

合流型 Euler-Poisson-Darboux 方程式

と 戸田方程式

愛媛大, I, 梶高 惟倫.

(Yoshinori Kametaka)

# 1. 総論.

二変数関数の戸田方程式

$$(1.1) \quad XY \log t_n = t_{n+1} t_{n-1} / t_n^2 \quad (X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y})$$

の解を 合流型 E-P-D 方程式

$$(1.2) \quad (XY + \alpha X + \alpha - n) u_n = 0$$

の解  $u_n$  が構成できることがわかる。有理関数解, 合流型超キカ関数解, 二変数超キカ関数解 がよくわかった解の計表として得られた。(1.1) の解のよりクラスに属する変換群を求めた。1 つ解があるとき別の解を作る方法を与えたこととなる。すなわち解の変換公式が得られた。上の変換群に対応する固有関数を求めた。固有関数を用いることができた。上の変換群の作用をよく理解することができた。二変数超キカ関数のある部分は戸田方程式に再び再編成される。

## 2. Bäcklund 変換.

$t_n$  が (1.1) を満たすとき

$$(2.1) \quad r_n = XY \log t_n, \quad s_n = Y \log t_{n+1}/t_n$$

は次を満たす。これは Darboux 形式と呼ばれる。

$$(2.2) \quad Y r_n = r_n (s_n - s_{n+1}), \quad X s_n = r_{n+1} - r_n.$$

偏微分作用素の 3 つ組を

$$(2.3) \quad M_n = XY + s_{n+1} X + r_n, \quad X_n = -r_n^{-1} X, \quad Y_n = Y + s_{n+1}$$

とし、2変数関数  $u_n(x, y)$  を成分と93無限次元ベクトル空間  $T$  を次のように定める。

$$(2.4) \quad T = \{u_n; M_0 u_0 = 0, u_{n+1} = Y_n u_n (n \geq 0), u_{n+1} = X_n u_n (n \leq 0)\}$$

定理 2.1  $u_n \in T$  と93  $M_n u_n = 0, u_{n+1} = Y_n u_n,$

$u_{n+1} = X_n u_n$  ( $n$ ) 272, 2  $I_n = u_n t_n$  は (1.1) を満たす。

## 3. 変数分離解.

$r_n = f(n) g(x, y)$  の形の (2.2) の解を全て求めることは可能である。 $f(n)$  は  $n$  の2次多項式とする。 $\alpha, \beta$  は任意定数  $a(x), b(y)$  は任意関数と93

$$(i) \quad r_n = (n-\alpha)(n-\beta) a'(x) b'(y) (a(x) + b(y))^{-2},$$

$$(ii) \quad r_n = (n-\alpha) a(x) b(y)$$

$$(iii) \quad r_n = a(x) b(y)$$

とける。これらの解は Bäcklund 変換を繰り返して表現される場合を考慮する。([1], [2], [3], [4])

$$(i) \quad r_n = -(n-\alpha)(n-\beta)(x-y)^{-2}, \quad (ii) \quad r_n = -(n-\alpha), \quad (iii) \quad r_n = 1$$

(i), (ii), (iii) の場合  $M_n u_n = 0$  なる

$$(i) \quad M_n u_n = \{XY + (\alpha + \beta - 1 - 2n)(x-y)^{-1}X - (n-\alpha)(n-\beta)(x-y)^{-2}\} u_n = 0$$

(Euler-Poisson-Darboux 型)

$$(ii) \quad M_n u_n = \{XY + xX + \alpha - n\} u_n = 0$$

(合型 Euler-Poisson-Darboux 型)

$$(iii) \quad M_n u_n = \{XY + 1\} u_n = 0 \quad (\text{電信型})$$

とける。これは (ii) の場合を考慮する。(2.2) より

$S_n$  を満足し

$$(2.5) \quad XY \log r_n = r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}$$

