon}_{11} l_1^2 - (\dot{\epsilon}_{21} + \dot{\epsilon}_{12}) l_1 l_2 + \dot{\epsilon}_{22} l_2^2 \quad (34)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{22} & -\dot{\epsilon}_{12} \\ -\dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} - \frac{d\dot{S}}{dS} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$\dot{\rho}/\rho = -\dot{V}/V = -(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \frac{dU_z}{dz}) \quad (36)$$

4. 回転に対する要素構成方程式の補正

主応力方向に回転がないとき, 増分形の構成方程式が式 (6), 式 (7), 式 (18) と同じく

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\epsilon\} - \{d\sigma_a\} \quad (37)$$

で与えられているとする。平面応力場で表示し, 等方弾性とすれば

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d\sigma_{xa} \\ d\sigma_{ya} \\ d\tau_{xya} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

$\{d\sigma\}$ と $\{d\epsilon\}$ は空間固定の座標に対して定義された Euler の応力増分とひずみ増分を表わすことに注意する。主応力方向

が回転し，そのことを考慮するときは，式(38)の代わりに，次の表示を用いなければならない。ただし，補正は主応力方向の回転に対して行なっていて，要素の回転それ自体に対するものでないことに注意する。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d\sigma_{x0} \\ d\sigma_{y0} \\ d\tau_{xy0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\tau_{xy} \\ -2\tau_{xy} \\ \sigma_y - \sigma_x \end{Bmatrix} d\theta \quad (39)$$

$d\theta$ は主応力方向の反時計まわりの角度を表わす。すなわち回転により，最後の項で表わされる見かけの応力増分が新たに加わることになると考えればよい。文献で Jaumann の応力率といわれているものは，要素の回転に対する補正を表わしているが，ここでは応力状態，具体的には主応力方向の回転に対し補正していることに注意を要する。

5. はり要素と幾何剛性マトリックス

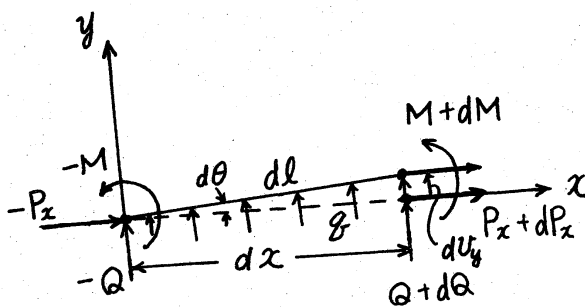


図 1

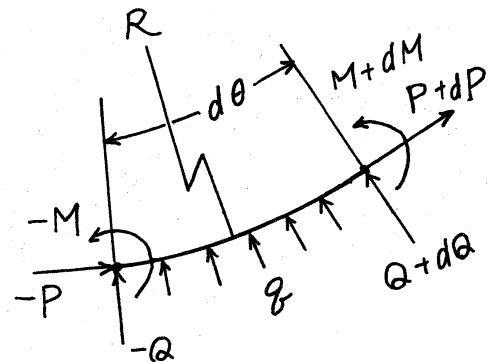


図 2

普通に行なわれている図1の理論では、つりあい方程式とその増分形は

$$\frac{dP_x}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + \mathcal{G} = 0, \quad \frac{dM}{dx} + Q - P_x \frac{dY}{dx} = 0 \quad \left(\frac{dY}{dx} = 0 \right) \quad (40)$$

$$\frac{d\dot{P}_x}{dx} = 0, \quad \frac{d\dot{Q}}{dx} + \dot{\mathcal{G}} = 0, \quad \frac{d\dot{M}}{dx} + \dot{Q} - P_x \frac{d\dot{U}_y}{dx} = 0 \quad (41)$$

仮想仕事の原理の表示式は

$$\begin{aligned} & \int \left(\dot{P}_x \delta \dot{E}_x + \dot{M} \frac{d^2 \delta U_y}{dx^2} \right) dx + \int P_x \left(\frac{d\delta U_y}{dx} \right)^2 dx - \int \dot{\mathcal{G}} \delta U_y dx \\ & = \dot{P}_x \delta U_x \Big|_1^2 + \dot{M} \frac{d\delta U_y}{dx} \Big|_1^2 + \dot{Q} \delta U_y \Big|_1^2 \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)から得られる剛性方程式は

$$([K] + P_x [K_G]) \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ \dot{\theta}_1 \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{P}_{x1a} \\ \dot{P}_{y1a} \\ \dot{M}_{1a} \\ \dot{P}_{x2a} \\ \dot{P}_{y2a} \\ \dot{M}_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{P}_{x1} \\ \dot{P}_{y1} \\ \dot{M}_1 \\ \dot{P}_{x2} \\ \dot{P}_{y2} \\ \dot{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

