

Local time penalizations with various clocks

Christophe Profeta (Université d'Evry-Val-d'Essonne)
矢野 孝次 (京都大学大学院理学研究科)
矢野 裕子 (京都産業大学理学部)

1 問題

$[0, \infty)$ を動く原点反射壁の一次元拡散過程に対し、局所時間処罰問題

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau)]}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau); \tau > t]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau); \tau > t]} \quad (1.1)$$

を考察する。但し、 t は固定時刻、 F_t は試験汎関数 (有界 $\mathcal{F}_t$ -可測汎関数)、 f は非負可測関数、 L_t は原点局所時間とする。極限において動かす τ は、無限大に向かうランダム時刻の特定の系に添うものとし、これを時計 (clock) と呼ぶこととする。

この問題のためには、極限

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) \mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)], \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) \mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau); \tau > t] \quad (1.2)$$

が自明でない量に収束するような関数 $\rho(\tau)$ を見つければよい。実際、 $F_t = 1$ としたものと比をとれば (1.1) が得られるからである。さらに、(1.2) が任意の試験汎関数に対して収束するためには、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき

$$\rho(\tau) \mathbb{P}_x[f(L_\tau) | \mathcal{F}_t], \quad \rho(\tau) \mathbb{P}_x[f(L_\tau) 1_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t] \quad (1.3)$$

の ($\mathbb{P}_x$ に関する) L^1 収束が十分である。また逆に、もし (1.3) が概収束することが分かっているならば、(1.3) の L^1 収束は必要でもある (Scheffé の補題による)。

関数 f として原点の定義関数をとると $f(L_\tau) = 1_{\{\tau \leq T_0\}}$ となるから、処罰問題は原点回避条件付けの問題を含んでいる。原点回避条件付けの問題については、論文 [8] および報告 [9] を参照されたい。

もともとの局所時間処罰問題は、本稿の文脈では時計 τ として固定時刻を採用することに相当するが、Roynette-Vallois-Yor により詳しく調べられた問題で、ブラウン運動に対しては [4], [6]、ベッセル過程に対しては [5] で論ぜられている。また、一次元拡散過程に対しては、Salminen-Vallois [7] および Profeta [1], [2] により調べられている。

本稿では、論文 [3] より、時計 τ として指数時刻、到達時刻、逆局所時間を採用したときの結果をまとめる。

2 一次元拡散過程⁽¹⁾

一次元拡散過程であつて、左端点が regular-reflecting なものを考える。さらに、議論の単純化のため、左端点が再帰的であり、右端点が ∞ であつて entrance または natural の場合のみを考える。生成作用素の Feller 標準形を $D_m D_s$ とする。但し、関数 $m : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は狭義増加、右連続、 $m(0) = 0$ であるとし、 $s(\infty) = \infty$ とする。右端点の状況により以下の3つの場合に分けられる:

- (i) ∞ が type-1-natural: $\int^\infty s(x) dm(x) = \infty$ かつ $m \circ s^{-1}(\infty) = \infty$;
- (ii) ∞ が type-2-natural: $\int^\infty s(x) dm(x) = \infty$ かつ $m \circ s^{-1}(\infty) < \infty$;
- (iii) ∞ が entrance: $\int^\infty s(x) dm(x) < \infty$ (必然的に $m \circ s^{-1}(\infty) < \infty$).

なお、 $m(\infty) = \infty$ のとき (∞ が type-1-natural のとき) 0 は零再帰的、 $m(\infty) < \infty$ のとき (∞ が type-2-natural または entrance のとき) 0 は正再帰的である。

スケール変換によって、natural scale, すなわち $s(x) = x$ とした過程を調べる。

典型的な例を挙げておく。

- (i) $0 < \alpha < 1$ に対し、指数 $-\alpha$ (あるいは次元 $2 - 2\alpha$) の片側反射壁ベッセル過程 $\tilde{X}$ は、生成作用素が

$$\tilde{L}f = \frac{1}{2} \left(f'' - \frac{2\alpha - 1}{x} f' \right) \quad \text{on } C_c((0, \infty)) \quad (2.1)$$