の形の戸田方程式は G. Darboux ([5]) により発見され、  
 この最も重要な (= この系への主張) 解  $t_n = -(n-\alpha)(n-\beta)(\alpha-\beta)^{-2}$   
 と他自身の発見である。(i) の解の Bäcklund 変換を調べる  
 ことは Darboux が曲面論 II で展開した ことゆえ  
 E-I-D 方程式に対してより詳細な研究を 戸田方程式の立場  
 から行なうことは他にならぬ。(i) の場合は ([3], [4])  
 により すでにかなり複雑になる。より簡単な (ii), (iii) の場  
 合を 2 つのみに調べることも重要である。

#### 4. 変換群.

以下 (ii) の場合を考える。

$$(4.1) \quad t_n = F(n) e^{-(n-\alpha)xy}$$

$$(F(n+1)F(n-1)/F(n)^2 = -(n-\alpha), \quad F(0) = F(1) = 1)$$

は (1.1) を満たす。対応して

$$(4.2) \quad r_n = -(n-\alpha), \quad s_n = \alpha$$

と表すので

$$(4.3) \quad M_n = XY + s_n X + r_n = XY + \alpha X + \alpha - n,$$

$$X_n = -r_n^{-1} X = (n-\alpha)^{-1} X, \quad Y_n = Y + s_{n+1} = Y + \alpha$$

となる。これらの  $M_n, X_n, Y_n$  を使って (2.4) に  $xy$   $T$  を代入する。  $T$  は本質的に  $\mu$  変換子の解の集まりである。

定理 4.1 1 階偏微分作用素  $D = a(x,y)X + b(x,y)Y + c(x,y)$  が  $M_0$  と  $M_0$  を法として可換なもの全体の 4 次元  $\mu$ - $\nu$   $T$  の空間での基底は  $\tilde{X} = X + y, Y, Z = yY - xX, 1$  である。

上の  $\tilde{X}, Y, Z$  を生成作用素とする 1-parameter 変換群が構成でき、これらは  $\ker M_0$  を不変にする。これによって  $T$  を不変にする線形変換の 1-パラメータ群が作れる。 $(a)_n = \Gamma(n+a)/\Gamma(a)$  とする。

定理 4.2 (主定理)  $u_n \in T$  であるとき

$$(4.4) \quad \tilde{X}(\lambda) u_n(x, y) = e^{\lambda y} u_n(x + \lambda, y),$$

$$\tilde{Y}(\mu) u_n(x, y) = u_n(x, y + \mu),$$

$$\tilde{Z}(\nu) u_n(x, y) = e^{n\nu} u_n(e^{-\nu}x, e^{\nu}y),$$

$$(4.5) \quad R u_n(\alpha; x, y) = (-1)^n (\Gamma-\alpha)_n e^{-xy} u_n(\Gamma-\alpha; y, -x)$$

も  $T$  に属する。(4.5) の場合  $\alpha$  は  $u_n$  の次数

数と見、 $\lambda \neq 0$ 。  $\tilde{X}(\lambda)$ ,  $\tilde{Y}(\mu)$ ,  $\tilde{Z}_n(\nu)$  はそれぞれ  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}_n = \hat{Z} + n$  を生成作用素と有する線形変換の 1-parameter group のそれぞれ  $\ker M_n$  を不変と可なり。

$\{R^0 = \text{id.}, R, R^2, R^3, \dots\}$  は有限群となる。  $\tilde{X}u_n, \tilde{Y}u_n, \tilde{Z}_n u_n$  も又  $T$  に属する。

上の定理は 与えられた解  $u_n t_n$  より独立変数の変換が新しい解  $(\tilde{X}(\lambda)u_n) \cdot t_n, \dots$  が作れ、また微分する  $=$  とした上、 $\lambda$  も新しい解  $(\hat{X}u_n) \cdot t_n, \dots$  が作れる  $=$  とを意味する。 更に  $T$  は線形空間のみ、 $u_n t_n, v_n t_n$  ( $u_n, v_n \in T$ ) なる 2つの解より 線形結合  $(\text{const } u_n + \text{const } v_n) \cdot t_n$  としても新しい解が作れる。 次のような交換関係が成り立つ。