図2に示すような厳密な取扱いでは、式(42)に対応して

$$\begin{aligned} & \int \left(\dot{P} \delta \dot{E} + \dot{M} \frac{d\delta \dot{\theta}}{dl} \right) dl + \int P \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dl - (P \delta U_n - Q \delta U_t) \dot{\theta} \Big|_1^2 \\ & - \int \dot{\mathcal{G}} \delta U_n dl - \int \mathcal{G} (U_n \delta \dot{E} - U_t \delta \dot{\theta}) dl - \int Q (\dot{E} \delta \dot{\theta} + \dot{\theta} \delta \dot{E}) dl \\ & = \dot{P} \delta U_t \Big|_1^2 + \dot{M} \delta \dot{\theta} \Big|_1^2 + \dot{Q} \delta U_n \Big|_1^2 \end{aligned} \quad (44)$$

式(44)から導かれる剛性方程式を次に示す。

$$([K] + P[K_G]) \begin{Bmatrix} v_{t1} \\ v_{n1} \\ \dot{\theta}_1 \\ v_{t2} \\ v_{n2} \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q\dot{\theta}_1 \\ -P\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ -Q\dot{\theta}_2 \\ P\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{P}_{1a}^e \\ \dot{Q}_{1a}^e \\ \dot{M}_{1a}^e \\ \dot{P}_{2a}^e \\ \dot{Q}_{2a}^e \\ \dot{M}_{2a}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{P}_1^e \\ \dot{Q}_1^e \\ \dot{M}_1^e \\ \dot{P}_2^e \\ \dot{Q}_2^e \\ \dot{M}_2^e \end{Bmatrix} \quad (45)$$

ここに添字 a を付けた見かけの外力項は、式 (43) の対応する項にほとんど等しい。また左辺の第 2 項は $(P\delta v_n - Q\delta v_t)\dot{\theta}_1^2$ に由来する項である。式 (43) および式 (45) それぞれの右辺の節点荷重の間には、次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} \dot{P}_{x1} \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{M}_1 \\ \dot{P}_{x2} \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{P}_1^e \\ \dot{Q}_1^e \\ \dot{M}_1^e \\ \dot{P}_2^e \\ \dot{Q}_2^e \\ \dot{M}_2^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q\dot{\theta}_1 \\ -P\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ -Q\dot{\theta}_2 \\ P\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

したがって式 (43) と式 (45) は速度成分として、各変形段階で瞬間的に要素に固定の座標系 x, y に関する v_x, v_y を用いているか、要素とともに回転する座標系における速度成分 v_t, v_n を用いているかの差を別にすれば同じであることがわかる。

回転殻要素に対し、式 (44) に対応する仮想仕事の原理の式を求めると

$$\begin{aligned}
& \int (\dot{N}_\phi \delta \dot{E}_\phi + \dot{N}_\theta \delta \dot{E}_\theta + \dot{M}_\phi \frac{d\delta \dot{\phi}}{dl} - \dot{M}_\theta \frac{\delta \dot{\phi}}{r} \sin \phi) r dl + \int N_\phi \dot{\phi} \delta \dot{\phi} r dl \\
& + (N_\phi \delta v_n + Q \delta v_t) r \dot{\phi} \Big|_1^2 + \int (N_\phi + N_\theta) (\dot{E}_\phi \delta \dot{E}_\theta + \dot{E}_\theta \delta \dot{E}_\phi) r dl \\
& + \int M_\phi \frac{d\delta \dot{\phi}}{dl} v_r dl + \int \dot{M}_\theta \delta \dot{\phi} \frac{dv_r}{dl} dl + (Q \delta v_n - N_\phi \delta v_t - M_\phi \delta \dot{\phi}) v_r \Big|_1^2 \\
& - \int \dot{p} \delta v_n r dl - \int p (v_t \delta \dot{\phi} + v_n \delta \dot{E}_\phi) r dl - \int p \delta v_n v_r dl \\
& - \int Q (\dot{E}_\phi \delta \dot{E}_\theta + \dot{E}_\theta \delta \dot{E}_\phi) r dl = \dot{N}_\phi \delta v_t r \Big|_1^2 + \dot{M}_\phi \delta \dot{\phi} r \Big|_1^2 - \dot{Q} \delta v_n r \Big|_1^2 \quad (47)
\end{aligned}$$