で特徴づけられる。その speed measure と scale function はそれぞれ

$$\tilde{m}(x) = \frac{2}{2 - 2\alpha} x^{2-2\alpha}, \quad \tilde{s}(x) = \frac{1}{2\alpha} x^{2\alpha} \quad (2.2)$$

で与えられる。このとき、 $X = \tilde{s}(\tilde{X})$ はベッセル過程 $\tilde{X}$ と本質的に同じであり、natural scale かつ speed measure が $m = \tilde{m} \circ \tilde{s}^{-1}$ で与えられる。この場合、

$$\int^\infty x dm(x) = \int^\infty \tilde{s}(x) d\tilde{m}(x) = \infty \quad (2.3)$$

であるから、 ∞ は type-1-natural である。

- (ii) 定数 $c > 0$ と $0 < \nu \leq 2$ に対し、生成作用素が

$$\tilde{L}f = \frac{1}{2} (f'' - c\nu x^{\nu-1} f') \quad \text{on } C_c((0, \infty)) \quad (2.4)$$

で特徴づけられる一次元拡散過程 $\tilde{X}$ を考える。このとき

$$\tilde{m}(x) = 2 \int_0^x e^{-cy^\nu} dy, \quad \tilde{s}(x) = \int_0^x e^{cy^\nu} dy \quad (2.5)$$

であり、 $X = \tilde{s}(\tilde{X})$ は natural scale かつ speed measure が $m = \tilde{m} \circ \tilde{s}^{-1}$ で与えられる。この場合、簡単な計算により、 ∞ は type-2-natural であることがわかる。

- (iii) 上で $\nu > 2$ とすると、 ∞ は entrance である。

⁽¹⁾ この節の内容は報告 [9] と重複するが、本稿を self-contained にするためにそのままの形で述べる。

3 局所時間処罰問題

$q > 0$ に対し, $\phi_q(x)$ と $\psi_q(x)$ を次の積分方程式の解とする:

$$\phi_q(x) = 1 + q \int_0^x dy \int_{(0,y]} \phi_q(z) m(dz), \quad (3.1)$$

$$\psi_q(x) = x + q \int_0^x dy \int_{(0,y]} \phi_q(z) m(dz). \quad (3.2)$$

こうして

$$H(q) = \lim_{x \uparrow \ell} \frac{\psi_q(x)}{\phi_q(x)} \quad (3.3)$$

とおく. $H(q)$ はスペクトル測度の Stieltjes 変換になっている. m に関するレゾルベント密度 $r_q(x, y)$ は次で与えられる:

$$r_q(x, y) = r_q(y, x) = H(q) \phi_q(x) \left(\phi_q(y) - \frac{\psi_q(y)}{H(q)} \right), \quad 0 \leq x \leq y < \infty. \quad (3.4)$$

また, 修正 0-レゾルベントが存在して次で与えられる:

$$h_0(x) := \lim_{q \downarrow 0} \{r_q(0, 0) - r_q(0, x)\} = x - \frac{1}{m(\infty)} \int_0^x m(y) dy. \quad (3.5)$$

また, 点 a における局所時間 L_t^a は次の条件を満たすように選ぶ:

$$\mathbb{P}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dL_t^a \right] = \frac{r_q(x, a)}{r_q(a, a)}. \quad (3.6)$$

特に $a = 0$ のとき, L_t^0 を L_t と表す. また, 逆局所時間を次で表す:

$$\eta_u^a = \inf\{t \geq 0 : L_t^a > u\}. \quad (3.7)$$

以下では, f は非負かつ $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ とし, $x \geq 0$ とする.

定理 3.1. e_q を独立な平均 $1/q$ の指数時刻とすると, a.s. かつ in L^1 で

$$H(q) \mathbb{P}_x[f(L_{e_q}) | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{q \downarrow 0} M_t^{h_0} \quad \text{and} \quad H(q) \mathbb{P}_x[f(L_{e_q}) 1_{\{e_q > t\}} | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{q \downarrow 0} N_t^{h_0} \quad (3.8)$$

が成り立つ. 但し,

$$M_t^{h_0} = h_0(X_t) f(L_t) + \int_{L_t}^\infty f(u) du, \quad (3.9)$$

$$N_t^{h_0} = h_0(X_t) f(L_t) + \int_{L_t}^\infty f(u) du + \int_0^t \frac{f(L_u)}{m(\infty)} du \quad (3.10)$$

とした. 従って特に, $M_t^{h_0}$ は martingale であり, (3.10) は $N_t^{h_0}$ の Doob 分解を与える.

