

On infinitely extendable vector bundles on G/P

九大教養 佐藤 栄一

n 次元射影空間上のベクトル束が 'infinitely extendable' なる性質をもつ時, それは直線束の直和であることが知られている。(2)(3). 今 $G \in SL(n, \mathbb{C}), O(2n+1, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{C})$ 又は $O(2n, \mathbb{C})$ とし, $P \in G$ の maximal parabolic subgroup とする。 G/P 上のベクトル束が 'infinitely extendable' (定義 1.5) の時, homogeneous であることを示す (定理 3.11)

§1. まず complete homogeneous variety G/P とそれらの間のうめ込み写像について記号を定義する。

$$\bar{P}_{u,v} \stackrel{\text{定義}}{=} \left\{ (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq u+1} \in GL(u+1, \mathbb{C}) \mid m_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} u+1 \leq i \leq u+1, \\ 1 \leq j \leq v \end{matrix} \right\}$$

1) A型: $G_n(A) = SL(n+1, \mathbb{C}), P_{n,d}(A) = G_n(A) \cap \bar{P}_{n,d}, X_{n,d}(A) = G_n(A)/P_{n,d+1}(A)$ とおく。(これは Grassmann 多様体)。 $j_n(A): G_n(A) \hookrightarrow G_{n+1}(A)$ を次のように定義する:

$$j_n(A)(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \text{ その時}$$

うめ込み $i_{n,d}(A): X_{n,d}(A) \hookrightarrow X_{n+1,d}(A)$ が定義される。(これを A に関するタイプ I の写像と呼ぶ)

2) B型. $G_n(B) = SO(2n+1, \mathbb{C}) = \{ M \in SL(2n+1, \mathbb{C}) \mid {}^t M J M = J \}$

但し $J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{n,d}(B) = \bar{P}_{2n,d} \cap G_n(B)$, $X_{n,d}(B) = G_n(B)/P_{n,d}(B)$ とおく。

$J_n(B): G_n(B) \hookrightarrow G_{n+1}(B)$ を次のように約束する

$$J_n(B) \left(\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & A_2 \\ \hline C_2 & 0 & C_3 \\ \hline A_3 & C_4 & A_4 \end{array} \right) \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & C_1 & 0 & A_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & 0 & 0 & C_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline A_3 & 0 & C_4 & 0 & A_4 \end{array} \right)$$

(但し $A_i \in M(n, C)$, $C_1, C_3 \in M(n, 1, C)$, $C_2, C_4 \in M(1, n, C)$, $D \in M(1, 1, C)$)

この時 うめ込み $i_n(B): X_{n,d}(B) \hookrightarrow X_{n+1,d}(B)$ が定義される (これは B に関するタイプ I の写像とよぶ)

1) C 型: $G_n(C) = Sp(2n, C) = \{ M \in GL(2n, C) \mid ML^t M = L \}$

(但し $L = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ は $1 \leq i \leq n$ に対し $t_{i, 2n-i} = 1$, $n+1 \leq i \leq 2n$

に対し, $t_{i, 2n-i} = -1$, (他は 0)), $P_{n,d}(C) = \bar{P}_{2n-1,d} \cap G_n(C)$,

$X_{n,d}(C) = G_n(C) / P_{n,d+1}(C)$ とおく。 $J_n(C): G_n(C) \hookrightarrow G_{n+1}(C)$ を

$$J_n(C) \left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right) \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline A_3 & 0 & 0 & A_4 \end{array} \right) \text{ とする。 } (A_i \in M(n, C)).$$

このうめ込み $i_{n,d}(C): X_{n,d}(C) \hookrightarrow X_{n+1,d}(C)$ が定義される。 (C に関するタイプ I の写像といふ)

2) D 型: $G_n(D) = SO(2n, C) = \{ M \in SL(2n, C) \mid ML^t M = L \}$

($L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) とすると, $P_{n,d}(D)$, $J_n(D)$, $X_{n,d}(D)$, $i_{n,d}(D)$ は C 型と同様に定義できる。