定理 4.3 (交換関係)

$$(4.6) \quad \tilde{X}(\lambda) \tilde{Y}(\mu) = e^{-\lambda\mu} \tilde{Y}(\mu) \tilde{X}(\lambda), \quad \tilde{X}(\lambda) \tilde{Z}_n(\nu) = \tilde{Z}_n(\nu) \tilde{X}(e^{-\nu}\lambda),$$

$$\tilde{Y}(\mu) \tilde{Z}_n(\nu) = \tilde{Z}_n(\nu) \tilde{Y}(e^{\nu}\mu),$$

$$(4.7) \quad \tilde{X}(\lambda) \hat{Y} = (\hat{Y} - \lambda) \tilde{X}(\lambda), \quad \tilde{X}(\lambda) \hat{Z}_n = (\hat{Z}_n - \lambda \hat{X}) \tilde{X}(\lambda),$$

$$\tilde{Y}(\mu) \hat{Z}_n = (\hat{Z}_n + \mu \hat{T}) \tilde{Y}(\mu), \quad \tilde{Y}(\mu) \hat{X} = (\hat{X} + \mu) \tilde{Y}(\mu),$$

$$\tilde{Z}_n(\nu) \hat{X} = e^\nu \hat{X} \tilde{Z}_n(\nu), \quad \tilde{Z}_n(\nu) Y = e^{-\nu} Y \tilde{Z}_n(\nu),$$

$$(4.8) \quad \hat{X} Y = Y \hat{X} - 1, \quad \hat{X} Z_n = (Z_n - 1) \hat{X},$$

$$Y Z_n = (Z_n + 1) Y,$$

$$(4.9) \quad \tilde{X}(\alpha) R = R \tilde{Y}(-1), \quad \tilde{Y}(\mu) R = R \tilde{X}(\mu), \quad \tilde{Z}_n(\nu) R = R \tilde{Z}_n(-\nu),$$

$$(4.10) \quad \hat{X} R = -R Y, \quad Y R = R \hat{X}, \quad Z_n R = -R Z_n.$$

5. 固有関数,

$Z_n$  の固有関数として超幾何関数  $F(\alpha, \beta; z)$  を作る。

定理 5.1  $T \cap \{u_n \in \ker(Z_n - \beta)\}$  は 2次元  $n+1$  次元空間で、その基底は  $A_n(\alpha) = \frac{(1-\alpha)_n}{(1-\beta)_n} x^{n-\beta}$ ,  $B_n(\gamma) = (-1)^n (-\beta)_n y^{\beta-n} \in L$

$$(5.1) \quad f_n(\alpha, \beta; x, y) = A_n(\alpha) F(\alpha - \beta, n + 1 - \beta; -xy),$$

$$(5.2) \quad g_n(\alpha, \beta; x, y) = B_n(\gamma) F(\alpha - n, 1 + \beta - n; -xy)$$

$$= B_n(\gamma) e^{-xy} F(1 + \beta - \alpha, 1 + \beta - n; xy) = R f_n(\alpha, -\beta; x, y)$$

である。  $\hat{X}, Y$  により次のように変換を行う。

$$(5.3) \quad (-\hat{X})^j f_n(\alpha, \beta; x, y) = (\beta)_j f_n(\alpha, \beta+j; x, y),$$

$$(-Y)^j f_n(\alpha, \beta; x, y) = \frac{(\alpha-\beta)_j}{(1-\beta)_j} f_n(\alpha, \beta-j; x, y),$$

$$\hat{X}^j g_n(\alpha, \beta; x, y) = \frac{(1+\beta-\alpha)_j}{(1+\beta)_j} g_n(\alpha, \beta+j; x, y),$$

$$(-Y)^j g_n(\alpha, \beta; x, y) = (-\beta)_j g_n(\alpha, \beta-j; x, y)$$

$$(j=0, 1, 2, \dots)$$

定理 5.2  $T \cap \{u_n \in \ker Y\} = T \cap \{u_n \in \ker Y \cap \ker (Z_n - \alpha)\}$