6. 非線形問題における反覆計算

初期応力法での剛性方程式は一般に次の形に表わされる。

$$[K]\{du\} = \{dP\} + \{dPa\} + \{dQ\} \quad (48)$$

$\{dPa\}$ は粘弾性、熱膨張などによる見かけの外力増分、 $\{dQ\}$ は塑性や変形の幾何学的非線形性に由来する見かけの外力増分である。 $\{u\}$, $\{P\}$, $\{Pa\}$ に対しては前進差分、 $\{Q\}$ に対しては後退差分を用いると

$$[K]_i \{\Delta u\}_i = \{\Delta P\}_i + \{\Delta Pa\}_i + \{\Delta Q\}_{i-1} \quad (49)$$

$$\{\Delta u\}_i = \{u\}_{i+1} - \{u\}_i, \quad \dots, \{\Delta Q\}_{i-1} = \{Q\}_i - \{Q\}_{i-1}$$

幾何学的非線形問題を例にとると

$$\{dQ\} = -[K_G]\{du\} \quad (50)$$

ゆえに、式(49)は

$$[K]_i \{\Delta u\}_i = \{\Delta P\}_i + \{\Delta Pa\}_i - [K_G]_i \{\Delta u\}_{i-1} \quad (51)$$

$$\text{または} \quad \{\Delta u\}_i = [K]_i^{-1} (\{\Delta P\}_i + \{\Delta Pa\}_i) - [K]_i^{-1} [K_G]_i \{\Delta u\}_{i-1} \quad (52)$$

前段の計算で得られた変位増分を $\{\Delta u\}$ の第1近似解，すなわち $\{\Delta u\}_{i-1}$ として用い，式(52)を漸化式とする反覆計算を繰り返す。

計算の精度をあげるには，各計算のあとでつり合いの不均衡量を調べ，得られた残差に對して，見かけの外力を補正するようにすればよい。この場合の計算式は，式(49)に對應して

$$\left. \begin{aligned} [K]_i \{\Delta u\}_i &= \{\Delta P\}_i + \{\Delta P_a\}_i + \{\Delta Q\}_{i-1} + \{R\}_i \\ \{R\}_i &= \{P\}_{i-1} - \int [B]_{i-1}^T \{\sigma\}_{i-1} dV \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

接線係数法を用いる場合の剛性方程式は，たとえば幾何剛性項をもつ式(51)に對應して

$$([K]_i + [K_g]_i) \{\Delta u\}_i = \{\Delta P\}_i + \{\Delta P_a\}_i \quad (54)$$

この場合は適当な予測子・修正子法によって計算を進めればよい。なお残差の補正を行なうときは

$$\left. \begin{aligned} ([K]_i + [K_g]_i) \{\Delta u\}_i &= \{\Delta P\}_i + \{\Delta P_a\}_i + \{R\}_i \\ \{R\}_i &= \{P\}_{i-1} - \int [B]_{i-1}^T \{\sigma\}_{i-1} dV \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

残差の式に含まれているマトリックス $[B]$ は，ひずみ増分 $\{\dot{\epsilon}\}$ を節点変位増分 $\{\dot{u}\}$ に結びつけるマトリックス，すなわちひずみ-変位マトリックス

$$\{\dot{\epsilon}\} = [B] \{\dot{u}\} \quad (56)$$

を表わす。なお，式(53)や式(55)は，反覆計算の算式を表わ

すが、各変形段階に対して1回の適用を行なうときは、Eulerの前進差分に対し、Newton-Raphson法による補正を1回施す計算を表わすと見なすこともできる。

7. 結び

ここで概要を述べた Euler型の増分形定式化は、材料非線形問題での除荷(unloading)、幾何学的非線形問題での分岐および極限状態を含めた解析を可能にし、また一方では定式化が簡明であるので応用に便利である。しかしながら、実際の問題に適用して、数値解を算した上でないと、結果に思いつかない誤差を生じることがある。たとえば、上で式(43)と式(45)はほとんど同じであると述べたが、普通に x, y 座標系に關して用いている内挿関数をそのまま回転座標系に対し適用すると、大きな誤差の原因となる。一般に、とくに非線形問題では、見かけの上で定式化が正しいように見えても、單純にそれを受け入れると、危険を伴うことを覚悟しなければならない。