注意 1.1. 今 $* (= A, B, C, D)$ に対し $G_n(*)$ の中で, 対角行列全体の集合を $H_n(*)$, 上半三角行列全体の集合を $B_n(*)$ とおくと, $H_n(*)$ は, maximal torus, Borel subgroup になる。 $H_n(*)$ に関するルート系 Δ を固定し, $\Delta_+ \in B_n(*)$ に関する正ルートの集合とし, Π を単純ルート

3

の集合とする ($\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$) ($G_n(*), P_n(*), B_n(*), H_n(*)$ とし、
いづ * を省略して使う)

命題 1.2 $X_{n,d}(*)$ の Picard group は $\mathbb{Z}$ に同型。

(その generator で ample line bundle $\mathcal{O}_{X_{n,d}(*)}(1)$ と書く)

次に $P_{n,d,d-1}(*)=P_{n,d}(*)\cap P_{n,d-1}(*)$ とし, $X_{n,d,d-1}(*)=G_n(*)/P_{n,d+1,d}(*)$ とする。この時 次の図式がある。

$$(1-3) \quad \begin{array}{ccccc} & & X_{n,d,d-1}(*) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P_{n,d}(*) & & & & q_{n,d-1}(*) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & X_{n,d}(*) & & X_{n,d-1}(*) & \end{array}$$

命題 1.4 x, y を $X_{n,d}(*), X_{n,d-1}(*)$ の closed point とする。

$*$	$P_{n,d}(*)$ の fiber (= F_1)	$q_{n,d-1}(*)\mathcal{O}_{X_{n,d-1}(*)}(1) _{F_1}$	$q_{n,d-1}(*)$ の fiber (= F_2)	$P_{n,d}(*)\mathcal{O}_{X_{n,d}(*)}(1) _{F_2}$
A	P^d (d -次元射影空間)	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	P^{n-d}	$\mathcal{O}_{P^{n-d}}(1)$
B	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)}$ の二次曲面 (S)	$\mathcal{O}_S(1)$
C	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)-1}$	$\mathcal{O}_{P^{2(n-d)-1}}(1)$
D	P^d	$\mathcal{O}_{P^d}(1)$	$P^{2(n-d)+1}$ の二次曲面 (S)	$\mathcal{O}_S(1)$

但し $\mathcal{O}_{P^d}(1)$ は P^d の超平面に対応する直線束とする。 $S \in P^m$ の

二次曲面とする時 $\mathcal{O}_S(1)$ は S の hyperplane section に対応する直線束とする。

定義 1.5 $*$ ($=A, B, C, D$) に対し $E \in X_{n,d}(*)$ 上のベクトル束とする。

n 以上の任意の整数 m に対し, $X_{m,d}(*)$ 上のベクトル束 E_m ($E_n = E$)

とタイフ・I の写像 $i_{m,d}(*): X_{m,d}(*) \hookrightarrow X_{m+1,d}(*)$ があって $i_{m,d}(*): E_m \hookrightarrow E_{m+1}$

$\cong E_m$ のとき $E \in$ タイフ・I の infinitely extendable といふ ('IE-I' と

略記する。)

注) $1) * = A$ で $d=0$ のとき $(X_{n,0}(A) \subseteq P^n)$ infinitely extendable

の定義はすでにされているが ((2)を見よ) 上の定義は、それよりも強い。

可 $X_{n,d}(*)$ 同に 'タイプ II の写像' が定義され、IE-II ベクトル束が定義されるが ここでは触れない。

§ 2 IE-I ベクトル束の性質

定理 2.1 $X_\infty (C P_\infty)$ を 非特異 infinitely extendable variety とし E を X_∞ 上のベクトル束とする。その時 E は 直線束の直和である。

([27] [31])

命題 2.2 $S \subseteq P^n$ の二次曲面とする。その時 $H^i(P^n, \mathbb{Z}) \cong H^i(S, \mathbb{Z})$

($i=0, \dots, n-2$) . さらに $n \geq 4$ なら $P_{n-2} \subseteq S \cong \mathbb{Z}$.