は 1 次元  $n$  個の空間であり、その基底は

$$(5.4) \quad p_n = x^{n-\alpha} = f_n(\alpha, \alpha; x, y)$$

である。

$$(5.5) \quad \hat{X}(\alpha) p_n = e^{1/y} (x+y)^{n-\alpha}$$

は 1 次元空間  $T \cap \{u_n \in \ker(Y-\lambda)\} = T \cap \{u_n \in \ker(Y-\lambda) \cap \ker(Z_n - \alpha - \lambda \hat{X})\}$

の基底である。

$$(5.6) \quad q_n = R p_n = (-1)^n (1-\alpha)_n e^{-xy} y^{\alpha+n} = g_n(\alpha, \alpha-1; x, y)$$

は 1 次元空間  $T \cap \{u_n \in \ker \hat{X}\} = T \cap \{u_n \in \ker \hat{X} \cap \ker (Z_n + 1 - \alpha)\}$   
 の基底である。

$$(5.7) \quad \tilde{Y}(\mu) \tilde{p}_n = R \tilde{X}(\mu) p_n = (-1)^n (1-\alpha)_n e^{-x(y+\mu)} (y+\mu)^{\alpha-1-n}$$

は 1 次元空間  $T \cap \{u_n \in \ker (\hat{X} + \mu)\} = T \cap \{u_n \in \ker (\hat{X} + \mu) \cap \ker (Z_n + 1 - \alpha + \mu Y)\}$   
 の基底である。

#### 6. 有理関数解.

前節の  $p_n, q_n$  はそれぞれ本質的に新しい解は存在しないが  $\hat{X}, Y$  を  $z = y$  と新しい解 (有理関数解) である。

#### 定理 6.1 (有理関数解)

$$(6.1) \quad P_{n,k} = (-\hat{X})^k p_n / p_n = (\alpha-n)_k x^{-k} F(-k, n+1-\alpha-k; -xy)$$

( $k=0, 1, 2, \dots$ ) は  $(x, y)$  についての  $k$  次齊次多項式である。

$$(6.2) \quad \begin{cases} S_n = \alpha - n + XY \log P_{n,k} = (\alpha-n) P_{n+1,k} P_{n-1,k} / P_{n,k}^2 \\ Q_n = x + Y \log P_{n-1,k} / P_{n,k} \end{cases}$$

は戸田方程式 (2.2) の有理関数解である。  $\tilde{P}_{n,k} = Z_n^k \hat{X}(n) p_n / \hat{X}(n) p_n$ ,  
 $Q_{n,k} = Y^k q_n / q_n$ ,  $\tilde{Q}_{n,k} = Z_n^k \tilde{Y}(\mu) q_n / \tilde{Y}(\mu) q_n$  は本質的に

特異点があり、 $\varepsilon$  は与えられた有理関数解を与える。

## 7. 超キカ関数解.

$T$  は線形空間があり、 $\varepsilon$  固有関数展開とし、 $\varepsilon$  様々の解を構成される。 $\varepsilon$  は整数  $a_j$  は任意数列とする。

$$(7.1) \quad u_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j f_n(\alpha, \beta + \varepsilon j; x, y)$$

は収束すれば  $T$  に属する。 $a_j$  が適当であれば  $u_n$  は  $\varepsilon$  重数超キカ関数を表わされる。 $\varepsilon$  重数超キカ関数は無限にあるので適当な  $a_j$  を設定して数に制限しなされるものがある。

Horn の表 (6) に「 $\varepsilon$  重の」という制限をつけるのは全部で 34 個であり、これを示す。これは (7.1) の  $u_n$  が Horn の表に登場する  $\varepsilon$  重数超キカ関数を表わされる場合を列挙する。