定理 3.2. T_a を a への到達時刻とすると、a.s. で

$${}_a\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} M_t^s \quad \text{and} \quad {}_a\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})1_{\{T_a > t\}}|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} M_t^s \quad (3.11)$$

が成り立ち、後者は L^1 収束の意味でも成立する。但し、

$$M_t^s = X_t f(L_t) + \int_{L_t}^{\infty} f(u) du \quad (3.12)$$

とした。さらに、 ∞ が type-1,2-natural のとき (3.11) の前者も L^1 収束の意味で成立し、 M_t^s は martingale である。

注 3.3. ∞ が entrance のとき、 M_t^s は local martingale であるが、一般に (例えば $f(0) > 0$ のとき) martingale ではない。

時計 τ を逆局所時間 η_u^a にとるとき、(Clock 1) u を固定して $a \rightarrow \infty$ とする方法と、(Clock 2) a を固定して $u \rightarrow \infty$ とする方法 (2) がある。

定理 3.4 (Clock 1). a.s. で

$${}_a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} M_t^s \quad \text{and} \quad {}_a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})1_{\{\eta_u^a > t\}}|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} M_t^s \quad (3.13)$$

が成り立ち、後者は L^1 収束の意味でも成り立つ。さらに、 ∞ が type-1,2-natural のとき (3.13) の前者も L^1 収束の意味で成立する。

a を固定して $u \rightarrow \infty$ とする方法では、特別な f に対してのみ結果を得た。

定理 3.5 (Clock 2). $\beta > 0$ を定数として $f(u) = e^{-\beta u}$ とおく。このとき、 $\rho(u) = \exp(\frac{\beta u}{1+\beta a})$ として、a.s. かつ in L^1 で

$$\rho(u) {}_a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{u \rightarrow \infty} M_t^{\beta,a} \quad \text{and} \quad \rho(u) {}_a\mathbb{P}_x[f(L_{\eta_u^a})1_{\{\eta_u^a > t\}}|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{u \rightarrow \infty} M_t^{\beta,a} \quad (3.14)$$

が成り立つ。但し、

$$M_t^{\beta,a} = \frac{1 + \beta(X_t \wedge a)}{1 + \beta a} \exp\left(\frac{\beta}{1 + \beta a} L_t^a - \beta L_t\right) \quad (3.15)$$

とした。また、 $\beta = \infty$ に相当する場合として $f(u) = 1_{\{u=0\}}$ のとき、 $\rho(u) = \exp(\frac{u}{a})$ として、a.s. かつ in L^1 で (3.14) が成立する。但し、

$$M_t^{\infty,a} = \frac{X_t \wedge a}{a} \exp\left(\frac{1}{a} L_t^a\right) 1_{\{T_0 > t\}} \quad (3.16)$$

とした。

参考文献

- [1] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 46(3):681–718, 2010.
- [2] C. Profeta. Penalizing null recurrent diffusions. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 69, 23, 2012.
- [3] C. Profeta, K. Yano, and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. In preparation.
- [4] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.
- [5] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Penalizing a BES(d) process ($0 < d < 2$) with a function of its local time. V. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 45(1):67–124, 2008.
- [6] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [7] P. Salminen and P. Vallois. On subexponentiality of the Lévy measure of the diffusion inverse local time; with applications to penalizations. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 67, 1963–1991, 2009.
- [8] K. Yano and Y. Yano. On h -transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero. To appear in Séminaire de Probabilités. arXiv:1409.3112.
- [9] 矢野裕子 矢野孝次. 一次元拡散過程に対する原点回避条件付け. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (19), 統計数理研究所共同研究レポート 350, pages 16–20, 2015.

Christophe Profeta (Laboratoire d'Analyse et Probabilités,
Université d'Evry-Val-d'Essonne)
Kouji Yano (Graduate School of Science, Kyoto University)
Yuko Yano (Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University)