命題 2.3 $*$ を A か C とし, E を $X_{n,d}(*)$ 上の IE-I ベクトル束とする。

その時 $X_{n,d-1}(*)$ のすべての点 y に対し $P_{n,d}(*)^* E|_{q_{n,d-1}^{-1}(y)} \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{p_{n,d}(*)}(a_i)^{\otimes r_i}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_d$, $r_i > 0$), $n(A) = n-d$.

$n(C) = 2(n-d)-1$. さらに $a_1, \dots, a_d$, $r_1, \dots, r_d$ は y に無関係に定まる。 ($P_{n,d}$, $q_{n,d}$ は 図式 1-3 を見よ)

(証) 定理 2.1 を使って示される。

さらに定理 2.1 と 命題 2.3 を使うと

命題 2.4 $*$ を B か D とし, E を $X_{n,d}(*)$ 上の IE-I ベクトル束とする。その

時 $X_{n,d-1}(*)$ のすべての点 y に対し, $P_{n,d}(*)^* E|_{q_{n,d-1}^{-1}(y)} \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_S(a_i)^{\otimes r_i}$

§3 定理の証明

§1で定義された G, P, B, H に対応する リー代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}$ で表わす。以下で用いる記号 $(,), \circ^0, \Delta(,)$ 等は Kostant の論文 (1) の §5 と参照せよ。

今 Z を $\mathfrak{g}$ 上の 整形式の集合とするなら, $\mu \in Z$ である必要十分条件は Δ の 任意の root ϕ に対し, $2(\mu, \phi) / (\phi, \phi) \in \mathbb{Z}$ なることである。(Δ の代りに π で置きかえてもよいことは知られている)。そこで $\mu (\in Z)$ に対し $(2(\mu, \alpha_1) / (\alpha_1, \alpha_1), \dots, 2(\mu, \alpha_i) / (\alpha_i, \alpha_i), \dots, 2(\mu, \alpha_n) / (\alpha_n, \alpha_n))$ と対応させる (= σ とおく)

命題 3.1 $D_1 \cong_{\sigma} N_0^{d-1} \times \mathbb{Z} \times N_0^{n-d}$

($N_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$, $D_1 = \{ \mu \in Z \mid (\mu, \phi) \geq 0, \forall \phi \in \Delta(m_1) \}$

但し $m_1 = m \cap \mathfrak{g}_1$, $m = \mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}$ の reduction part)

注意 3.2 1) $G_n(B)$, $G_n(D)$ は 単連結でないので, $G_n(*)$ の 単連結被覆 $\overline{G_n(*)}$ を考え, この上で議論する。

2) 命題 3.1 より D_1 の元は $X_{n,d}$ 上の 既約 homogeneous $\wedge$ -7-IL 束と一対一対応なので ([1] の §5 を見よ), $c_{i-1} = 2(\mu, \alpha_i) / (\alpha_i, \alpha_i)$ とおいて, $(c_0, \dots, c_{n-1})$ に対応する $\wedge$ -7-IL 束を $P_n(d; c_0, \dots, c_{n-1})$ とかく。

これから $X_{n,d}$ 上の homogeneous $\wedge$ -7-IL 束が $P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)$ の直和の形で表わされる条件を調べる。($P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)$ は

IE-I ベクトル束である。)

命題 3.3 $E \in X_{n,d}$ 上の階数 r の既約な homogeneous ベクトル束とし, $n-d > r$ と仮定する。そのとき $E \cong P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)$

(証明) U -群 P の既約表現と対応するリー環 $\mathfrak{p}$ の表現で考える

(下の注意を参照せよ)

注意 3.4 $\mathfrak{g}$ を単純リー環とする ($\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{o}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(n)$

$\mathfrak{o}(2n, 1)$) $\phi \in \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ の表現とする。 $\dim V < n$ と仮定するな ϕ は trivial である。

命題 3.5 $E \in X_{n,d}$ 上の階数 r の homogeneous ベクトル束とする。

$n-d > r$ と仮定する。その時 E は $P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)$ 型のベクトル束の直和である。