### 定理 7.1 (超キカ関数解)

$\alpha, \beta, \delta, \alpha', \beta'$  は任意定数を表わす。 $(\alpha)_j = \Gamma(\alpha + j) / \Gamma(\alpha)$

$$(i) \quad \varepsilon = 1, \quad a_j = (\alpha')_j (\beta)_j / (\delta)_j j!,$$

$$(7.2) \quad u_n = A_n(\alpha) e^{-xy} \sum_{j,k} \frac{(\beta - n)_j k (\alpha')_j (n + 1 - \alpha)_k}{(\delta)_j j! k!} x^j (-xy)^k$$

$$= A_n(\alpha) e^{-xy} {}_2F_2(\beta - n, \alpha', n + 1 - \alpha, \delta; x, -xy)$$

$$= {}_1F_1(\alpha', \delta; -\hat{X}) f_n(\alpha, \beta; x, y),$$

$$(7.3) \quad u_n(x_0) = A_n(\alpha) {}_2F_1(\alpha', \beta-n, \delta; x^{-1}).$$

$$\text{for } \delta = 1 + \beta - \alpha \quad \text{and } \delta \neq 2\alpha$$

$$(7.4) \quad u_n = A_n(\alpha) \sum_{j,k} \frac{(\alpha')_j (\beta-n)_{j-k}}{(1+\beta-\alpha)_{j-k} j! k!} x^{-j} (xy)^k$$

$$= A_n(\alpha) {}_1F_1(\alpha', \alpha-\beta, \beta-n; -x^{-1}, xy)$$

$$= {}_1F_1(\alpha', 1+\beta-\alpha; -\hat{X}) f_n(\alpha, \beta; x, y)$$

$$(7.5) \quad u_n(x_0) = A_n(\alpha) {}_2F_1(\alpha', \beta-n, 1+\beta-\alpha; x^{-1})$$

$$(ii) \quad \varepsilon = 1, \quad a_j = (e)_j / (\delta)_j j!$$

$$(7.6) \quad u_n = A_n(\alpha) e^{-xy} {}_2F_4(\beta-n, n+1-\alpha, \delta; x^{-1}, -xy)$$

$$= {}_0F_1(\delta; -\hat{X}) f_n(\alpha, \beta; x, y)$$

$$(7.7) \quad u_n(x_0) = A_n(\alpha) {}_1F_1(\beta-n, \delta; x^{-1})$$

$$\text{for } \delta = 1 + \beta - \alpha \quad \text{and } \delta \neq 2\alpha$$

$$\begin{aligned}
 (7.8) \quad u_n &= A_n(\alpha) \Gamma_2(\alpha-\beta, \beta-n; -x^{-1}, xy) \\
 &= {}_0F_1(1+\beta-\alpha; -\hat{x}) f_n(\alpha, \beta; x, y)
 \end{aligned}$$

$$(7.9) \quad u_n(x, 0) = A_n(\alpha) {}_1F_1(\beta-n, 1+\beta-\alpha; x^{-1}).$$

この他次の様な  $u_n$  が  $T$  に属する。

$$A_n(\alpha) e^{-xy} {}_1F_1(\beta-n, n+1-\alpha, \delta; x^{-2}, -xy),$$

$$A_n(\alpha) e^{-xy} {}_2F_1(\alpha', n+1-\alpha, \beta', n+1-\beta; x, xy),$$

$$A_n(\alpha) \Phi_1(\alpha-\beta, \beta', n+1-\beta; -xy, x),$$

$$A_n(\alpha) e^{-xy} \Phi_2(\beta', n+1-\alpha, n+1-\beta; x, xy),$$

$$A_n(\alpha) e^{-xy} \Phi_3(n+1-\alpha, n+1-\beta; xy, x).$$

副産物として  $\Gamma_1$  は  ${}_1F_2$  で、 $\Gamma_2$  は  ${}_1F_4$  で表わされる。

かわかる。

(1.2) に対して Riemann 関数を合流型超幾何関数で作れる。各種の積分表示を導くことも出来る。

## References

- [1] Y. Kametaka      On the telegraph equation and the Toda equation,      Proc. Japan Acad., (to appear)
- [2]        "              On the confluent Euler-Poisson-Darboux equation and the Toda equation,      日上
- [3]        "              On the Euler-Poisson-Darboux equation and the Toda equation I,      日上
- [4]        "              "                              II,      日上
- [5] G. Darboux      Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal II,      Chelsea 1972.
- [6] A. Erdelyi et al      Higher transcendental functions vol. 1, 224-227,      McGraw-Hill 1953.