命題 3.6 $E_i = P_n(d; c_0^i, \dots, c_d^i, 0, \dots, 0)$ とする。その時 $E_1 \oplus E_2$ ($E_1 \oplus E_2$) は $P_n(d; b_0, \dots, b_d, 0, \dots, 0)$ 型のベクトル束の直和である。

次に $P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0) \in \mathcal{E}$ の視点から調べる。

今 $(d+1)$ 個の整数 $a_0, \dots, a_d$ (但し $a_i \geq 0$ for $0 \leq i \leq d-1$) に対して $X_{n,d}$ 上の coherent sheaf $P_n(a_0, \dots, a_d)$ を帰納的に定義する。

(図式 3-1). $d=0$ に対して $P_n(a_0) = \mathcal{O}_{X_{n,d}}(a_0)$ とおく。もし

$P_n(a_0, \dots, a_j)$ ($0 \leq j \leq d-1$) が定義されれば, $P_n(a_0, \dots, a_j)$

$= P_{j+1} q_{j-1}^* P_d(c_0, \dots, c_{j-1}) \otimes \mathcal{O}_{X_{n,j}}(c_j)$ とおく。その時 次の重要な結果を与える。

定理 3.7. $P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0) \cong P_n(c_0, \dots, c_d)$

(証明) $X_{n,d,d-1}$ 上の homogeneous ベクトル束の完全列:

$$0 \rightarrow F \rightarrow P_n \xrightarrow{d} P_n(d; c_0, \dots, c_{d-1}, 0; 0) \rightarrow q_{n-1}^* P_n(d-1; c_0, \dots, c_{d-1}, 0, \dots, 0) \rightarrow 0$$

を示し, direct image $R^i P_{d*} E$ とすることにより示される。

命題 3.8 $d \leq n-2$ なし $H^i(X_{n,d}, P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)) = 0$
であり, $c_{n-1} \geq 0$ なし $H^i(X_{n,d}, P_n(n-1; c_0, \dots, c_{n-1})) = 0$ 。

(証明) Bott の定理より明らか。

さらに 2つの 命題 を示すと 主定理が 示される。

命題 3.9 E を 次の 完全列 をみたす $X_{n,d}$ 上の ベクトル束 とする;

$$0 \rightarrow \bigoplus_i P_n(d; a_0^i, \dots, a_d^i, 0, \dots, 0) \rightarrow E \rightarrow \bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \dots, b_d^j, 0, \dots, 0) \rightarrow 0,$$

その時 $E \cong \bigoplus_i P_n(d; a_0^i, \dots, a_d^i, 0, \dots, 0) \oplus \bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \dots, b_d^j, 0, \dots, 0)$

命題 3.10 $E \in X_{n,d}$ の ベクトル束 とし $E \otimes (\bigoplus_i P_n(d; a_0^i, \dots, a_d^i, 0, \dots, 0))$
 $\cong \bigoplus_j P_n(d; b_0^j, \dots, b_d^j, 0, \dots, 0)$ とする。そのとき E は $P_n(d; c_0, \dots, c_d, 0, \dots, 0)$
型の 直和 である。

(証明) 命題 3.6 と Krull-Schmidt Theorem より明らか

主定理 3.11. $E \in X_{n,d}$ 上の IE-I ベクトル束 とする。その時

E は $\bigoplus_i P_n(d; c_0^i, \dots, c_d^i, 0, \dots, 0)$ である。

(証明) d に関する 帰納法 を用いる。定理 2.1, 2.5, 3.7 と 命題 3.9,
3.10 を 用いる と 容易。

Reference

1. B. Kostant. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil Theorem. Ann of Math. Vol. 74, No. 2 (1961)
2. E. Sato. The decomposability of an infinitely extendable vector bundle on the projective spaces and Grassmann varieties. J. Math. Kyoto Univ. Vol. 17, No. 1, 1977
3. Tjurin. Vector bundles of finite rank over infinite varieties. Izvestija Akad. Nauk, Ser. Matem. 40 (1976) pp. 1248-1268,